BAB II

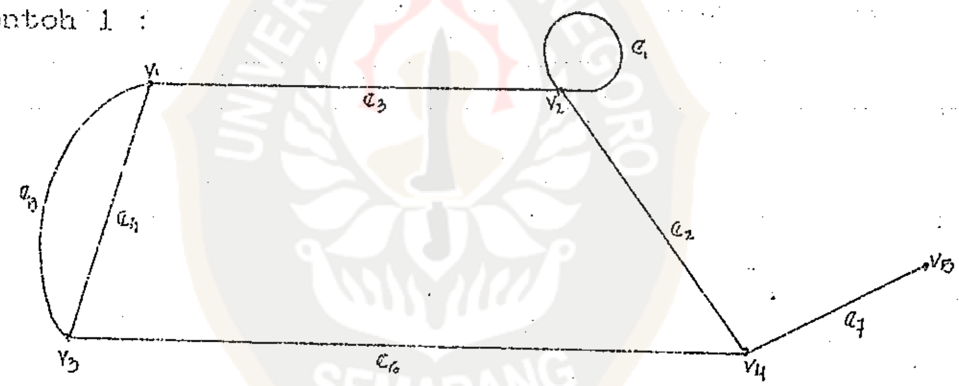
G R A F

2.1. PENGERTIAN GRAF

DEFINISI 1.

Graf G = (V,E) memuat himpunan obyek V={v1,v2,...} yang disebut titik (vertices) dan obyek yang lain E={e1,e2,...} yang disebut garis graf (edges).

Contoh 1 :



Gb.2 graf dengan 5 titik dan 7 garis graf (edge)

DEFINISI 2.

Sebuah garis graf (edge) yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama disebut LOOP.

Contoh 2 :

Pada gambar 2 e_1 merupakan loop

DEFINISI 3.

Garis graf (edge) Paralel adalah garis graf (edge) (lebih dari satu) yang berasosiasi dengan sepasang titik yang diberikan.

Contoh 3 :

pada gambar 2 garis graf (edge) e_4 dan e_5 adalah garis graf (edge) paralel .

DEFINISI 4.

Finite graf adalah suatu graf yang mempunyai jumlah titik dan jumlah garis graf (edge) berhingga. Kebalikkannya disebut Infinite graf.

DEFINISI 5.

Jika sebuah titik v_i adalah titik akhir dari garis graf (edge) e_j, maka v_i dan e_j disebut Incident satu dengan yang lainnya.

Contoh 4 :

Pada gambar 2 garis graf (edge) e_2, e_6, e_7 incident dengan titik v_4

DEFINISI 6.

Dua garis graf (edge) non paralel dikatakan adjecent jika mereka incident pada sebuah titik yang sama.

Contoh 5 :

pada gambar 2 , e_2 dan e_7

DEFINISI 7.

Dua titik dikatakan adjecent jika mereka merupakan titik akhir dari garis graf (edge) yang sama.

Contoh 6 :

Pada gambar 2. v_4 dan v_5 adalah adjecent sebaliknya v_1 dan v_4 bukan adjecent.

DEFINISI 8.

Jumlah garis graf (edge) incident pada sebuah titik v_i, dengan loop dihitung dua, dikatakan Derajat (degree) ditulis $d(v_i)$ dari titik v_i.

Contoh 7 :

Pada gambar 2. $d(v_1)=d(v_3)=d(v_4)=3$, $d(v_2)=4$, dan $d(v_5)=1$

Pandang suatu graf G yang mempunyai e garis graf (edge) dan n titik . Jika setiap garis graf (edge) memberikan 2 derajat, maka jumlah derajat untuk semua titik pada graf G adalah dua kali jumlah garis graf (edge), maka

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

TEOREMA 1.

Banyaknya titik dengan derajat ganjil pada suatu graf adalah genap.

Bukti :

Jika suatu titik dengan degree ganjil dan degree genap dipisahkan, maka banyaknya derajat di ruas kiri persamaan (1) dapat dituliskan sebagai jumlahan dari dua jumlahnya, yang masing - masing memuat titik - titik dengan derajat genap dan ganjil.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{\text{genap}} d(v_j) + \sum_{\text{ganjil}} d(v_k) \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

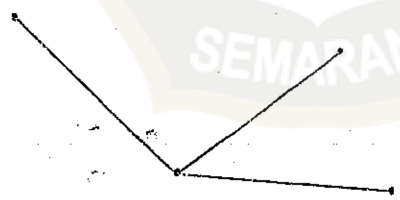
Jika pada ruas kiri persamaan adalah genap, maka pernyataan pertama pada ruas kanan adalah genap (karena jumlahan dari bilangan genap) maka pernyataan kedua juga harus genap. Andaikan pernyataan kedua pada ruas kanan adalah bilangan ganjil maka tidak mungkin terjadi jumlahan dari bilangan genap dan bilangan ganjil adalah bilangan genap. Kontradiksi dengan sifat jumlahan .Jadi pengandaian salah , yang benar adalah

$d(v_k)$ = suatu bilangan genap .... (3)

Sehingga teorema terbukti.

Contoh 8 :

Pada gambar 3 , terlihat jumlah titik dengan derajat ganjil adalah genap.



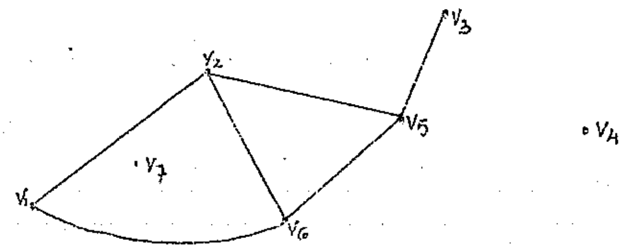
Gb.3 graf dengan titik berderajat ganjil

DEFINISI 9.

Titik terisolasi (isolated vertex) adalah titik yang tidak mempunyai incident garis graf (edge). dengan kata lain titik terisolasi adalah titik dengan derajat (degree) nol.

Contoh 8 :

Pada gambar 4. titik v_4 dan v_7 adalah titik terisolasi.



gb.4 graf dengan dua titik terisolasi

DEFINISI 10.

Suatu titik dengan derajat satu disebut suatu titik akhir (end vertex)

DEFINISI 11.

Path adalah graf dengan garis graf (edge) dan titik tidak boleh diulang. terkecuali path tertutup yang sering disebut cycle.

DEFINISI 12.

Walk adalah graf dengan garis graf (edge) dan titik boleh diulang.

jika titik awal $\neq$ titik akhir -------> terbuka

titik awal = titik akhir -------> tertutup

DEFINISI 13.

Suatu walk tertutup dimana tidak ada titik (kecuali titik awal dan titik akhir) yang dilewati lebih dari sekali disebut sirkuit (circuit)

DEFINISI 14 ...

DEFINISI 14

Pada definisi 1, jika himpunan garis graf (edge) E adalah kosong maka graf menjadi tidak punya garis graf (edge) disebut null graf.

Dengan kata lain setiap titik pada nul graf adalah titik terisolasi.

Contoh 10:

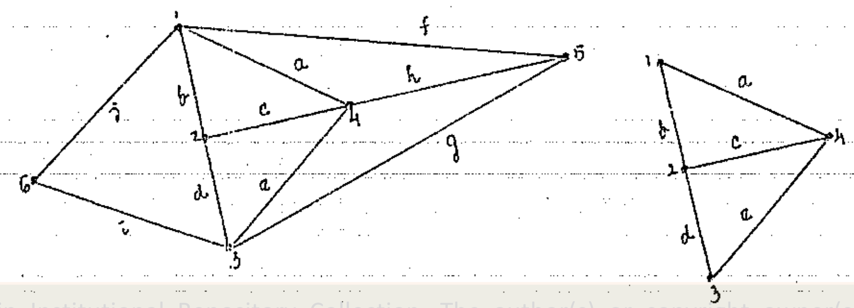
gb.5 null graf dengan enam titik.

Walaupun himpunan garis graf (edge) E kosong, himpunan vertek V tidak boleh kosong, karena jika kosong maka tidak ada graf. Dengan kata lain suatu graf paling sedikit mempunyai 1 titik.

DEFINISI 15.

Sebuah graf g dikatakan subgraf dari graf G jika seluruh titik dan garis graf (edge) nya berada dalam graf G

Contoh 11 :



gb.6 graf dan salah satu subgrafnya.

Konsep dari subgraf sama dengan konsep subset pada teori himpunan. Sebuah subgraf bisa dikatakan sebagai graf yang dimuat (bagian dari) graf yang lain. Symbol dalam teori himpunan g   G digunakan dengan kalimat " g adalah sebuah subgraf dari G ".

Dari definisi 15 didapat kesimpulan sebagai berikut :

1. Setiap graf adalah subgraf bagi dirinya sendiri.
2. Sebuah subgraf dari subgraf G adalah subgraf G.
3. Titik tunggal dalam graf G adalah subgraf G.
4. Sebuah garis graf (edge) tunggal dalam graf G, bersama dengan titik akhir, juga merupakan subgraf.

DEFINISI 16.

Sebuah graf dikatakan terhubung (conected) jika paling sedikit ada satu buah path diantara setiap pasang titiknya. Dan sebaliknya dikatakan tak terhubung (disconected).

DEFINISI 17.

Komponen (Component) adalah setiap subgraf yang terhubung (connected).

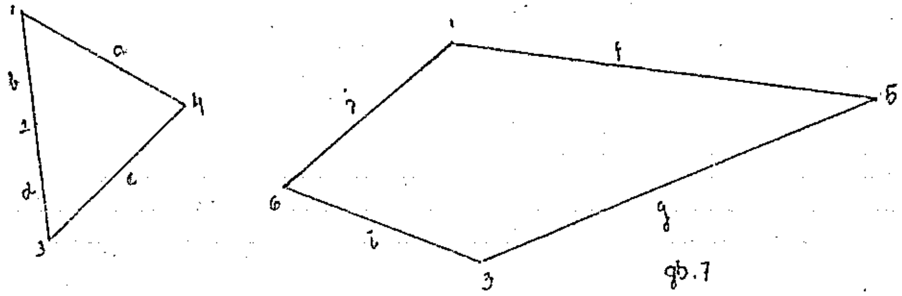
DEFINISI 18.

Dua subgraf g_1 dan g_2 dari graf G disebut garis graf (edge) terpisah (edge disjoint) jika g_1 dan g_2 tidak mempunyai garis graf (edge) bersama - sama.

Contoh 12 :

dari gambar 6 diambil :

?

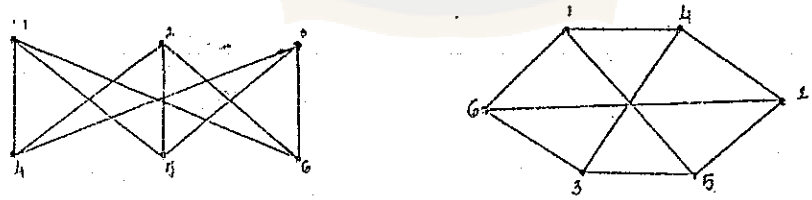


gb.7

DEFINISI 19.

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorpis ditulis $G_1 = G_2$ jika ada korespondensi satu - satu antara elemen dari himpunan titik - titiknya dan korespondensi satu - satu antara elemen dari himpunan garis graf (edge) - edgenya sedemikian sehingga korespondensi garis graf (edge) incident dengan korespondensi garis graf (edge).

Contoh 13 :



gb.8

2.2 OPERASI DALAM GRAF.

DEFINISI 20.

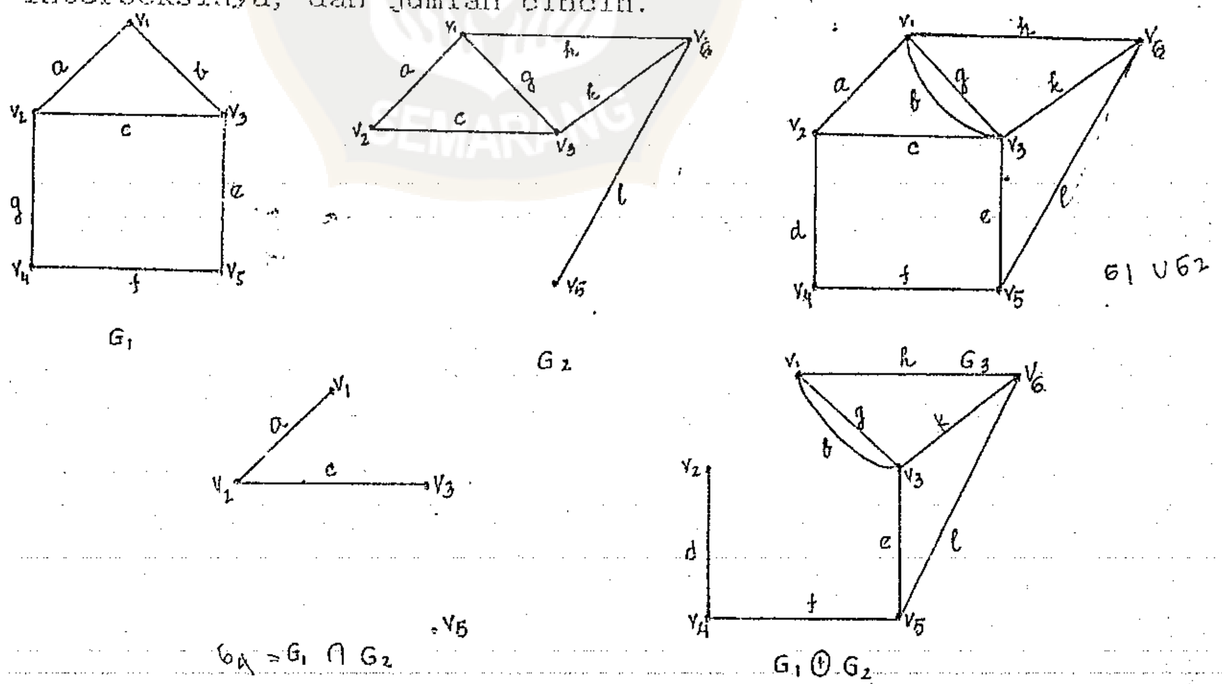
Union dari dua graf $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$ adalah graf lain G_3 (ditulis $G_3=G_1 \cup G_2$), dimana himpunan titik - titiknya $V_3=V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis graf (edge) nya $E_3=E_1 \cup E_2$.

DEFINISI 21.

Irisan (intersection) dari dua graf G_1 dan G_2 ditulis $G_1 \cap G_2$ adalah graf lain G_4 yang hanya memuat titik - titik dan garis graf (edge) yang bersama - sama ada pada graf G_1 dan G_2.

DEFINISI 22.

Jumlah cincin (the ring sum) graf G_1 dan G_2 (ditulis $G_1 \oplus G_2$) adalah suatu graf yang memuat himpunan titik - titik $V_1 \cup V_2$ dan garis graf (edge) lain yang tidak dimiliki G_1 dan G_2 secara bersama - sama.
Pada gambar 8 diperlihatkan dua graf dengan unionnya, interseksinya, dan jumlah cincin.



Gb.9 union, interseksi, jumlah cincin dari dua graf

Definisi 20, 21, 22 adalah komutatif

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$$

$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$$

$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$$

TEOREMA 2.

Jika G_1 dan G_2 adalah garis graf (edge) terpisah (edge disjoint) maka

$G_1 \cap G_2$ disebut null graf. dan $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$.

Bukti :

Karena G_1 dan G_2 adalah garis graf (edge) terpisah maka tidak ada garis graf (edge) milik G_1 bersama - sama dengan G_2. Sehingga menurut definisi 21 $G_1 \cap G_2$ disebut null graf. dan juga karena G_1 dan G_2 adalah garis graf (edge) terpisah maka definisi 22 akan menjadi sama dengan definisi 20 sehingga didapat $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$ terbukti.

TEOREMA 3.

Jika G_1 dan G_2 adalah vertek terpisah maka $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Bukti :

Karena G_1 dan G_2 saling asing maka menurut definisi 21 teorema 3 terbukti.

DEFINISI 23.

Untuk sembarang graf G, berlaku :

$$G \cup G = G \cap G = G \text{ dan}$$

$$G \oplus G = \text{sebuah null graf.}$$

DEFINISI 24.

Jika g adalah sebuah subgraf dari G maka $G \oplus g$ adalah subgraf tersisa setelah seluruh garis graf (edge) dari g dipindahkan dari G.

Maka $G \oplus g$ ditulis sebagai $G - g$ dimana $G \supset g$.

$G \oplus g = G - g$ disebut Complemen g dalam G

DEFINISI 25.

Dekomposisi (decomposition)

Sebuah graf G dikatakan terpisah menjadi dua subgraf g_1 dan g_2 jika :

$$g_1 \cup g_2 = G \text{ dan}$$

$$g_1 \cap g_2 = \text{sebuah null graf}$$

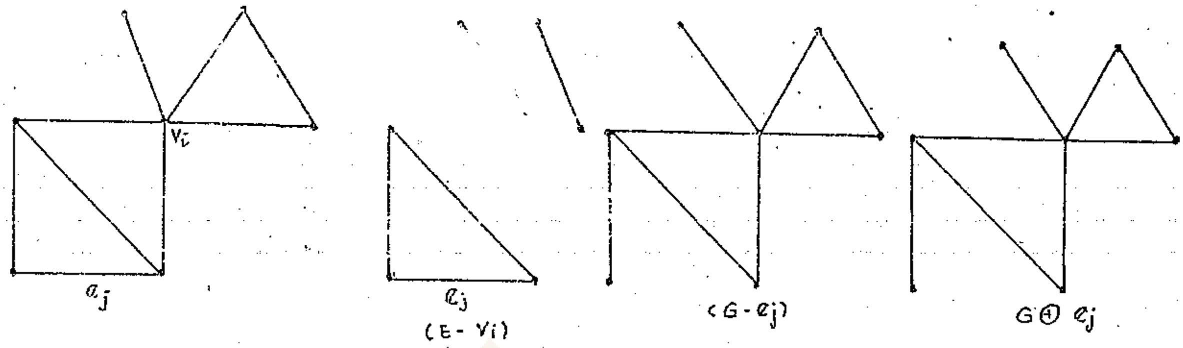
DEFINISI 26.

Deletion

Jika v_i adalah sebuah titik dalam graf G. Maka $G-v_i$ adalah sebuah subgraf dari G yang dihasilkan dengan menghapus (memindahkan) v_i dari G. Penghapusan sebuah titik selalu mengakibatkan penghapusan seluruh garis graf (edge) yang incident dengan titik itu.

jika e_j sebuah garis graf (edge) dalam G maka $G-e_j$ adalah sebuah subgraf dari G yang dihasilkan dengan menghapus e_j dari G. Penghapusan sebuah garis graf (edge) tidak mengakibatkan penghapusan titik akhirnya (end point), Sehingga $G - e_j = G \oplus e_j$

gambar 10 adalah contoh deletion.



gb. 1Ø

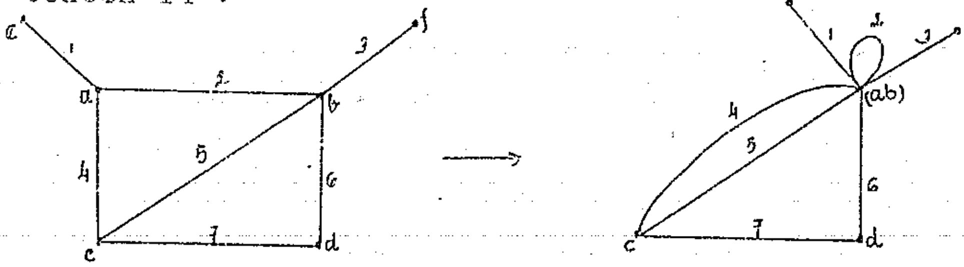
DEFINISI 27.

Fusion

Sepasang titik a dan b dalam graf dikatakan bergabung (fusi) jika dua titik tersebut diganti dengan sebuah titik baru sedemikian rupa sehingga setiap garis graf (edge) yang incident dengan a, b atau a dan b juga incident dengan titik yang baru.

Pergantian dua titik menjadi satu tidak akan merubah jumlah garis graf (edge) tetapi mengurangi jumlah titik dengan satu.

Contoh 14 :



Gb. 11 fusi dari titik a dan b

2.3 POHON BENTANGAN (SPANNING TREE)

DEFINISI 28.

Sebuah pohon (tree) adalah graf terhubung (connected graph) tanpa sirkuit (circuit).

DEFINISI 29.

Sebuah graf terhubung dikatakan terhubung minimal jika penghilangan satu garis graf (edge) sembarang dari graf tersebut akan menghasilkan graf tak terhubung.

TEOREMA 4.

Ada satu dan hanya satu path diantara pasangan titik - titik dalam sebuah pohon T.

Bukti :

Jika T adalah graf terhubung, maka harus ada sedikitnya satu path diantara pasangan titik - titik dalam T. Andaikan diantara dua titik a dan b pada T ada dua path yang berbeda, Union dari dua path tersebut membentuk suatu circuit dan menurut definisi 28 maka T bukan merupakan pohon. Kontradiksi dengan T adalah pohon. Pengandaian salah yang benar adalah ada satu dan hanya satu path antara pasangan titik - titik dalam T. terbukti.

TEOREMA 5.

Jika dalam graf G ada satu dan hanya satu path diantara pasangan titik - titiknya, maka G adalah pohon.

Bukti :

Andaikan dalam graf G ada sebuah sirkuit maka adda sedikitnya satu pasang titik a dan b sedemikian sehingga ada dua path yang berbeda antara a dan b. Kontradiksi dengan G mempunyai satu dan hanya satu path diantara pasangan titik - titiknya. Pengandaian salah, yang benar adalah G tidak mempunyai sirkuit. Sehingga menurut definisi 28 G adalah pohon. terbukti.

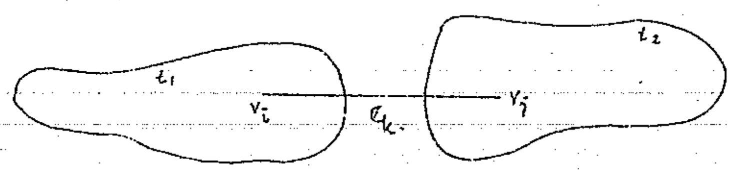
TEOREMA 6.

Sebuah pohon dengan n titik mempunyai n-1 edges.

Bukti :

Teorema ini akan dibuktikan dengan menginduksi jumlah titiknya. jelas terlihat bahwa teorema benar untuk n=1,2,3. Diandaikan teorema berlaku untuk seluruh pohon dengan jumlah titik n-1 buah. Akan dibuktikan teorema benar unutk jumlah titik n buah.

Pandang sebuah pohon T dengan n titik. dalam T e_k adalah sebuah garis graf (edge) dengan titik akhir v_i dan v_j. sesuai dengan teorema 4, maka tidak ada path lain diantara v_i dan v_j kecuali e_k. Karena itu penghapusan e_k dari T akan memutus pohon ini, seperti terlihat dalam gambar 11. Sehinggga $T-e_k$ terdiri dari tepat dua komponen. Kedua pohon tersebut t_1 dan t_2 mempunyai titik lebih sedikit dari n. Ambil t_1 terdir dari n-1 titik dan t_2 terdiri ddari atu titik. Sehingga $T-e_k$ memuat n-2 garis graf (edge) (untuk n titik). Dari sini T mempunyai tepat n-1 garis graf (edge). terbukti.



gb. 12 pohon dengan n titik

TEOREMA 7.

Sebuah graf dengan n titik, n-1 garis graf (edge) dan tidak mempunyai circuit adalah terhubung (connected).

Bukti :

Andaikan ada graf G tanpa sirkuit yang mempunyai n titik dan n-1 garis graf (edge) yang tak terhubung. Dalam hal ini G akan memuat dua atau lebih komponen bukan sirkuit. Ambil G memuat dua komponen $g_1(V_1,E_1)$ dan $g_2(V_2,E_2)$, tambahkan sebuah garis graf (edge) e diantara v_1 dan v_2 pada G, maka penambahan e tidak akan tidak akan menghasilkan sirkuit. Sehingga G U e adalah graf terhubung yang tidak mempunyai sirkuit. Menurut definisi 28 G U e adalah pohon dengan n titik dan n garis graf (edge). Kontradiksi dengan teorema 6 yang menyatakan bahwa suatu pohon dengan n titik mempunyai n-1 garis graf (edge). Jadi pengandaian salah, yang benar adalah tidak ada graf graf G tanpa sirkuit yang mempunyai n titik dan n-1 garis graf (edge) yang tidak terhubung. terbukti.

Akibat dari teorema 4 sampai dengan 7, dibawah ini disimpulkan 5 definisi pohon yang berbeda tetapi equivalen. Suatu graf G dengan n titik dikatakan pohon jika :

1. G adalah graf terhubung dan tidak mempunyai circuit atau
2. G adalah graf terhubung dan mempunyai n-1 garis graf (edge) atau
3. ....

3. G adalah graf yang tidak mempunyai circuit dan mempunyai n-1 garis graf (edge) atau
4. Ada tepat satu path diantara pasangan titik -titik dalam graf G atau
5. G adalah graf terhubung minimal.

DEFINISI 30.

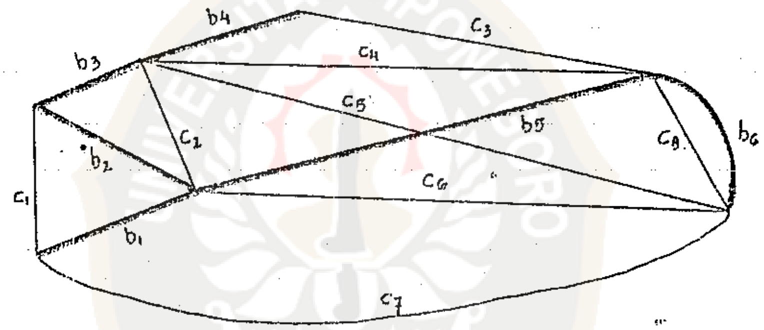
Suatu pohon T dikatakan sebagai Pohon bentangan (spanning tree) dari graf terhubung G jika T adalah subgraf dari G dan T memuat seluruh titik - titik dari G.

Contoh 15 :

Pohon bentangan ditunjukkan oleh garis tebal pada gambar 12.

Sebagai catatan, bahwa pohon bentangan didefinisikan / ditentukan hanya untuk graf terhubung (connected graf), Karena suatu pohon selalu terhubung (connected). Dan pada suatu graf tak terhubung dengan n titik kita tidak dapat menemukan subgraf terhubung dengan n titik. Setiap komponen (menurut definisi terhubung) dari suatu graf tak terhubung, bagaimanapun juga mempunyai sebuah pohon bentangan, maka sebuah graf tak terhubung dengan k komponen mempunyai k pohon bentangan.

Untuk mencari pohon bentangan dari sebuah graf terhubung sangatlah sederhana. Jika graf G tidak mempunyai circuit maka pohon bentangan adalah dirinya sendiri. Dan jika graf G mempunyai circuit hapuslah sebuah garis graf (edge) dari circuit itu, penghapusan ini masih akan tetap meninggalkan graf G terhubung. Jika msih ada circuit lagi ulangi langkah penghapusan tersebut sampai sebuah garis graf (edge) pada circuit terakhir terhapus dan akan meninggalkan graf terhubung, graf yang tidak mempunyai circuit yang memuat seluruh titik - titik dari G. Dengan demikian sudah kita dapatkan pohon bentangan.



gb.13 pohon bentangan.

TEOREMA 8.

Setiap graf terhubung G mempunyai paling sedikit satu buah pohon bentangan.

Bukti :

Karena G adalah graf terhubung maka dapat ditemukan minimal satu buah pohon bentangan dengan cara melakukan penghapusan terhadap garis graf (edge) pada circuit dalam graf tersebut (jika ada sirkuit). terbukti.

DEFINISI 31.

Suatu garis graf (edge) dalam pohon bentangan T disebut cabang (branch) dari T.

DEFINISI 32.

Suatu garis graf (edge) dalam graf G yang tidak termasuk dalam pohon bentangan T disebut chord.

Contoh 16 :

pada gb.12 garis graf (edge) $b_1, b_2, \ldots, b_6$ adalah cabang dari pohon bentangan (garis tebal) sedangkan garis graf (edge) $c_1, c_2, \ldots, c_8$ adalah chord.

Harus diingat bahwa cabang dan chord hanya berlaku untuk pohon bentangan yang ditentukan. Sebuah cabang pada pohon bentangan T_1 bisa menjadi chord pada pohon bentangan yang lain T_2.

Terkadang ada yang menyebut bahwa suatu graf bersambung G adalah hasil Union dari dua buah subgraf T dan T', ditulis

$$T \cup T' = G$$

dimana T adalah pohon bentangan dan T' adalah komplemen dari T dalam graf G.

DEFINISI 33.

Cotree adalah komplemen dari pohon (tree) dalam graf

TEOREMA 9.

Dengan memandang sembarang pohon bentangan, Sebuah graf terhubung dengan n titik dan e garis graf (edge) mempunyai n-1 cabang pohon dan e-n+1 chord.

Bukti :

Untuk bukti bahwa sebuah graf terhubung dengan n titik dan e garis graf (edge) mempunyai n-1 cabang pohon telah dibuktikan dengan teorema 6. Sedangkan untuk bukti ada e-n+1 chord adalah sebagai berikut :

Karena chord adalah garis graf (edge) yang tidak termasuk dalam cabang pohon maka jumlah chord adalah jumlah garis graf (edge) dalam graf G yaitu e dikurangi jumlah cabang pohon dalam G jadi didapat
e-(n-1) = e-n+1. terbukti.

Pandang suatu graf G, kita definisikan :
n adalah jumlah titik dalam graf G,
e adalah jumlah garis graf (edge) dalam graf G
k adalah jumlah komponen yang ada dalam G.

Jika k=1 , maka G adalah terhubung.
Hubungan antara bilangan n,e dan k adalah sebagai berikut :
1. Setiap komponen graf harus mempunyai paling sedikit satu titik, n>=k.
2. Jumlah garis graf (edge) dalam komponen tidak dapat lebih kecil dari jumlah titik dalam komponen itu sendiri dikurangi satu. sehingga e>=n-k maka n-k>=Ø dan e-n+k>=Ø.
3. Bilangan n,e,k tidak saling tergantung (independent) dan bilangan n,e,k disebut bilangan dasar (fundamental number) dari graf.

Dari ketiga bilangan dasar tersebut didapat bilangan penting yang disebut rank dan nullity. Yang ditentukan sebagai berikut :

rank -------> $r = n - k$

nullity -----> $u = e - n + k$

rank dari graf terhubung adalah n-1 dan nullity adalah e-n+1

DEFINISI 34.

Rank dari G adalah jumlah cabang pada sembarang pohon bentanga dalam G.

Nullity dari G adalah jumlah chord dalam G

Rank + Nullity adalah jumlah garis graf (edge) dalam G Nullity dalam suatu graf juga sering disebut bilangan siklomatik (cyclomatic number).