BAB IV
ANALISA VARIANSI MODEL II
PENGARUH RANDOM

Dalam penelitian sering taraffaktor dari masing-masing faktor yang dipelajari merupakan sampel saja, sehingga pengaruh faktor dan interaksi faktor-faktornya merupakan variabel random. Misalnya diantara faktor- faktornya tersebut adalah Umur dan Jenis sekolahan. Terdapat 12 kelompok umur dan 50 jenis sekolahan. Dipilih 3 kelompok umur dan 5 jenis sekolahan dan diamati sampel (katakanlah siswa) dalam 3 kelompok umur dari ke-5 jenis sekolahan tersebut. Sebagai ukuran pengamatan (identifikasi dari respon) bisa berupa nilai ujian, penggunaan uang untuk buku bacaan dan sebagainya. Hasil atau kesimpulan dari penelitian ini dipikirkan berlaku untuk ke-50 jenis sekolahan dalam 12 kelompok umur.

Alternatif digunakan model ini adalah, taraffaktor dari semua faktor yang dipelajari terlalu banyak, sehingga jika seluruh tarafnya dimasukkan dalam pengamatan akan terlalu komplek. Oleh karena itu diambil sampelnya saja.

4.1. Model Analisa Variansi

Model analisa variansi untuk pengaruh random secara simbolik sama dengan model I, Pengaruh tetap, tetapi komponen-komponen pengaruh faktor dan interaksi faktor merupakan variabel random, bukan suatu konstanta. Model II, Pengaruh random, ini diberikan sebagai berikut :

$$Y_{i_1 \cdots i_n l} =$$

$$\mu_{(n,\cdot)} + \left\{ (\alpha_1)_{i_1} + \cdots + (\alpha_n)_{i_n} \right\} + \left\{ (\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n} \right\} + \left\{ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{i_1 i_2 i_3} \right.$$

$$\left. + \cdots + (\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-2} i_{n-1} i_n} \right\} + \cdots +$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_2)_{i_1 \cdots i_2} + \varepsilon_{i_1 \cdots i_n l} \quad \ldots\ldots (4.1.1)$$

dimana,

$\mu_{(n,\cdot)}$ merupakan konstanta,

$(\alpha_t)_{i_t}$, $t=1,\ldots,n$ merupakan variabel random normal independen dengan harga harapan nol dan variansi $\sigma^2_{\alpha_t}$.

$(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}$, $t1,t2=1,2\ldots n$, $t1<t2$ merupakan variabel random dengan harga harapan nol dan variansi $\sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}}$

dan sebagainya.

$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n l}$ merupakan variabel random normal independen dengan harga harapan nol dan variansi σ^2.

Dalam model II, Pengaruh random, perhitungan untuk Jumlah kuadrat, derajad kebebasan serta Rata-rata kuadrat identik dengan model I, Pengaruh tetap. Sehingga rumus-rumus yang bersesuaian dapat digunkan untuk model II. Perbedaan dengan model I adalah terdapat dalam harga harapan rata-rata kuadrat dan prosedur pengujian yang digunakan. Oleh karena itu dalam bab ini hanya akan di bahas dua topik tersebut.

4.2. Harga Harapan Dan Rata-rata Kuadrat

Seperti dalam model I, harga harapan rata-rata kuadrat sesatan adalah, $E(MSE) = \sigma^2$,

Harga harapan rata-rata kuadrat pengaruh faktor A_t $(t=1,2,\ldots n)$, dicari sebagai berikut :

$$E(MSA_t) = \frac{K.m}{a_t.(a_t-1)} \; E \sum_{i_t} \left(\overline{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \overline{Y}_{(n.).} \right)^2$$

dimana,

$$\overline{Y}_{\ldots i_t \ldots} = \frac{1}{K.m / a_t} \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} Y_{i_1 \ldots i_n l}$$

$$\overline{Y}_{(n\ .)} = \frac{1}{K.m} \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} Y_{i_1 \ldots i_n l}$$

Dengan persamaan (4.1.1) diperoleh,

$$E(MSA_t)$$

$$= \frac{K.m}{a_t.(a_t-1)} \; E \sum_{i=1}^{a_t} (P - Q)^2$$

dengan,

$$P - Q$$

$$= \left\{ (\alpha_t)_{i_t} - \frac{\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t}}{a_t} \right\} +$$

$$\left[\left\{ \frac{\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1} - \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1.a_t} \right\} + \ldots\ldots\ldots + \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{\sum_{i_n} (\alpha_t\alpha_n)_{i_t i_n}}{a_n} - \frac{\sum_{i_t} \sum_{i_n} (\alpha_t\alpha_n)_{i_t i_n}}{a_t.a_n} \right\} \right] + \ldots\ldots\ldots +$$

$(\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n,.)})$.

Karena harga harapan perkalian silang suku-suku ruas kanan persamaan di atas berharga nol, maka diperoleh,

$E(MSA_t) =$

$$= \frac{K.m}{a_t.(a_t-1)} \left[E \sum_{i} \left\{ (\alpha_t)_{i_t} - \frac{\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t}}{a_t} \right\}^2 + \right.$$

$$\left[E \sum_{i_t=1}^{a_t} \left\{ \frac{\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1} - \frac{\sum_{i_1}\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1.a_t} \right\}^2 + \ldots\ldots + \right.$$

$$E \sum_{i_t=1}^{a_t} \left\{ \frac{\sum_{i_n} (\alpha_t\alpha_n)_{i_t i_n}}{a_n} - \frac{\sum_{i_t}\sum_{i_n} (\alpha_t\alpha_n)_{i_t i_n}}{a_t.a_n} \right\}^2 \Bigg] + \ldots\ldots +$$

$$\left. E \sum_{i_t=1}^{a_t} (\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n,.)})^2 \right] ,$$

dicari suku demi suku,

$$E \sum_{i_t} \left\{ (\alpha_t)_{i_t} - \frac{\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t}}{a_t} \right\}^2$$

$$= E \left\{ \sum_{i_t} (\alpha_t)^2_{i_t} - a_t . \frac{\sum_{i_t} (\alpha_t)^2_{i_t}}{a_t^2} \right\}$$

$$= (a_t - 1)\, \sigma_t^2 ,$$

$$E \sum_{i_t=1}^{a_t} \left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1} - \frac{\sum_{i_1}\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1.a_t} \right\}^2$$

$$= E \left[\sum_{i_t=1}^{a_t} \left\{ \frac{\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1} \right\}^2 - a_t \left\{ \frac{\sum_{i_1}\sum_{i_t} (\alpha_1\alpha_t)_{i_1 i_t}}{a_1.a_t} \right\}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{a_1^2} \sum_{i_t=1}^{a_t} a_1 . \sigma^2_{\alpha_1\alpha_t} - \frac{a_t}{a_1^2 . a_t^2} . a_1 . a_t . \sigma^2_{\alpha_1\alpha_t}$$

$$\frac{a_t-1}{a_1}.\sigma^2_{\alpha_1\alpha_t} ,$$

dan,

$$E\sum_{i_t=1}^{a_t}(\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t\ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n,.)})^2 = \frac{a_t(a_t-1)}{a} . \sigma^2$$

Sehingga har ga harapan rata-rata kuadrat pengaruh faktor A_t, adalah :

$$E(MSA_t) =$$

$$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_t}.\sigma^2_{\alpha_t} + \left\{\frac{K.m}{a_1.a_t}.\sigma^2_{\alpha_1\alpha_t} + \ldots + \frac{K.m}{a_t.a_n}.\sigma^2_{\alpha_t\alpha_n}\right\}$$

$$\left\{\frac{K.m}{a_1.a_2.a_t}.\sigma^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_t} + \ldots\ldots + \frac{K.m}{a_t.a_{n-1}.a_n}.\sigma^2_{\alpha_t\alpha_{n-1}\alpha_n}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots + m.\sigma^2_{\alpha_1\ldots\ldots\alpha_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots(4.2.1)$$

Untuk mencari harga harapan rata-rata kuadrat interaksi, dimulai dengan rata-rata kuadrat interaksi dua faktor, kemudian secara empiris diperoleh harga harapan dari rata-rata kuadrat interaksi lebih dari dua faktor.

Harga harapan rata-rata kuadrat interaksi dua faktor A_{t1}, A_{t2}, dimana $t_1, t_2 = 1,2,\ldots n$, $t_1 \neq t_2$, dicari sebagai berikut,

$$E(MSA_{t_1}A_{t_2}) =$$

$$\frac{K.m}{a_{t1}.a_{t2}(a_{t1}-1)(a_{t1}-1)} E\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\bar{Y}_{\ldots i_{t1}\ldots i_{t2}\ldots} -$$

$$\bar{Y}_{\ldots i_{t1}\ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2}\ldots} + \bar{Y}_{(n.).})^2.$$

dari definisi $Y_{\ldots i_{t1}\ldots i_{t2}\ldots}$, $Y_{\ldots i_{t1}\ldots}$, $Y_{\ldots i_{t2}\ldots}$ dan $Y_{(n.).}$, serta dengan persamaan (4.1.1), rata-rata yang bersesuaian adalah :

$$\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots}$$

$$= \mu_{(n\ .)} + \left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1)_{i_1}}{a_1} + \ldots + (\alpha_{t1})_{i_{t1}} + \ldots\ldots + (\alpha_{t2})_{i_{t2}} \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_n} (\alpha_n)_{i_n}}{a_n} \right\} + \left\{ \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_2} (\alpha_1 \alpha_2)_{i_1 i_2}}{a_1 . a_2} + \ldots\ldots\ldots + \right.$$

$$\frac{\sum_{i_1} (\alpha_1 \alpha_{t1})_{i_1 i_{t1}}}{a_1} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1 \alpha_{t2})_{i_1 i_{t2}}}{a_1} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$(\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_n} (\alpha_{t1} \alpha_n)_{i_{t1} i_n}}{a_n} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\left. \frac{\sum_{i_n} (\alpha_{t2} \alpha_n)_{i_{t2} i_n}}{a_n} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_{n-1}} \sum_{i_n} (\alpha_{n-1} \alpha_n)_{i_{n-1} i_n}}{a_{n-1} . a_n} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} .$$

$$\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots}$$

$$= \mu_{(n\ .)} + \left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1)_{i_1}}{a_1} + \ldots + (\alpha_{t1})_{i_{t1}} + \ldots + \frac{\sum_{i_n} (\alpha_n)_{i_n}}{a_n} \right\} +$$

$$\left\{ \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_2} (\alpha_1 \alpha_2)_{i_1 i_2}}{a_1 . a_2} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1 \alpha_{t1})_{i_1 i_{t1}}}{a_1} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. \frac{\sum_{i_n} (\alpha_{t1} \alpha_n)_{i_{t1} i_n}}{a_n} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_{n-1}} \sum_{i_n} (\alpha_{n-1} \alpha_n)_{i_{n-1} i_n}}{a_{n-1} . a_n} \right\}$$

$$+ \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \ldots} .$$

$$\bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} =$$

$$= \mu_{(n\ .)} + \left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1)_{i_1}}{a_1} + \ldots + (\alpha_{t2})_{i_{t2}} + \ldots + \frac{\sum_{i_n} (\alpha_n)_{i_n}}{a_n} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_2} (\alpha_1 \alpha_2)_{i_1 i_2}}{a_1 . a_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1 \alpha_{t2})_{i_1 i_{t2}}}{a_1} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. \frac{\sum_{i_n} (\alpha_{t2} \alpha_n)_{i_{t2} i_n}}{a_n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\sum_{i_{n-1}} \sum_{i_n} (\alpha_{n-1} \alpha_n)_{i_{n-1} i_n}}{a_{n-1} . a_n} \right\}$$

$$+ \ \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t2} \ldots} \ .$$

dan,

$Y_{(n.)}.$

$$= \mu_{(n\ .)} + \left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1)_{i_1}}{a_n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\sum_{i_n} (\alpha_n)_{i_n}}{a_n} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_2} (\alpha_1 \alpha_2)_{i_1\ i_2}}{a_1 \ . \ a_2} + \ldots\ldots + \frac{\sum_{i_{t1}} \sum_{i_{t2}} (\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1} . \ a_{t2}} \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sum_{i_{n-1}} \sum_{i_n} (\alpha_{n-1} \alpha_n)_{i_{n-1} i_n}}{a_{n-1} . \ a_n} \right\} + \ldots\ldots\ldots + \bar{\varepsilon}_{(n\ .)} .$$

Hasil komposisi,

$$\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.)}.$$

$$= \left\{ (\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}} - \frac{\sum_{i_{t1}} (\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1}} - \right.$$

$$\left. \frac{\sum_{i_{t2}} (\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t2}} + \frac{\sum_{i_{t1}} \sum_{i_{t2}} (\alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1} . a_{t2}} \right\} + \ldots\ldots +$$

$$\left[\left\{ \frac{\sum_{i_1} (\alpha_1\ \alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_1 i_{t1} i_{t2}}}{a_1} - \frac{\sum_{i_1} \sum_{i_{t1}} (\alpha_1 \alpha_{t1} \alpha_{t2})_{i_1 i_{t1} i_{t2}}}{a_1 . a_{t1}} \right. \right.$$

$$\frac{\sum_{i_1}\sum_{i_{t2}} (\alpha_1\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_1 i_{t1} i_{t2}}}{a_1 . a_{t2}} - \frac{\sum_{i_1}\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t1}} (\alpha_1\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_1 i_{t1} i_{t2}}}{a_1 . a_{t1} . a_{t2}} \Big\}$$

$$+ \ldots\ldots + \Big\{ \frac{\sum_{i_n}(\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_n)_{i_{t1} i_{t2} i_n}}{a_n} - \frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_n} (\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_n)_{i_{t1} i_{t2} i_n}}{a_n . a_{t1}}$$

$$- \frac{\sum_{i_{t2}}\sum_{i_n} (\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_n)_{i_{t1} i_{t2} i_n}}{a_n . a_{t2}} + \frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t1}}\sum_{i_n} (\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_n)_{i_{t1} i_{t2} i_n}}{a_{t1} . a_{t2} . a_n} \Big\}\Big]$$

$$+ \ldots\ldots + \left(\bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t2} \cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{(n\ .).} \right).$$

sehingga diperoleh,

$$E(MSA_{t_1} A_{t_2}) =$$

$$\frac{K.m}{a_{t1} . a_{t2} (a_{t1} - 1)\ (a_{t1} - 1)}\ E . \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \Big[\Big\{ (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}} -$$

$$\frac{\sum_{i_{t1}} (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1}} - \frac{\sum_{i_{t2}} (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t2}} +$$

$$\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1} . a_{t2}} \Big\} + \ldots\ldots + \Big\{ \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot} -$$

$$\bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t1} \cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\ldots i_{t2} \cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{(n\ .).} \Big\} \Big]^2$$

Harga harapan perkalian silang suku-suku pada ruas kanan diatas mempunyai harga nol, sehingga hanya kuadrat dari suku-suku tersebut yang diperhatikan.Dicari suku demi suku,

$$E \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \Big[\Big\{ (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}} - \frac{\sum_{i_{t1}} (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}}}{a_{t1}} -$$

$$\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}} + \frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\Bigg\}^2$$

$$= E\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\Bigg[(\alpha_{t1}\alpha_{t2})^2_{i_{t1}i_{t2}} + \left(\frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\right)^2$$

$$- 2(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}$$

$$- 2(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}$$

$$+ 2(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}$$

$$+ \frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\cdot\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}$$

$$- \frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}$$

$$- \frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\Bigg].$$

Karena,

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}[(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}$$

$$= \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\cdot\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}$$

$$= a_{t2}\cdot\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\left(\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\right)^2,$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\left[(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\right.$$

$$= a_{t1}\cdot\left(\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot}\right)^{2}$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\cdot\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}$$

$$= a_{t1}\cdot a_{t2}\cdot\left(\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\right)^{2}$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}$$

$$= a_{t1}\cdot a_{t2}\cdot\left\{\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\right\}^{2}$$

dan,

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}\cdot\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}$$

$$= a_{t1}\cdot a_{t2}\cdot\left\{\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\right\}^{2}$$

maka diperoleh,

$$E\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\left\{(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}-\frac{\sum_{i_{t1}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}}-\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}+\frac{\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t1}\cdot a_{t2}}\right\}^{2}$$

$$=E\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})^{2}_{i_{t1}i_{t2}}-a_{t2}\cdot E\cdot\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\left(\frac{\sum_{i_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}}{a_{t2}}\right)^{2}$$

$$- a_{t_1} E.\left(\frac{\sum_{i_{t_1}}\sum_{i_{t_2}}(\alpha_{t_1}\alpha_{t_2})_{i_{t_1}i_{t_2}}}{a_{t_1}.}\right)^2 +$$

$$a_{t_1}.a_{t_2}.E.\left(\frac{\sum_{i_{t_1}}\sum_{i_{t_2}}(\alpha_{t_1}\alpha_{t_2})_{i_{t_1}i_{t_2}}}{a_{t_1}.\ a_{t_2}}\right)^2$$

$$= a_{t_1}.a_{t_2}.\sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}} - a_{t_2}.\sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}} - a_{t_1}\sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}} + \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}}.$$

$$=(a_{t_1} - 1)(a_{t_2} - 1).\sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}}$$

Dan seperti telah dibicarakan didepan, bahwa

$$E\sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}}\sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}}\left(\varepsilon_{\ldots i_{t_1}\ldots i_{t_2}\ldots} - \varepsilon_{\ldots i_{t_1}\ldots} - \varepsilon_{\ldots i_{t_2}\ldots} + \varepsilon_{(n\ .).}\right)^2$$

$$= \frac{a_{t_1}a_{t_2}\ (a_{t_1} - 1)(a_{t_2} - 1)}{K.m}\ .\ \sigma^2$$

maka diperoleh harga harapan,

$E(MSA_{t_1}A_{t_2}) =$

$$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_{t_1}a_{t_2}}\ .\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}} + \left\{\frac{K.m}{a_1\ a_{t_1}a_{t_2}}\ .\ \sigma^2_{\alpha_1\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}} + \frac{K.m}{a_{t_1}a_{t_2}a_n}\ .\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\alpha_n}\right\} + \ldots\ldots + m.\sigma^2_{\alpha_1\ldots\ldots\alpha_n}$$

..................(4.2.2)

Dengan jalan yang sama dapat dicari harga harapan rata-rata kuadarat interaksi tiga fakktor, empat faktor dan seterusnya.Harga-harga harapan rata-rata kuadrat model II, Pengaruh random, termuat dalam tabel 4.2.1.

Tabel 4.2.1

Tabel 4.2.1

Rata-Rata Kuadrat	Harga Harapan
MSA_t $t=1,2,\ldots n$	$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_t.}\Sigma\sigma^2_{\alpha_t} + \left\{K.m.\frac{\sigma^2_{\alpha_1\alpha_t}}{a_1.\ a_t} + \ldots\ldots + K.m.\frac{\sigma^2_{\alpha_t\alpha_n}}{a_t.a_n}\right\} + \left\{K.m.\frac{\sigma^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_t}}{a_1.a_2.a_t} + \ldots + K.m.\frac{\sigma^2_{\alpha_t\alpha_{n-1}\alpha_n}}{a_t.a_{n-1}.a_n}\right\} + \ldots + m.\sigma^2_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$
$MSA_{t1}A_{t2}$, $t1,t2=1,2,..n$ $t1\neq t2$	$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_{t1}a_{t2}}.\sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}} + \left\{\frac{K.m}{a_1\ a_{t1}a_{t2}}.\sigma^2_{\alpha_1\alpha_{t1}\alpha_{t2}} + \ldots\ldots + \frac{K.m}{a_{t1}a_{t2}a_n}.\sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_n}\right\} + \ldots\ldots + m.\sigma^2_{\alpha_1\ldots\ldots\alpha_n}$
$MSA_{t1}A_{t2}\cdot\cdot A_{tk}$, $t1,t2,..,tk = 1,2,\ldots n$ $t1\neq t2\neq..\neq tk$	$\sigma^2 + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\ldots\alpha_{tk}}}{a_{t1}x\ldots xa_{tk}.} + \left\{\frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_1\alpha_{t1}\alpha_{t2}\ldots\alpha_{tk}}}{a_1.a_{t1}x\ldots xa_{tk}.} + \ldots + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\ldots\alpha_{tk}\alpha_n}}{a_{t1}x\ldots xa_{tk}.a_n}\right\} + \ldots\ldots + m.\sigma^2_{\alpha_1\ldots\ldots\alpha_n}$
dan seterusnya	

$MSA_{t_1}A_{t_2}..A_{t_{n-2}}$ $t_1, t_2, .., t_{n-2}$ = 1,2,.....n $t_1 \neq t_2 \neq .. \neq t_{n-2}$	$\sigma^2 + \dfrac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}...\alpha_{t_{n-2}}}}{a_{t_1}x...xa_{t_{n-2}}} +$ $\dfrac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}...\alpha_{t_{n-2}}\alpha_{t_{n-1}}}}{a_{t_1}x...xa_{t_{n-2}}.a_{t_{n-1}}} +$ $\dfrac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}...\alpha_{t_{n-2}}\alpha_{t_n}}}{a_{t_1}x...xa_{t_{n-2}}.a_{t_n}} +$ $m.\sigma^2_{\alpha_1.....\alpha_n}$
$MSA_{t_1}A_{t_2}...A_{t_{n-1}}$ $t_1, t_2, .., t_{n-1}$ = 1,2,.....n	$\sigma^2 + \dfrac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}...\alpha_{t_{n-1}}}}{a_{t_1}x...xa_{t_{n-1}}} +$ $m.\sigma^2_{\alpha_1....\alpha_n}$
$MSA_1A_2....A_n$	$\sigma^2 + m.\sigma^2_{\alpha_1.....\alpha_n}$
MSE	σ^2

4.3. Pengujian

Pengujian pada model II, Pengaruh random, berbeda dengan model I, Pengaruh tetap. Hal ini disebabkan karena harga harapan rata-rata kuadrat mempunyai suku-suku yang berbeda dengan model I. Misalnya harga harapan rata-rata kuadrat pengaruh faktor, disamping memuat suku yang mencerminkan adanya pengaruh faktor juga memuat suku-suku yang mencerminkan pengaruh interaksi faktor tersebut dengan faktor-faktor lainya. sehingga penyebut statistik F^* tidak selalu rata-rata kuadrat sesatan, SSE. Dengan demikian perlu adanya modifikasi statistik F^* sedemikian sehingga harga harapan pembilang dan penyebut sama jika Ho benar (tidak ada pengaruh faktor atau interaksi).

Uji interaksi n faktor

Untuk menguji adanya interaksi n faktor tidak berbeda dengan pada model I, karena dari harga harapan dalam tabel 4.2.1. terlihat bahwa jika tidak ada interaksi n faktor, harga harapan, $E(MSA_1 \cdots A_n)$, sama dengan $E(MSE)$. Dan jika terdapat interaksi selisih kedua harga harapan tersebut hanya merupakan suku yang mencerminkan interaksi n faktor.Tetapi hipotesis pengujiannya adalah :

$$Ho : \sigma^2_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = 0$$

$$H1 : \sigma^2_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \neq 0$$

Untuk kriteria yang lain sama dengan model I

Uji Interaksi n-1 Faktor

Uji interaksi n-1 faktor tidak bisa dilakukan seperti pada interaksi n faktor, karena harga harapan rata-rata kuadrat interaksi n-1 faktor jika tidak ada interaksi tidak sama dengan harga harapan rata-rata kuadrat sesatan.

Tetapi hal ini dapat diselesaikan yaitu dengan mengganti kedudukan MSE dengan $MSA_1 \cdots A_n$ (lihat tabel 4.2.1.). Misalnya dicari interaksi $A_{t1}, A_{t2} \ldots A_{tn-1}$. Sehingga statistik yang sesuai adalah :

$$F^* = \frac{MSA_{t1} \cdots A_{tn-1}}{MSA_1 \cdots A_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3.1)$$

Jika Ho benar (tidak ada interaksi n-1 faktor A_{t1}, A_{t2}, $\ldots A_{tn-1}$ atau $\sigma^2_{\alpha_{t1} \cdots \alpha_{tn-1}} = 0$), harga harapan, $E(MSA_{t1} \cdots A_{tn-1})$ sama dengan harga harapan, $E(MSA_1 \cdots A_n)$. Dan F^* berdistribusi,

$$F\left((a_{t1}-1)(a_{t2}-1)\ldots(a_{tn-1}-1);(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)\right)$$

dimana, $(a_{t1}-1)(a_{t2}-1)\ldots(a_{tn-1}-1)$ adalah derajad kebebasan (DK) dari $MSA_{t1} \cdots A_{tn-1}$ dan $(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)$ merupakan derajad kebebasan dari $MSA_1 \cdots A_n$. Dan kriteria lain seperti pada model I.

Uji Interaksi n-2 faktor

Untuk menguji interaksi n-2 faktor, tidak bisa langsung menentukan statistik F^* dengan membandingkan rata-rata kuadrat $MSA_{t1} \cdots A_{tn-2}$ dengan salah satu rata-rata kuadrat lainnya. Hal ini disebabkan karena tidak ada rata-rata kuadrat yang harga harapannya mempunyai komponen-komponen sama dengan harga harapan rata-rata kuadrat interaksi n-2 faktor, $E(MSA_{t1} \cdots A_{tn-2})$, jika Ho benar ($\sigma^2_{\alpha_{t1} \cdots \alpha_{tn-2}} = 0$).

Dalam keadaan demikian digunakan uji pendekatan sebagai berikut : Menentukan 2 kombinasi rata-rata kuadrat yang masing-masing sebagai pembilang dan penyebut dari statistik F^*, sedemikian sehingga jika Ho benar mempunyai harga harapan sama , dan jika Ho salah selisih harga harapan pembilang dengan penyebut merupakan suku yang menujukkan adanya interaksi n-2 faktor. Misalnya n-2 faktor tersebut adalah $A_{t1}, A_{t2}, \ldots\ldots A_{tn-2}$, statistik F^* yang sesuai adalah,

$$F^* = \frac{MSA_{t1}\cdots A_{tn-2} + MSA_1\cdots A_n}{MSA_{t1}\cdots A_{tn-1} + MSA_{t1}\cdots A_{tn-2}A_{tn}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.3.2)$$

hal ini karena, jika Ho benar ($\sigma^2_{\alpha_{t1}\cdots\alpha_{tn-2}} = 0$)

$$E(MSA_{t1}\cdots A_{tn-2} + MSA_1\cdots A_n)$$

$$= \sigma^2 + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\cdots\alpha_{tn-2}\alpha_{tn-1}}}{a_{t1}x\cdots xa_{tn-2}.a_{tn-1}} + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\cdots\alpha_{tn-2}\alpha_{tn}}}{a_{t1}x\cdots xa_{tn-2}.a_{tn}} + m.\sigma^2_{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n} + \sigma^2 + m.\sigma^2_{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n}$$

$$= \left\{\sigma^2 + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\cdots\alpha_{tn-2}\alpha_{tn-1}}}{a_{t1}x\cdots xa_{tn-2}.a_{tn-1}} + m.\sigma^2_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\right\} + \left\{\sigma^2 + \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\cdots\alpha_{tn-2}\alpha_{tn}}}{a_{t1}x\cdots xa_{tn-2}.a_{tn}} + m.\sigma^2_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\right\}$$

$$= E(MSA_{t1}\cdots A_{tn-1} + MSA_{t1}\cdots A_{tn-2}A_{tn}),$$

dan jika Ho salah

$$E(MSA_{t1}\cdots A_{tn-2} + MSA_1\cdots A_n) - E(MSA_{t1}\cdots A_{tn-1} +$$

$$MSA_{t1}\cdots A_{tn-2}A_{tn})$$

$$= \frac{K.m.\ \sigma^2_{\alpha_{t1}\alpha_{t2}\cdots\alpha_{tn-2}}}{a_{t1}x\cdots xa_{tn-2}}.$$

Sedangkan derajad kebebasan dicari dengan rumus pendekatan sebagai berikut :

" Jika kombinasi rata-rata kuadrat adalah $a_1MS_1 + a_2MS_2 + \ldots\ldots + a_rMS_r$, derajad kebebasan yang sesuai adalah :

$$DK \approx \frac{(a_1MS_1 + a_2MS_2 + \ldots\ldots + a_rMS_r)^2}{\frac{(a_1MS_1)^2}{DKMS_1} + \frac{(a_2MS_2)^2}{DKMS_2} + \ldots\ldots + \frac{(a_rMS_r)^2}{DKMS_r}} \text{ "} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.3.3)$$

Jadi derajad kebebasan yang sesuai dengan pembilang F^* adalah,

$$\frac{(MSA_{t1}\cdots A_{tn-2} + MSA_1\cdots A_n)^2}{\frac{(MSA_{t1}\cdots A_{tn-2})^2}{(a_{t1}-1)\ldots(a_{tn-2}-1)} + \frac{(MSA_1\cdots A_n)^2}{(a_1-1)\ldots(a_n-1)}}$$

dan derajad kebebasan penyebutnya adalah,

$$\frac{(MSA_{t1}\cdots A_{tn-1} + MSA_1\cdots A_{tn-2}A_{tn})^2}{\frac{(MSA_{t1}\cdots A_{tn-1})^2}{(a_{t1}-1)\ldots(a_{tn-1}-1)} + \frac{(MSA_1\cdots A_{tn-2}A_{tn})^2}{(a_1-1)\ldots(a_{tn-2}-1)(a_{tn}-1)}}$$

Jika DK pembilang disebut DK_1 dan penyebut disebut DK_2, maka F^* berdistribusi $F(DK_1;DK_2)$ jika Ho benar.Kemudian dikerjakan seperti pada model I.

Uji Interaksi s Faktor

Untuk menguji interaksi s faktor, A_{t1}, $A_{t2},\ldots.A_{ts}$

dengan memandang faktor lain adalah $A_{ts+1}, A_{ts+2}, \dots A_{ts+p}$, dimana s+p=n, kombinasi rata-rata kuadrat pembilang statistik F^* (MS_1) adalah,

$$MS_1 =$$

$$MSA_{t1} \cdots A_{ts} + (MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{ts+1} A_{ts+2} + \dots\dots\dots + MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{s+p-1} A_{s+p}) + (MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{ts+1} A_{ts+2} A_{ts+3} A_{ts+4} + \dots\dots + MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{s+p-3} A_{s+p-2} A_{s+p-1} A_{s+p}) + \dots\dots\dots \dots\dots\dots\dots \quad (4.3.4)$$

dan kombinasi penyebut F^*, (MS_2), adalah :

$$MS_2 =$$

$$(MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{ts+1} + \dots\dots\dots + MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{ts+p}) (MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{ts+1} A_{ts+2} A_{ts+3} + \dots\dots\dots + MSA_{t1} \cdots A_{ts} A_{s+p-2} A_{s+p-1} A_{s+p}) + \dots\dots\dots\dots \dots\dots\dots \quad (4.3.5)$$

Kemudian derajad kebebasannya dicari dengan rumus pendekatan (4.3.3).Jika den gan rumus pendekatan tersebut diperoleh bilan gan yang tidak bulat maka dibulatkan menuju bilangan bulat terdekat.Selanjutnya dikerjakan seperti pada model I.