# BAB III PERGANDAAN CARTESIAN, SPLIT BARISAN EKSAK DAN GRUP HOMOMORPHISMA.

## 3.1 PERGANDAAN CARTESIAN .

Definisi 3.1.1

Pandang $(M_i)_{i\in I}$ keluarga module kiri atas ring A.

Misal $M=\prod_{i\in I} M_i$, dengan operasi

$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i+y_i)_{i\in I}$

$a(x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I}$,

M adalah module atas ring A, disebut dengan pergandaan Cartesian dari keluarga $(M_i)_{i\in I}$.

Contoh 3.1

1. Misal $M_1, M_2, M_3$ adalah module kiri atas ring A,

Misal $M_1=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $M_2=\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ dan $M_3=\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$.

$M=\prod_{i\in I} M_i$

$=M_1 \times M_2 \times M_3$

$=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\ldots,(x_3,y_3,z_3)\}$

M adalah module kiri atas ring A, sebab :

Ambil sembarang $(x_1,y_1,z_1)$ dan $(x_2,y_2,z_2)$ dalam M dan $a,b\in A$, maka dipenuhi

(i). $a\{(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\} = a(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$= (a(x_1+x_2), a(y_1+y_2), a(z_1+z_2))$

$= (ax_1+ax_2, ay_1+ay_2, az_1+az_2)$

$= (ax_1, ay_1, az_1) + (ax_2, ay_2, az_2)$

$= a(x_1, y_1, z\ ) + a(x_2, y_2, z_2)$

(ii). $(a+b)(x_1, y_1, z_1) = ((a+b)x_1, (a+b)y_1, (a+b)z_1)$

$= (ax_1 + bx_1, ay_1 + by_1, az_1 + bz_1)$

$= (ax_1, ay_1, az_1) + (bx_1, by_1, bz_1)$

$= a(x_1, y_1, z_1) + b(x_1, y_1, z_1)$

(iii). $a(b(x_1, y_1, z_1) = a(bx_1, by_1, bz_1)$

$= (abx_1, aby_1, abz_1)$

$= (ab)(x_1, y_1, z_1)$

Jadi M merupakan module kiri atas ring A.

2. Pandang Z adalah ring bilangan bulat .Misal $M_1$, $M_2$, $M_3$ adalah module-module atas ring Z, dengan $M_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $M_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $M_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Maka $M = \prod_{i \in I} M_i$

$= M_1 \times M_2 \times M_3$

$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \times \{\bar{0}, \bar{1}\} \times \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$= \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}), \ldots, (\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})\}$

Maka M ini merupakan module kiri atas ring Z, sebab : Ambil sembarang $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M$ dan $a, b \in Z$, maka dipenuhi

(i). $a((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = a(x_1, y_1, z_1) + a(x_2, y_2, z_2)$

Misal ambil $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}) \in M$ dan $4 \in Z$, maka

$4((\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}) + (\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})) = 4(\bar{2}, \bar{0}, \bar{1})$

$= (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0})$

$4(0,1,2) + 4(2,1,3) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) + (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0})$

$= (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0})$

(ii). $(a+b)(x_1, y_1, z_1) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_1, y_1, z_1)$

Misal ambil $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}) \in M$ dan $5, 6 \in Z$ , maka

$(5+6)(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}) = 11(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2})$

$= (\bar{2}, \bar{1}, \bar{2})$

$5(\bar{1},\bar{1},\bar{2})+6(\bar{1},\bar{1},\bar{2})=(\bar{2},\bar{1},\bar{2})+(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$

$=(\bar{2},\bar{1},\bar{2})$

(iii). $a(b(x_1,y_1,z_1)) = (ab)(x_1,y_1,z_1)$

Misal ambil $(1,0,2)\in M$ dan $5,6\in Z$, maka

$5(6(\bar{1},\bar{0},\bar{2})) = 5(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$

$= (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$

$(5.6)(\bar{1},\bar{0},\bar{2}) = 30\ (\bar{1},\bar{0},\bar{2})$

Jadi M module kiri atas ring Z, dan karena Z ring yang komutatif, maka M adalah merupakan module atas ring Z.

**Definisi 3.1.2**

Untuk setiap $k\in I$, pemetaan $p_k : M=\prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_k$ dengan $p_k((x_i)_{i\in I}) = x_k$, disebut proyeksi alam onto $M_k$. $P_k$ pasti merupakan suatu epimorphisma.

Contoh 4.2

1. Misal $M_1=\{\bar{0},\bar{1}\}$ dan $M_2=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ module-module atas ring bilangan bulat Z.

$M = \prod_{i\in I} M_i$

$= M_1 \times M_2$

$= \{\bar{0},\bar{1}\} \times \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$

$=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),\ldots,(\bar{1},\bar{2})\}$

Maka $p_1 : M \longrightarrow M_1$, dengan definisi $p_1((x_i)_{i\in I}) = x_1 \in M_1$, $\forall (x_i)_{i\in I} \in M$ merupakan proyeksi alam dari M onto $M_1$.

Misal $(\bar{0},\bar{1})\in M$ oleh $p_1$ dipetakan ke $p_1((\bar{0},\bar{1})) = \bar{0}\in M_1$.

$(\bar{1},\bar{0})\in M$ oleh $p_1$ dipetakan ke $p_1((\bar{1},\bar{0})) = \bar{1}\in M_2$.

Untuk lebih jelasnya perhatikan diagram di bawah ini.

$$M \xrightarrow{p_1} M_1$$

| $M$ | $M_1$ |
|---|---|
| $(\bar{0},\bar{0})$ | $\bar{0}$ |
| $(\bar{0},\bar{1})$ | $\bar{1}$ |
| $(\bar{0},\bar{2})$ | |
| $(\bar{1},\bar{0})$ | |
| $(\bar{1},\bar{1})$ | |
| $(\bar{1},\bar{2})$ | |

Begitu juga untuk $p_2 : M \longrightarrow M_2$, dengan definisi $p_2((x_i)_{i\in I}) = x_2 \in M_2$ .

$$M \xrightarrow{p_2} M_2$$

| $M$ | $M_2$ |
|---|---|
| $(\bar{0},\bar{0})$ | $\bar{0}$ |
| $(\bar{0},\bar{1})$ | $\bar{1}$ |
| $(\bar{0},\bar{2})$ | $\bar{2}$ |
| $(\bar{1},\bar{0})$ | |
| $(\bar{1},\bar{1})$ | |
| $(\bar{1},\bar{2})$ | |

Jadi tampak bahwa $p_k : (x_i)_{i\in I} \in M \longrightarrow x_k \in M$ , $\forall k \in I$, adalah suatu epimorphisma.

**Definisi 3.1.3**

Untuk setiap $k \in I$ pemetaan $j_k : M_k \longrightarrow M$ dengan definisi $j_k(x_k) = (x_i)_{i \in I}$ dengan $x_i = 0$ $\forall$ $x_i = x_k$ dan $x_i = x_k$ $\forall i = k$, disebut injeksi alam dari M into $M_k$.

Contoh 3.3

1. Misal seperti pada contoh 4.2, maka

$J_1 : M_1 \longrightarrow M$ dengan $j_1(x_1) = (x_i)_{i \in I}$ di mana $x_i = 0$ $\forall i = 1$ dan $x_i = x_k$ $\forall i = 1$, merupakan injeksi alam dari $M_1$ into M.

Misal ambil $\bar{0} \in M1$, maka $j_1(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$

ambil $\bar{1} \in M_1$, maka $j_1(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})$

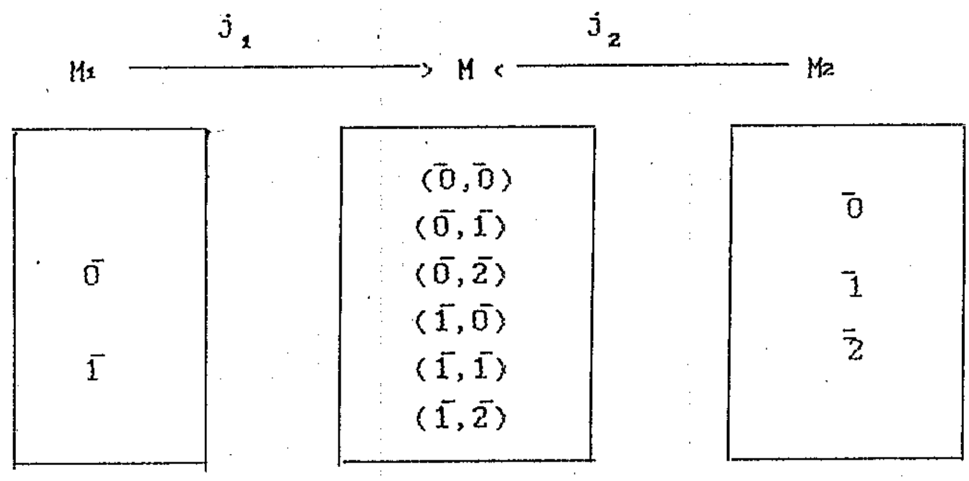
Begitu juga untuk $j_2 : M_2 \longrightarrow M$ dengan $j_2(x_2) = (x_i)_{i \in I}$ di mana $x_i = 0$ $\forall i = 2$ dan $x_i = x_2$ $\forall$ $i = 2$.

Misal ambil $\bar{0} \in M_2$, maka $j_2(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$

ambil $\bar{1} \in M_2$, maka $j_2(\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$

ambil $\bar{2} \in M_2$, maka $j_2(\bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$

Perhatikan diagram di bawah ini.



Definisi 3.1.4

Proyeksi alam dan injeksi alam mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

(i). $p_i \circ j_i = M_i$ ( Merupakan pemetaan identitas pada $M_i$ ).

(ii). $p_i \circ j_k = 0$ ( Pemetaan Nol), $\forall i,k \in I$ dan $i=k$.

Contoh 3.4

1. Dengan melihat pada contoh 4.3 dan 4.2, maka

Ambil $\bar{1} \in M_1$ , $i=1$, maka

$$p_1 \circ j_1(\bar{1}) = p_1(j_1(\bar{1}))$$
$$= p_1(\bar{1},\bar{0})$$
$$= \bar{1}$$

Jadi $p_1 \circ j_1 \ (\bar{1}) = \bar{1}$ . Artinya untuk $\bar{1} \in M_1$ oleh $p_1 \circ j_1$ dipetakan kembali ke $\bar{1} \in M_1$ .

Ambil $i=2$ dan $\bar{2} \in M_2$ , maka

$$p_2 \circ j_2(\bar{2}) = p_2(j_2(\bar{2}))$$
$$= p_2(\bar{0},\bar{2})$$
$$= \bar{2} \in M_2 .$$

Sekarang ambil $i=1$, $k=2$ dan $\bar{2} \in M_2$ , maka

$$p_1 \circ j_2(\bar{2}) = p_1(j_2(\bar{2}))$$
$$= p_1(\bar{0},\bar{2})$$
$$= \bar{0} \text{ , merupakan pemetaan nol.}$$

Theorema 3.1.1

Pandang $M = \prod_{i \in I} M_i$ pergandaan Cartesian dari keluarga $(M_i)_{i \in I}$, dan $p_i : M \longrightarrow M_i$ , proyeksi alam dari M into Mi.

Jika N adalah module atas ring A dan $q_i : N \longrightarrow M_i$

untuk setiap $i \in I$ adalah homomorphisma, maka terdapat dengan tunggal homomorphisma $f : N \longrightarrow M$ sedemikian hingga $q_i = p_i \circ f$, $\forall i \in I$.

Bukti.

Perhatikan diagram komutatif di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[drr, "q_i"'] & & M = \prod_{i \in I} M_i \\
& & M_i \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

Didefinisikan $f(x) = (q_i(x))_{i \in I}$ $\forall x \in N$. Maka $f$ merupakan homomorphisma, sebab :

Ambil sembarang $x, y \in N$ dan $a \in A$, maka

(i). $f(x+y) = (q_i(x+y))_{i \in I}$

$= (q_i(x) + q_i(y))_{i \in I}$

$= (q_i(x))_{i \in I} + (q_i(y))_{i \in I}$

$= f(x) + f(y)$

Jadi $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in N$.

(ii). $f(ax) = (q_i(ax))_{i \in I}$

$= (a\, q_i(x))_{i \in I}$

$= a\, (q_i(x))_{i \in I}$

$= a\, f(x)$

Jadi $f(ax) = a\, f(x)$, $\forall x \in N$.

Terbukti bahwa $f$ adalah suatu homomorphisma.

Sekarang dibuktikan bahwa $f$ adalah tunggal.

Misal ada homomorphisma $f' : N \longrightarrow M$ ,
sedemikian hingga $q_i = p \circ f$.

Perhatikan diagram komutatif di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, dashed, "f'"] \arrow[drr, "q_i"'] & & M \\
& & Mi \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

Jadi $p_i \circ f'(x) = q_i \ (x)$, $\forall x \in N$

$p_i \ (f'(x)) = q_i \ (x)$

Karena $p_i$ proyeksi alam, haruslah $f'(x) = (q_i \ (x))_{i \in I}$,
sehingga $p_i \ (q_i \ (x))_{i \in I} = q_i \ (x)$.
Jadi di sini terlihat bahwa definisi $f'(x) = (q_i \ (x))_{i \in I}$ $\forall x \in N$ sama dengan definisi f, sehingga $f' = f$, f tunggal.

## 3.2 SPLIT BARISAN EKSAK.

<u>Definisi 3.2.1</u>

Pandang N adalah submodule dari M dan j injeksi alam dari N into M.
Maka N disebut direct summand dari M jika terdapat homomorphisma $p : M \longrightarrow N$ sedemikian hingga $p \circ j = 1_N$ ( di mana $1_N$ adalah pemetaan identitas dari N).
Dan k pasti merupakan suatu monomorphisma.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_N"'] & M \arrow[dl, dashed, "p"] \\ N & \end{tikzcd}$$

<u>Definisi 3.2.2</u>

Pandang P adalah kwosen module dari M dan p adalah proyeksi alam dari M onto P.
Maka P disebut direct faktor dari M jika terdapat homomorphisma $k: P \longrightarrow M$ sedemikian hingga $p \circ k = 1_P$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] & P \\ & P \arrow[u, "1_P"'] \arrow[ul, dashed, "k"] \end{tikzcd}$$

Contoh 3.5

1. Pandang Z adalah ring dari bilangan bulat, $M_1=\{\bar{0},\bar{1}\}$ dan $M_2=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ adalah module-module atas ring Z.

   $M = M_1 \times M_2$

   $= \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$, adalah module atas ring Z.

   Selanjutnya perhatikan $N=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ adalah submodule dari M. Pemetaan $j:N \longrightarrow M$ dengan $j(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},\bar{y})$, $\forall(\bar{x},\bar{y})\in N$ adalah injeksi alam dari N into

M. Maka N adalah Dirrect Summand dari M.

Bukti.

Didefinisikan pemetaan $p: M \longrightarrow N$, dengan $p(\bar{x},\bar{y})=(\bar{0},\bar{y})$, $\forall(\bar{x},\bar{y})\in M$.

p adalah suatu homomorphisma, sebab ambil sembarang $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)\in M$ dan $a\in Z$, maka dipenuhi :

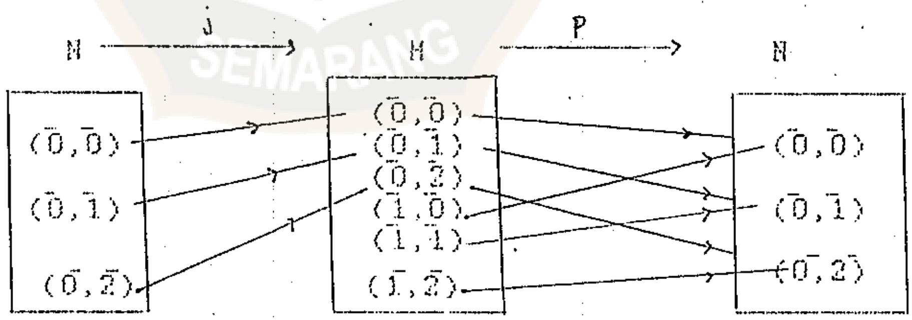
(i). $p((\bar{x}_1,\bar{y}_1)+(\bar{x}_2,\bar{y}_2)) = p(\overline{x_1+x_2},\overline{y_1+y_2})$

$$= (0,\overline{y_1+y_2})$$
$$= (0,\bar{y}_1) + (0,\bar{y}_2)$$
$$= p(\bar{x}_1,\bar{y}_1) + p(\bar{x}_2,\bar{y}_2).$$

(ii). $p(a(\bar{x}_1,\bar{y}_1)) = p(\overline{ax_1},\overline{ay_1})$

$$= (\bar{0},\overline{ay_1})$$
$$= a(\bar{0},\bar{y}_1)$$
$$= a\, p(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$$

Selanjutnya perhatikan diagram di bawah ini.




Terlihat bahwa $p\circ j = 1_N$.

Terbukti N dirrect summand dari M.

2. Pandang Z adalah ring bilangan bulat , $M=\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}=\{2k, k\in Z\}$ adalah module atas ring Z, dan $N=\{0,\pm 4,\pm 8,\pm 12,\ldots\}=\{4k, k\in Z\}$ adalah submodule dari M. Maka $P=M/N=\{\bar{0},\bar{2}\}$, yaitu bilangan bulat kelipatan 2

module 4 adalah merupakan dirrect faktor dari M.

Bukti.

Didefinisikan pemetaan $k:M/N \longrightarrow M$ dengan $k(\bar{x})=x\in M$ , $\forall \bar{x}\in M/N$, maka k merupakan suatu homomorphisdma sebab ambil sembarang $\bar{x},\bar{y}\in M/N$, dan $a\in Z$, maka :

(i). $k(\bar{x} + \bar{y}) = k(\overline{x+y})$

$= x+y$

$= k(\bar{x}) + k(\bar{y})$

Jadi $k(\bar{x} + \bar{y}) = k(\bar{x}) + k(\bar{y})$, $\forall \bar{x},\bar{y}\in M/N$

(ii). $k(a\ \bar{x}) = k(\overline{ax})$

$= ax$

$= a\ k(\bar{x})$

Jadi $k(a\bar{x}) = a\ k(\bar{x})$, $\forall \bar{x}\in M/N$ dan $a\in Z$.

Dari sini terbukti bahwa k adalah suatu homomorphisma.

Selanjutnya perhatikan diagram komutatif di bawah ini.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p"] & M/N \\
 & M/N \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "1_{M/N}"']
\end{tikzcd}
$$

$p\circ k\ (\bar{x}) = p(k(\bar{x}))$

$= p(x)$

$= \bar{x}$ , $\forall \bar{x}\in M/N$.

Jadi $p\circ k= 1_P$

Terbukti terdapat homomorphisma k, sedemikian hingga

$p \circ k = 1_P$. $P = M/N$ adalah dirrect faktor dari M.

Definisi 3.2.3

Barisan dari module dan homomorphisma

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

Disebut barisan eksak bila $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh 3.6

1. Pandang Z adalah ring dari bilangan bulat dan M,N adalah module-module atas ring Z. Jika barisan

$$0 \xrightarrow{a} M \xrightarrow{f} N$$

adalah eksak, maka f suatu monimorphisma.

Bukti.

Karena barisanya adalah eksak, maka Im(a)= Ker(f) = 0. Dan menurut theorema 2.3.2, maka f monomorphisma.

2. Seperti pada contoh no. 1, jika barisan

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{a} 0$$

adalah eksak, maka f suatu epimorphisma.

Bukti.

Karena barisanya adalah eksak, maka Im(f) = Ker(a)= N. Jadi Im(f)= N, maka menurut theorema 2.3.1 f adalah suatu epimorphisma.

3. Sekarang pandang barisan module dan homomorphisma

$$0 \xrightarrow{a} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{b} 0$$

adalah barisan eksak bila hanya bila f adalah suatu isomorphisma.

Bukti.

Karena barisanya adalah eksak, maka Im(a)= Ker(f) dan Im(f)= Ker(b).

Im(a) = Ker(f) = 0, maka f monomorphisma.

Im(f) = Ker(b) = N, maka f epimorphisma.

Jadi terbukti bahwa f adalah isomorphisma.

Sebaliknya f adalah isomorphisma, maka f injektif dan surjektif.

f ijektif, maka Ker(f)= {0} = Im(a).

f surjektif, maka Im(f)= N = Ker(b).

Diperoleh Im(a)=Ker(f) dan Im(f)=Ker(b), barisanya adalah eksak.

Definisi 4.2.4

Barisan eksak

$$0 \xrightarrow{a} N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \xrightarrow{b} 0$$

disebut split barisan eksak bila Im(f)=Ker(g) adalah direct summand dari M.

Contoh 4.7

1. Pandang Z adalah ring dari bilangan bulat.

$M_1=\{\bar{0},\bar{1}\}$ dan $M_2=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ adalah module-module atas ring Z.

$M = M_1 \times M_2$

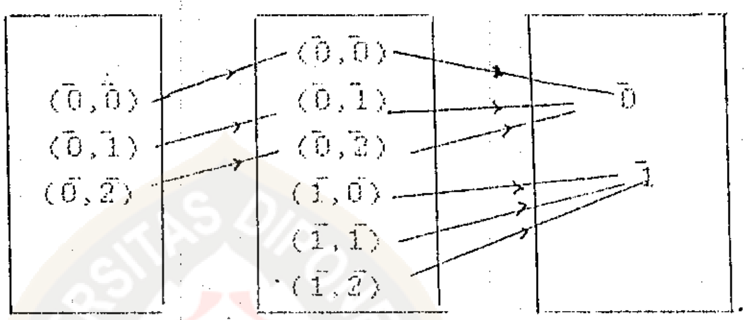
$= \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$, adalah module atas ring Z.

$N=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ adalah submodule dari M.

Didefinisikan $j:N \longrightarrow M$ dengan $j(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},\bar{y})$, $\forall(x,y)\in N$ dan $p:M \longrightarrow M_1$ dengan $p(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}, \forall(\bar{x},\bar{y})\in M$.

Maka barisan eksak

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} M \xrightarrow{p} M_1 \longrightarrow 0$$




adalah merupakan split barisan eksak.

Bukti

Karena barisanya eksak, maka Im(j)=Ker(p).

Dari diagram tampak bahwa Im(j)=Ker(p)=N. Dan menurut contoh 3.5 no 1, maka N adalah direct summand dari M. Terbukti merupakan split barisan eksak.

Theorema **3**.2.1

Pandang diagram komutatif dari module dan homomorphisma , di mana barisanya adalah eksak.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M'' \arrow[d, "u''"] \\
N' \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N''
\end{tikzcd}$$

a). Jika u',u" dan g' adalah monomorphisma , maka u juga b). Jika $u'$, $u''$ dan $f$ adalah epimorphisma, maka $u$ juga suatu epimorphisma.

c). Jika $u'$, $u''$ isomorphisma, $g'$ monomorphisma dan $f$ epimorphisma, maka $u$ adalah suatu isomorphisma.

Bukti.

a). Akan dibuktikan $u$ adalah monomorphisma ,yaitu dengan membuktikan bahwa $\ker(u)= 0$.

Ambil sembarang $x \in M$ sedemikian hingga $u(x)= 0$.

Perhatikan diagram komutatif di atas, maka $u''(f(x)) = g(u(x))$.

$u''(f(x)) = g(0)$

$= 0$ ,( sebab $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Ker}(g)$, sehingga $g(u(x))= 0$ ).

$u''$ adalah monomorphisma, akibatnya jika $u''(f(x))= 0$, maka $f(x)= 0$, sehingga $x \in \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f')$. Jadi $x=f'(x')$ untuk suatu $x' \in M'$.

Sekarang $u(f'(x')) = g'(u'(x))$, maka $u(x) = u(f'(x))$ $=g'(u'(x'))$, atau

$u(x) = g'(u'(x'))$

$0 = g'(u'(x'))$

$0 = g'(0)$ , sebab $g'$ monomorphisma.

Dari sini didapat $u'(x')= 0$, dan karena $u'$ monomorphisma, maka $x'= 0$.

Sehingga $x=f'(x')=f'(0) = 0$, jadi $x= 0$.

Terbukti bahwa jika $u(x)= 0$, maka $x=0$, $u$ monomorphisma.

b). Untuk membuktikan bahwa $u$ epimorphisma, dengan cara membuktikan bahwa untuk setiap $y \in N$ terdapat $x \in M$ sedemikian hingga $u(x) = y$.

Kita perhatikan y ini untuk dua kemungkinan, yaitu :

(i). $y \in N$ dan $y \in Im(g')$, maka terdapat $y' \in N'$ sedemikian hingga $g'(y') = y$.

$u'$ adalah suatu epimorphisma, maka ada $x' \in M'$ sedemikian hingga $u'(x') = y'$.

Sekarang perhatikan diagram komutatif di atas, yaitu

$$g'(u'(x') = u(f'(x'))$$

$$g'(y') \quad = u(f'(x'))$$

$$y \quad = u(f'(x'))$$

Padahal $f'(x') \in Im(f') \quad M$. Jadi terdapat $x \in M$ sedemikian hingga $x = f'(x')$.

Jadi $u(f'(x')) = y$

$$u\ (x) \quad = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

untuk setiap $y \in N$ di mana $y \in Im(g')$, maka terdapat $x \in M$ sedemikian hingga $u(x) = y$.

(ii). $y \in N$ dan $y \notin Im(g')$.

Maka $y \notin Ker(g)$ dan $g(y) = y'' \neq 0$. Karena $u''$ adalah epimorphisma, maka terdapat $x'' \in M''$ sedemikian hingga $u''(x'') = y''$. Dan karena f epimorphisma, maka ada $x \in M$ sedemikian hingga $f(x) = x''$.

Jadi $u''(f(x)) = g(u(x))$

$$= g(y)$$

$$= y''.$$

Kita perhatikan $g(u(x)) = g(y)$

$$g(u(x)) - g(y) = 0$$

$g(u(x) - y) = 0$ (sebab g homomorphisma).

Berarti $u(x)-y \in Ker(g)=Im(g')$, jadi $u(x)-y \in Im(g')$, dan menurut (1), maka terdapat $m \in M$ sedemikian hingga $u(m)=u(x)-y$.

$u(m) - u(x) = -y$

$u(x) - u(m) = y$

$u(x-m) = y$.

Jadi dari sini tampak bahwa untuk $y \in N$ dan $y \notin Im(g')$ terdapat $(x-m) \in M$ sedemikian hingga $u(x-m) = y$.

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa u adalah epimorphisma.

c). Dari a) dan b) dapat dibuktikan u isomorphisma.

Theorema 3.2.2

Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen :

(1). N adalah dirrect summand dari M dan barisan eksak

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\psi} M/N \longrightarrow 0$$

adalah split ( di mana j injeksi alam dari N into M dan $\psi$ proyeksi alam dari M onto M/N ).

(2). Kwosen module M/N adalah dirrect faktor dari M.

(3). Terdapat suatu isomorphisma $u: M \longrightarrow N \oplus M/N$ sedemikian hingga $u \circ j$ adalah injeksi alam dari N into $N \oplus M/N$ dan $\psi \circ u^{-1}$ proyeksi alam dari $N \oplus M/N$ onto $M/N$

Bukti.

$(1 \longrightarrow 3)$

Perhatikan diagram komutatif dari barisan module dan homomorphisma di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[d, "1_N"'] & M \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift right, "u"'] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "1_{M/N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j'"] & N \oplus M/N \arrow[r, "\psi'"] \arrow[u, shift right, "u^{-1}"'] & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$N$ adalah direct summand dari $M$, jadi terdapat epimorphisma $p: M \longrightarrow N$ sedemikian hingga $p \circ j = 1_N$. Didefinisikan pemetaan $u: M \longrightarrow N \oplus M/N$ yang memenuhi $u(x) = (p(x), \bar{x})$, $\forall x \in M$, maka $u$ adalah suatu homomorphisma, sebab untuk setiap $x, y \in M$ dan $a \in A$ dipenuhi :

(i). $u(x+y) = (p(x+y), \overline{x+y})$

$= (p(x)+p(y), \bar{x}+\bar{y})$

$= (p(x), \bar{x}) + (p(y), \bar{y})$

$= u(x) + u(y)$

(ii). $u(ax) = (p(ax), \overline{ax})$

$= (a\, p(x), a\bar{x})$

$= a\, (p(x), \bar{x})$

$= a\, u(x)$

Jadi $u$ adalah suatu homomorphisma, dan dengan menggunakan theorema 3.2.1 didapat $u$ isomorphisma.

(3 ⟶ 1).

$u: M \longrightarrow N \oplus M/N$ suatu isomorphisma sedemikian hingga $u.j$ merupakan injeksi alam dari $N$ into $N \oplus M/N$ dan $\psi.u^{-1}$ adalah proyeksi alam dari $N \oplus M/N$ onto $M/N$. Perhatikan diagram komutatif di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[dr, shift right, "p"'] & N \oplus M/N \arrow[l, shift left, "u^{-1}"] \\
 & N \arrow[u, "u\circ j"'] \arrow[ul, shift right, "j"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dengan}\quad u^{-1}\circ u\circ j &= p^{-1}\\
(u^{-1}\circ(u\circ J)) &= p^{-1}\\
u^{-1}(\ uj\ ) &= p^{-1}\\
j &= p^{-1}\\
(p\circ J) &= p\circ p^{-1}\\
p\circ j &= 1_N
\end{aligned}$$

Jadi terdapat homomorphisma $p$ sedemikian hingga $p\circ j=1_N$, sehingga N adalah direct summand dari M. Akibatnya barisanya adalah merupakan split barisan eksak.

$(2 \longrightarrow 3)$.

M/N adalah direct faktor dari M, jadi terdapat homomorphisma $k: M/N \longrightarrow M$, sedemikian hingga $p\circ k= 1_{M/N}$.

Dan k ini suatu monomorphisma.

Didefinisikan pemetaan $t: N \oplus M/N \longrightarrow M$ dengan $t(x,\bar{y}) = x+k(\bar{y})$, $\forall x\in N$ dan $\bar{y}\in M/N$. Maka t adalah suatu homomorphisma sebab untuk setiap $x_1,x_2\in N$ dan $\bar{y}_1,\bar{y}_2\in M/N$, berlaku :

$$\begin{aligned}
\text{(i).}\ t((x_1,\bar{y}_1)+(x_2,\bar{y}_2)) &= t((x_1+x_1),(\bar{y}_2+\bar{y}_2))\\
&= (x_1+x_2) + k(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\\
&= (x_1+ k(\bar{y}_1)) + (x_2+k(\bar{y})_2)
\end{aligned}$$

$$= (x_1 + x_2) + k(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$$
$$= (x_1 + k(\bar{y}_1)) + (x_2 + k(\bar{y})_2)$$
$$= t(x_1, \bar{y}_1) + t(x_2, \bar{y}_2)$$

(ii). $t(a(x_1, \bar{y}_1)) = t(ax_1, a\bar{y}_1)$
$$= ax_1 + k(a\bar{y}_1)$$
$$= ax_1 + a\, k(\bar{y}_1)$$
$$= a\,(x_1 + k(\bar{y}_1))$$
$$= a\, t(x_1, \bar{y}_1)$$

Jadi t adalah homomorphisma.

Selanjutnya perhatikan diagram komutatif di bawah ini :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "1_N"'] & N + M/N \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "t"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "1_{M/N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & M \arrow[r, "p"] & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dari theorema 3.2.1, dapat dibuktikan bahwa t adalah isomorphisma.

(3 ⟶ 2).

Perhatikan diagram komutatif di bawah ini.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[dr, shift left, "p"] & N + M/N \arrow[l, shift left, "u^{-1}"] \arrow[d, "p \cdot u^{-1}"] \\
 & M/N \arrow[ul, shift left, "k"]
\end{tikzcd}$$

$u: M \longrightarrow N + M/N$ adalah suatu isomorphisma sedemikian hingga $p \circ u^{-1}$ adalah proyeksi alamdari $N + M/N$

onto $M/N$. Maka terdapat homomorphisma $k: M/N \longrightarrow N$ sedemikian hingga

$$u \circ k = u \circ p^{-1}$$
$$u(k) = u(p^{-1})$$
$$k = p^{-1}$$
$$p \circ k = p \circ p^{-1}$$
$$p \circ k = 1_{M/N}$$

Jadi $M/N$ adalah dirrect faktor dari M.

Bukti lengkap.

## 3.3 GRUP HOMOMORPHISMA

**Definisi 3.3.1**

Pandang A adalah suatu ring dan $M, M'$ adalah module-module atas ring A.

Himpunan semua homomorphisma dari M ke $M'$ ditulis dengan $\mathrm{Hom}(M, M')$ .

**Definisi 3.3.2**

Pandang A adalah suatu ring dan $M, M'$ adalah module-module atas ring A. P adalah sembarang module atas ring A .Kemudian setiap homomorphisma $f \in \mathrm{Hom}(M, M')$ dihubungkan dengan $f^* : \mathrm{Hom}(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M')$ didefinisikan dengan $f^*(g) = f \circ g$, $\forall p \in \mathrm{Hom}(P, M)$.

Pemetaan $f^*$ ini merupakan suatu homomorphisma dari $\mathrm{Hom}(P, M)$ ke $\mathrm{Hom}(P, M')$, jelas karena :

(i). $f^*(g_1 + g_2)(x) = f \circ (g_1 + g_2)(x)$

$$= f \circ (g_1(x) + g_2(x))$$
$$= f(g_1(x)) + f(g_2(x))$$

$= (f \circ g_1 + f \circ g_2)\ (x)$

$= (f^*(g_1) + f^*(g_2))\ (x)$

(ii). $f^*(a\ g_1)(x) \quad = f \circ (a\ g_1(x))$

$= a\ f(g_1(x))$

$= a\ f^*(g_1)\ (x)$

Contoh 3.8

1. Pandang Z adalah ring bilangan bulat dan M,N,P adalah module-module atas ring Z, dengan $M=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$, $N=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ dan $P=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$.

Didefinisikan $g\ (x)=2x$, $g\ (x)=3x\ \forall x\in P$, di mana $g\ ,g$ elemen Hom(P,MO, dan $f(x)=2x \in Hom(M,N)$, Maka pemetaan $f^*$ merupakan homomorphisma dari Hom(P,M) ke Hom(P,N).

Bukti.

(i). $f^*(g_1+g_2)\ (x) = f^*\ (g_1(x) + g_2(x))$

$= f \circ\ (g_1(x) + g_2(x))$

$= f(g_1(x) + g_2(x))$

$= f(\ 2x + 3x)$ , ambil $x=\bar{2}\in P$

$= f(2.\bar{2} + 3.\bar{2})$

$= f(\bar{0} + \bar{2})$

$= f(\bar{2})$

$= 2.\bar{2}$

$= \bar{4}$

$(f^*(g_1)+f^*(g_2))(x) = (f \circ g_1 + f \circ g_2)\ (x)$

$= f \circ g_1(x) + f \circ g_2(x)$

$= f(g_1(x)) + f(g_2(x))$ , $x=\bar{2}\in P$

$= f(g_1(\bar{2})) + f(g_2(\bar{2}))$

$= f(2.\bar{2}) + f(3.\bar{2})$

$= f(\bar{0}) + f(\bar{2})$

$= 2.\bar{0} + 2.\bar{2}$

$= \bar{4}$

Didapat $f^*(g_1 + g_2)(x) = (f^*g_1 + f^*g_2)(x)\ \forall x \in M$.

(ii). $f^*(a\ g_1)(x) = f \circ (a\ g_1)(x)$

$= f(a\ g_1(x))$ ,ambil $a = 3 \in Z$ dan $x = 2 \in P$

$= f(3\ g_1(\bar{2}))$

$= f(3\ (2.\bar{2}))$

$= f(3(\bar{0}))$

$= f(\bar{0})$

$= \bar{0}$

$a\ f^*(g_1)(x) = a\ f(g_1(x))$

$= 3\ f(2.\bar{2})$

$= 3\ (\bar{0})$

$= \bar{0}$

Didapat $f^*(a\ g_1)(x) = a\ f^*(g_1)(x)$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $f^*$ merupakan suatu homomorphisma.

**Theorema 3.3.1**

Pandang A adalah suatu ring, kemudian L,M,N adalah module-module atas ring A . Jika $f: L \longrightarrow M$ dan $g: M \longrightarrow N$ suatu homomorphisma, maka $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$

Bukti.

Ambil $f_1 \in Hom(P,L)$ ,$f \in Hom(L,M0$ dan $g \in Hom(M,N)$, maka

$(g \circ f)^*(f_1)(x) = (g \circ f) \circ f_1(x)$

$= (g\circ f)(f_1(x))$

$= g^*(f(f_1(x))$

$= g^*(f\circ f_1(x))$

$= g^*(f^*(f_1(x))$

$= (g^*\circ f^*)\ f_1(x)$

Jadi terbukti $(g\circ f)^* = g^*\circ f^*$.

Contoh 3.9

1. Ambil Z adalah ring bilangan bulat dan L,M,N,P adalah module-module atas ring Z dengan $L=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$, $M=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$, $N=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ dan $P=\{\bar{0},\bar{1}\}$

Didefinisikan $f:L \longrightarrow M$ dengan $f(x)=2x\in Hom(L,M)$, $g: M \longrightarrow N$ dengan $g(x)=4x \in Hom(M,N)$ dan ambil $f_1(x)=3x \in Hom(P,L)$, maka :

$(g\circ f)^*(f_1(x)) = (g\circ f)\circ f_1(x)$

$= (g\circ f)(f_1(x))$ , ambil $x=\bar{1}\in P$.

$= (g\circ f)(3.\bar{1})$

$= (g\circ f)(\bar{0})$

$= g(f(\bar{0}))$

$= g(\bar{0})$

$= \bar{0}$

$(g^*\circ f^*)(f_1(x))= (g^*\circ f^*)(3.\bar{1})$

$= g^*\circ f^*\ (\bar{0})$

$= g^*(f^*(\bar{0}))$

$= g^*(f(\bar{0}))$

$= g(\bar{0})\ \ = \bar{0}$

Jadi tampakbahwa $(g\circ f)^*(f_1(x)) = (g^*\circ f^*)(f_1(x))$

**Theorema 3.3.2**

Jika A adalah suatu ring dan L,M,N,P adalah module-module atas ring A dan

$$0 \xrightarrow{a} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

adalah barisan eksak, maka

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f*} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g*} \mathrm{Hom}(P,N)$$

juga merupakan barisan eksak.

Bukti.

Pandang diagram dari barisan eksak di bawah ini.

$$0 \xrightarrow{a} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$ , maka

Im(a)= Ker(f), padahal Im(a)= 0 sehingga Ker(f)=0, maka f adalah monomorphisma.

Selanjutnya dibuktikan :

(i). Ker(f*) = 0.

(ii). Im(f*) ⊆ Ker(g*).

(iii).Ker(g*) ⊆ Im(f*).

Bukti.

(i). Jika f*(p) = f∘p = 0, maka haruslah p= 0, sebab f adalah monomorphisma. Sehingga jika f*(p) = 0, maka p=0. Jadi Ker(f*) = 0.

(ii). Im(f*) ⊆ Ker(g*).

Jelas bahwa f*(p)∈Im(f*) .............(1).

Karena barisanya adalah eksak, maka Im(f)=Ker(g). Ambil

$a \in Im(f)$, maka $f(x) = a$ untuk suatu $x \in L$. Dan $a \in Ker(g)$, maka $g(a) = 0$, sehingga :

$g((f(x)) = 0$

$(g \circ f)(x) = 0.$

$g \circ f = 0.$

Sedang $g^*(f^*(p)) = g^* \circ f^*(p)$

$= (g \circ f)^*(p)$

$= g \circ f \circ p = 0.$

Jadi $f^*(p) \in Ker(g^*)$ .....................(2)

Dari (1) dan (2) didapat $f^*(p) \in Im(f^*) \Longrightarrow f^*(p) \in Ker(g^*)$, atau $Im(f^*) \subseteq Ker(g^*)$.

(ii). $Ker(g^*) \subseteq Im(f^*)$.

Ambil sembarang $q \in Ker(g^*)$, perhatikan diagram komutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \\ & & P \arrow[ul, "p"] \arrow[u, "q"'] & \end{tikzcd}$$

maka $g^*(q) = 0$, atau

$g^*(q(x)) = 0, \forall x \in P.$

$g^*(q(x)) = g \circ q(x)$

$= g(q(x))$

$= 0$, sehingga $q(x) \in Ker(g)$ atau $Im(q) \subseteq Ker(g)$.

Padahal $Ker(g) = Im(f)$, sehingga $Im(q) \subseteq Im(f)$, artinya untuk setiap $x \in P$ terdapat $y \in L$ sedemikian hingga $q(x) = f(y)$.

Karena f monomorphisma, maka elemen y ini adalah tunggal.

Didefinisikan pemetaan $p: P \longrightarrow L$, $\forall x \in P$ dengan $p(x) = y$, untuk $y \in L$.

p adalah suatu homomorphisma, sebab ambil $q(x_1) = f(y_1)$ dan $q(x_2) = f(y_2)$, maka :

(i). $q(x_1) + q(x_2) = f(y_1) + f(y_2)$

$\quad q(x_1 + x_2) = f(y_1 + y_2)$

Jadi $p(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

$\qquad = p(x_1) + p(x_2)$

(ii). $a\, q(x_1) = a\, f(y_1)$

$\quad q(ax_1) = f(ay_1)$

Jadi $p(ax_1) = a\, y_1$

$\qquad = a\, p(x_1)$

Terbukti p suatu homomorphisma.

Sekarang $f^*(p) = f \circ p = q$ ( lihat gambar), maka

$(f \circ p)(x) = f(p(x))$ , $\forall x \in P$

$\qquad = f(y)$

$\qquad = q(x)$

Jadi $f \circ p = q$ dan $f^*(p) = q$, ini berarti bahwa $q \in Im(f^*)$.

Padahal diketahui $q \in Ker(g^*)$, jadi jika $q \in Ker(g^*)$, maka $q \in Im(f^*)$, atau $Ker(g^*)$  $Im(f^*)$.

Dari (ii) dan (iii) maka terbukti bahwa $Im(f^*) = Ker(g^*)$.

Dari sini terbukti bahwa barisan

$$0 \xrightarrow{a^*} Hom(P,L) \xrightarrow{f^*} Hom(P,M) \xrightarrow{g^*} Hom(P,N)$$

adalah barisan eksak.

<u>Theorema 3.3.3</u>

Jika A suatu ring dan L,M,N module-module dari A dan barisan

$$0 \xrightarrow{a} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{b} 0$$

adalah split barisan eksak, maka

$$0 \xrightarrow{a^*} \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(P,N) \xrightarrow{b^*} 0$$

merupakan split barisan eksak, di mana P adalah module atas ring A.

Bukti.

Pandang barisan eksak.

$$0 \xrightarrow{a} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{b} 0$$

adalah split. Maka dipenuhi Im(f)=Ker(g) adalah Dirrect Summand dari M. Atau Im(f)=Ker(g) adalah submodule dari M, dan untuk injeksi alam $j:\mathrm{Im}(f) \longrightarrow M$ terdapat homomorphisma $p:M \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ sedemikian hingga $p \circ j = 1_{\mathrm{Im}(f)}$.

Selanjutnya pandang barisan eksak

$$0 \xrightarrow{a^*} \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(P,N) \xrightarrow{b^*} 0$$

Akan dibuktikan bahwa Im(f*)=Ker(g*) adalah Dirrect Sammand dari Hom(P,M).

Jelas bahwa $\mathrm{Im}(f^*)=\mathrm{Ker}(g^*) \subseteq \mathrm{Hom}(P,M)$.

Kemudian ambil sembarang $q_1, q_2 \in \mathrm{Im}(f^*)$ dan $a \in A$, maka terdapat $p_1, p_2 \in \mathrm{Hom}(P,L)$ sedemikian hingga $f^*(p_1)=q_1$ dan $f^*(p_2)=q_2$ dan dipenuhi :

(i). $q_1 - q_2 = f^*(p_1) - f^*(p_2)$

$= f^*(p_1 - p_2)$

Dan $f^*(p_1 - p_2) \in \mathrm{Im}(f^*)$, sehingga $q_1 - q_2 \in \mathrm{Im}(f^*)$.

Jadi $q_1, q_2 \in \mathrm{Im}(f^*) \Longrightarrow q_1 - q_2 \in \mathrm{Im}(f^*)$, $\forall q_1, q_2 \in \mathrm{Im}(f^*)$.

(ii). $aq_1 = a\ f^*(p_1)$

$= f^*(aq_1) \in Im(f^*)$.

Jadi $a \in A$ dan $q_1 \in Im(f^*) \Longrightarrow aq_1 \in Im(f^*)$, $\forall a \in A$ dan $q_1 \in Im(f^*)$.

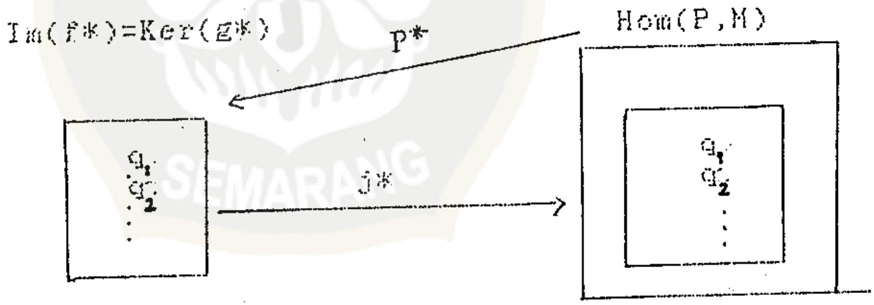
Terbukti bahwa $Im(f^*)=Ker(g^*)$ adalah submodule dari $Hom(P,M)$.

Selanjutnya tinggal membuktikan bahwa $Im(f^*)= Ker(g^*)$ adalah Dirrect Summand dari $Hom(P,M)$.

Pemetaan $j:Im(f^*)=Ker(g^*) \longrightarrow Hom(P,M)$ didefinisikan dengan $j(q)=q$, $\forall q \in Im(f^*)$ adalah injeksi alam dari $Im(f^*)$ into $Hom(P,M)$.

Maka terdapat pemetaan $p^*:Hom(P,M) \longrightarrow Im(f^*)$, sedemikian hingga $p^* \circ j^* = 1_{Im(f^*)}$.

Perhatikan diagram di bawah ini.




Jadi terdapat homomorphisma $p^*:Hom(P,M) \longrightarrow Im(f^*)$, sedemikian hingga $p^* \circ j^* = 1_{Im(f^*)}$.

Terbukti $Im(f^*)=Ker(g^*)$ adalah Dirrect Summand dari $Hom(P,M)$. Jadi barisanya adalah split barisan eksak.