BAB III

ANALISA VARIANSI MODEL I

PENGARUH TETAP

Dalam analisa variansi, nilai-nilai parameternya tidak diketahui. Nilai yang diperoleh adalah harga statistik, karena perhitungan-perhitungan dilakukan terhadap data sampel.

Situasi dasar Analisa Variansi model I pengaruh tetap adalah sebagai berikut :

Faktor-faktor yang dipelajari adalah A_1, A_2, ..., A_n, masing-masing mempunyai a_1, a_2, ..., a_n taraffaktor. Taraffaktor-taraffaktor inilah yang menjadi pusat perhatian, dengan perkataan lain, taraffaktor dari masing-masing faktor tidak dipandang sebagai sampel dari populasi taraffaktor dari faktor tersebut.

Seperti dijelaskan pada subbab (2.1), akan terdapat a_1 x.. ...x a_n = K populasi yang mempunyai karakteristik berbeda. Dari masing-masing populasi diamati sampel dengan ukuran sama yaitu m, dimana m > 1. Setelah respon didefinisikan diperoleh m harga pengamatan dari masing-masing populasi, sehingga banyaknya pengamatan adalah :

$$K.m = a_1 x \dots x \; a_n . m$$

Untuk menyatakan sampel dari populasi biasanya dengan menyebutkan karakteristik dari populasi tersebut yaitu perlakuan. Perlakuan untuk faktor A_1 pada taraf faktor i_1, faktor A_2 pada taraf faktor i_2 dan sebagainya, artinya adalah sampel dari populasi yang mempunyai karakteristik tersebut.

Pengamatan ke l (l=1,2,... m) dari perlakuan dimana faktor-faktor A_t (t= 1, 2 ....n), masing-masing pada taraffaktor i_t , dinotasikan dengan :

$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_n l} \quad \text{atau} \quad Y_{i_1 \ldots i_n l}$$

dengan i_t (t = 1, 2 ...n) = 1, 2, ...a_t.

Contoh : ingin diketahui apakah ada pengaruh, empat metode mengajar pada tiga sekolahan terhadap nilai ujian matematika. Disini hanya tertarik pada tiga sekolahan tersebut, artinya kesimpulan yang diperoleh hanya berlaku untuk tiga sekolahan tersebut, demikian juga untuk faktor metode mengajar, hanya berlaku untuk keempat metode tersebut. Terdapat dua faktor yaitu A_1 adalah faktor sekolahan dengan banyak taraf faktor a_1 = 3, dan A_2 adalah faktor metode mengajar dengan banyak taraf faktor a_2 = 4. Sehingga banyaknya sampel atau perlakuan adalah $a_1 \times a_2 = 3 \times 4 = 12$ buah.

Misalnya ukuran sampel adalah 50 siswa, maka terdapat 50 x 12 = 600 observasi.

$Y_{1\,1\,1}$ adalah observasi pertama dari perlakuan siswa dari sekolahan pertama yang diajar dengan metode 1.

$Y_{1\,3\,10}$ adalah observasi kesepuluh dari perlakuan siswa dari sekolahan pertama yang diajar dengan metode 3.

dan sebagainya.

3.1. Model Analisa Variansi

Suatu model analisa variansi tanpa memperhatikan struktur faktorial (dekomposisi rata-rata populasi) diberikan sebagai berikut :

$$Y_{i_1 \ldots i_n l} = \mu_{i_1 \ldots i_n} + \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l} \quad \ldots\ldots\ldots(3.1.1)$$

dimana :

$Y_{i_1 \ldots i_n l}$ adalah observasi ke l dari perlakuan faktor A_1 pada taraf faktor i_1, A_2 pada i_2 dan sebagainya.

$\mu_{i_1 \ldots i_n}$ adalah parameter-parameter (rata-rata populasi)

$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}$ adalah variabel random independen berdistribusi normal dengan harga harapan (ditulis $E(\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l})$) nol dan variansi σ^2.

Model (3.1.1) belum cukup, karena secara eksplisit tidak menunjukkan struktur faktorial dari analisa multifaktor. Sehingga jika memasukkan struktur dari persamaan (2.3.12) kedalam (3.1.1) diperoleh model :

$$\begin{aligned} Y_{i_1 \ldots i_n l} = {} & \\ & \mu_{(n.)} + [(\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}] + [(\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + \\ & (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n}] + [(\alpha_1 \alpha_2\alpha_3)_{i_1 i_2 i_3} + \ldots + \\ & (\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-2} i_{n-1} i_n}] + \ldots + (\alpha_1 \ldots \alpha_n)_{i_1 \ldots i_n} \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.2)$$

dengan :

$\mu_{(n.)}$, konstanta

$(\alpha_{t1}\alpha_{t2}\ldots\alpha_{tk})_{i_{t1}i_{t2}\ldots i_{tk}}$, $t1, t2, \ldots tk = 1, 2, \ldots, n$,

$t1 < t2 < \ldots < tk$ adalah konstanta-konstanta dengan

$$\sum_{i_t =}^{a_t} (\alpha_{t1}\ldots\alpha_{tk})_{i_{t1}i_{t2}\ldots i_{tk}} = 0, \quad t = t1, t2, \ldots tk$$

Karena, suku-suku ruas kanan persamaan (3.1.2) merupakan konstanta kecuali suku sesatan $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}$, maka harga harapan

$$\begin{aligned} E(Y_{i_1 \ldots i_n l}) = \mu_{(n.)} &+ \left((\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n} \right) + \\ &\left[(\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n} \right) + \\ &\left[(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{i_1 i_2 i_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right. + \\ &\left. (\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-2} i_{n-1} i_n} \right) + \ldots\ldots\ldots + \\ &(\alpha_1 \ldots \alpha_n)_{i_1 \ldots i_n} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.1.3) \end{aligned}$$

karena $E(\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}) = 0$

Dan variansi,

$$\begin{aligned} Var\left(Y_{i_1 \ldots i_n l}\right) &= E\left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - E(Y_{i_1 \ldots i_n l})\right)^2 \\ &= E\left(\varepsilon^2_{i_1 \ldots i_n l} \right) \\ &= Var\left(\varepsilon^2_{i_1 \ldots i_n l} \right) \\ &= \sigma^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.4) \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}$ adalah satu-satunya suku random pada ruas kanan persamaan (3.1.2), dengan variansi σ^2 dan merupakan variabel random normal imdependen maka $Y_{i_1 \ldots i_n l}$ juga merupakan variabel random normal independen, atau $Y_{i_1 \ldots i_n l}$ independen, $N\left(E\ (Y_{i_1 \ldots i_n l}),\ \sigma^2 \right)$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.5)$$

3.2. Penotasian

Jumlah seluruh observasi ketika faktor-faktor A_t pada taraffaktor i_t, t=1,2,...n, dinotasikan dengan $Y_{i_1 \ldots i_n \cdot}$, yaitu :

$$Y_{i_1 \ldots i_n \cdot} = \sum_{l=1}^{m} Y_{i_1 \ldots i_n l} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.1a)$$

Dan rata-rata yang bersesuaian adalah

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot} = \frac{Y_{i_1 \ldots i_n \cdot}}{m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.1b)$$

Jumlah seluruh observasi dari faktor A_{t1}, ketika faktor-faktor A_t pada taraf faktor i_t $(t \neq t_1)$ dinotasikan,

$$Y_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_n \cdot} = \sum_{i_{t1}=1}^{a_{t1}} \sum_{l=1}^{m} Y_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n l}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.2a)$$

Rata-rata yang bersesuaian adalah :

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_n \cdot} = \frac{Y_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_n \cdot}}{a_{t1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.2b)$$

Jumlah seluruh observasi dari faktor A_{t1}dan A_{t2} ketika faktor-faktor A_t pada taraf faktor i_t $(t \neq t_1, t_2)$, dinotasikan :

$$Y_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} \ldots i_n \cdot} =$$

$$\sum_{i_{t1}=1}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}=1}^{a_{t2}} \sum_{l=1}^{m} Y_{i_1 \ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots i_n l} \qquad \ldots\ldots.(3.2.3a)$$

Rata-rata yang bersesuaian adalah :

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} \ldots i_n} = \frac{Y_{i_1 \ldots i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \ldots i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} \ldots i_n \cdot}}{a_{t1}\, a_{t2}\, m} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.3b)$$

dan sebagainya.

Jumlah keseluruhan observasi, dinotasikan $Y(n.).$, adalah :

$$Y_{(n.).} = \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} Y_{i_1 \ldots i_n l} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.4a)$$

Dan rata-rata keseluruhan observasi adalah :

$$\bar{Y}_{(n.).} = \frac{Y_{(n.).}}{K.m} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.4b)$$

Dot menyatakan harga-harga indek yang diwakilinya, yang berarti, jumlahan atau rata-rata dengan indek dot tersebut menyatakan jumlah atau rata-rata observasi untuk semua harga indek yang diwakili dot tersebut.

Harga-harga yang diperoleh seperti yang dibicarakan pada sub-bab (3.2) ini, merupakan nilai statistik yang memberikan informasi mengenai parameter yang bersesuaian atau akan menjadi estimator suatu parameter.

3.3. Titik - Titik Estimator

Untuk mendapatkan estimator dari suatu parameter (yang dibicarakan pada bab II), digunakan metode kuadrat terkecil yaitu meminimumkan jumlah kuadrat deviasi observasi dari harga harapannya. Misalnya jumlah kuadrat tersebut adalah M.

$$M = \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - E(Y_{i_1 \ldots i_n l}) \right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.1)$$

atau :

$$M = \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \Big\{ Y_{i_1 \ldots\ldots i_n l} - \mu(n.) - \big((\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}\big) - \big((\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n}\big) - \ldots\ldots - (\alpha_1 \ldots \alpha_n)_{i_1 \ldots i_n} \Big\}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.3.2)$$

Estimasi untuk $\mu(n.)$, diperoleh dengan mendeferensi- alkan sebagian, M terhadap $\mu(n.)$,

$$\frac{\partial M}{\partial \mu(n.)} = -2 \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \Big\{ Y_{i_1 \ldots i_n l} - \mu(n.) - \big((\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}\big) - \big((\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n}\big) - \ldots\ldots \Big\}$$

karena, $\sum_{i_t=1}^{a_t} \alpha_{i_t} = 0$, $\sum_{i_t=1}^{a_t} (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}} = 0$, $t = t_1, t_2$

dan sebagainya, maka

$$\frac{\partial M}{\partial \mu_{(n.)}} = -2 \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - \mu_{(n.)} \right)$$

supaya minimum, $\frac{\partial M}{\partial \mu_{(n.)}} = 0$,

atau $$\sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} Y_{i_1 \ldots i_n l} - K.m.\mu(n.) = 0$$

atau $\mu_{(n.)} = \overline{Y}_{(n.)}$.

Jadi estimator $\mu(n.)$ disimbulkan $\hat{\mu}_{(n.)}$ adalah

$$\hat{\mu}_{(n.)} = \overline{Y}_{(n.)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.3)$$

Untuk mencari estimasi $(\alpha_{tk})_{i_{tk}}$, $i_{tk} = 1,2,\ldots.a_{tk}$, harus diingat bahwa :

$$\sum_{i_{tk}}^{a_{tk}} (\alpha_{tk})_{i_{tk}} = (\alpha_{tk})_1 + (\alpha_{tk})_2 + \ldots + (\alpha_{tk})_{a_t}$$

dimana :

$(\alpha_{tk})_{i_{tk}}$ adalah pengaruh faktor A_{tk} pada taraffaktor ke i_{tk}, $i_{tk} = 1,2,..a_{tk}$

Mencari estimator $(\alpha_{tk})_{i_{tk}}$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial M}{\partial (\alpha_{tk})_{i_{tk}}} = -2 \sum_{i_1=1}^{a_1} \ldots \sum_{i_{tk-1}}^{a_{tk-1}} \sum_{i_{tk+1}}^{a_{tk+1}} \ldots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \Big\{ Y_{i_1 \ldots i_n l} - \mu(n.) - [(\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_{tk})_{i_{tk}} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}] - [(\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n}] - \ldots \Big\}$$

karena $\sum_{i_t=1}^{a_t} (\alpha_{t1} \ldots \alpha_{tj})_{i_{t1} \ldots i_{tj}} = 0$, $j = 1, 2, \ldots n$

$t = t1, t2, \ldots tn$

$t \neq tk$

sehingga,

$$\frac{\partial M}{\partial (\alpha_{tk})_{i_{tk}}} = -2 \sum_{i_1=1}^{a_2} \ldots \sum_{i_{tk-1}}^{a_{tk-1}} \sum_{i_{tk+1}}^{a_{tk+1}} \ldots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \Big\{ \big(Y_{i_1 \ldots i_n l} - \mu_{(n.)} - (\alpha_{tk})_{i_{tk}} \big)$$

Supaya minimum, maka $\dfrac{\partial M}{\partial (\alpha_{tk})_{tk}} = 0$

atau, $$Y_{\ldots i_{tk} \ldots} - \frac{K.m}{a_{tk}} . \mu_{(n.)} - \frac{K.m}{a_{tk}} (\alpha_{tk})_{i_{tk}} = 0$$

atau, $$(\alpha_{tk})_{i_{tk}} = \bar{Y}_{\ldots i_{tk} \ldots} - \bar{Y}_{(n.)}.$$

sebab, $\hat{\mu}_{(n.)} = \bar{Y}_{(n.)}$.

Jadi estimator $(\alpha_{tk})_{i_{tk}}$ dinotasikan $(\hat{\alpha}_{tk})_{i_{tk}}$, adalah,

$$(\hat{\alpha}_{tk})_{i_{tk}} = \bar{Y}_{\ldots i_{tk} \ldots} \quad \bar{Y}_{(n.).} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.4)$$

secara umum estimator pengaruh faktor A_t pada taraf i_t adalah

$$(\hat{\alpha}_t)_{i_t} = \bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n.).} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.5)$$

$$t = 1,2,\ldots,n \;, \quad i_t = 1,2,\ldots,a_t$$

Dengan cara yang sama dapat dicari estimator kuadrat terkecil untuk interaksi dua faktor, tiga faktor dan sebagainya. Estimator-estimator ini terlihat dalam tabel (3.3.1).

Tabel 3.3.1. Estimator dari parameter

Parameter	Estimator
Rata-rata dari rata-rata populasi: $\mu_{(n.)}$	$\hat{\mu}_{(n.)} = \bar{Y}_{(n.)}$
Pengaruh faktor A_t $(\alpha_t)_{i_t}$ $t=1,2,\ldots n, i_t=1,\ldots a_t$	$(\hat{\alpha}_t)_{i_t} = \bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n.)}$
Interaksi 2 faktor A_{t1} dan A_{t2} $(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}$ $t1, t2 = \{1,2,\ldots,n\}$.. $i_{t1} = 1,2,\ldots a_{t1}$ $i_{t2} = 1,2,\ldots a_{t2}$	$\widehat{(\alpha_{t1}\alpha_{t2})}_{i_{t1}i_{t2}} =$ $\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots}$ $\bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.)}$.
Interaksi 3 faktor A_{t1}, A_{t2} dan A_{t3} : $(\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_{t3})_{i_{t1}i_{t2}i_{t3}}$ $t1, t2, t3 \in (1,2,\ldots n)$ $i_{t1} = 1,2,\ldots a_{t1}$ $i_{t2} = 1,2,\ldots a_{t2}$ $i_{t3} = 1,2,\ldots a_{t3}$	$\widehat{(\alpha_{t1}\alpha_{t2}\alpha_{t3})}_{i_{t1}i_{t2}i_{t3}} =$ $\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots i_{t3} \ldots} -$ $\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t3} \ldots}$ $- \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots i_{t3} \ldots} + \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} +$ $\bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{\ldots i_{t3} \ldots} - \bar{Y}_{(n.)}$.
dan sebagainya,	
Rata-rata populasi, $\mu_{i_1 \ldots i_n}$ $i_t = 1,2,\ldots a_t$ $t = 1,2,\ldots n$	$\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_n} = \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n}$.

Residual :

Residual adalah suatu ukuran untuk menyelidiki kecocokan model analisa variansi. Residual dinotasikan $e_{i_1 \ldots i_n l}$ didefinisikan sebagai deviasi antara observasi dan estimasi harga harapannya.

$$e_{i_1 \ldots i_n l} = Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} \quad \ldots\ldots\ldots (3.3.6)$$

3.4. Penguraian Jumlah Kuadrat Total

Yang dimaksud kuadrat total adalah kuadrat dari deviasi observasi $Y_{i_1 \ldots i_n l}$ terhadap rata-rata seluruh observasi $\bar{Y}_{(n.).}$. Deviasi total $Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{(n.).}$ dapat dinyatakan sebagai dikomposisi sebagai berikut :

$$Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{(n.).} =$$

$$\left(\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).} \right) + \left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} \right) . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4.1)$$

dimana

$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).}$ adalah deviasi rata-rata perlakuan disekitar rata-rata keseluruhan.

$Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .}$ adalah deviasi observasi disekitar rata-rata perlakuan.

Kemudian $\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).}$ diuraikan dalam bentuk komponen-komponen yang merefleksikan pengaruh faktor dan interaksi faktor, sebagai berikut :

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).} = \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_n} - \hat{\mu}_{(n.)}$$

berdasarkan persamaan (2.3.12), diperoleh,

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).} =$$

$$\left[(\hat{\alpha}_1)_{i_1} + \cdots + (\hat{\alpha}_n)_{i_n}\right] + \left[(\widehat{\alpha_1\alpha_2})_{i_1 i_2} + \cdots + (\widehat{\alpha_{n-1}\alpha_n})_{i_{n-1} i_n}\right] + \cdots\cdots + (\widehat{\alpha_1 \ldots \alpha_n})_{i_1 \ldots i_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.2)$$

Dengan estimator-estimator pada tabel 3.3.1.. diperoleh.

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot} - \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} =$$

$$\sum_{i_t}^{a_t} \left(\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} \right) +$$

$$\sum_{t_1<t_2} \left(\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} \right) + \sum_{t_1<t_2<t_3} \left(\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots i_{t3} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t3} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots i_{t3} \ldots} + \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} + \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{\ldots i_{t3} \ldots} - \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} \right) + \cdots\cdots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.3)$$

Apabila persamaan (3.4.1) dikuadratkan dan dijumlahkan, maka suku-suku perkalian silang akan berharga nol, dan diperoleh

$$SSTO = SSTR + SSE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.4)$$

dimana,

$$SSTO = \sum_{i_1=1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} \right)^2 \ldots\ldots(3.4.4a)$$

$$SSTR = m \sum_{i_1=1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{a_n} \left(\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot} - \bar{Y}_{(n\cdot)\cdot} \right)^2 \ldots\ldots\ldots(3.4.4b)$$

$$SSE = \sum_{i_1=1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{a_n} \sum_{l=1}^{m} \left(Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot} \right)^2 \ldots(3.4.4c)$$

SSTR merefleksikan variasi antar perlakuan dan disebut dengan jumlah kuadrat perlakuan, SSE merefleksikan variasi antar observasi (pengamatan) dalam perlakuan yang sama dan disebut dengan jumlah kuadrat sesatan.

Apabila persamaan (3.4.3) dikuadratkan dan dijumlahkan untuk seluruh rata-rata perlakuan dan m pengamatan, maka suku perkalian silang akan berharga nol, dan akan diperoleh,

$$SSTR = \sum_{t=1}^{n} SSA_t + \sum_{t_1<t_2} SSA_{t_1}A_{t_2} + \ldots\ldots + SSA_{t_1}\ldots A_{tn} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.5)$$

dengan,

$\sum_{t=1}^{n} SSA_t$ adalah jumlah dari seluruh jumlah kuadrat pengaruh faktor, dengan,

$$SSA_t = \frac{K.m}{a_t} \sum_{i_t=1}^{a_t} \left(\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n.).} \right)^2$$

$\sum_{t_1<t_2} SSA_{t_1}A_{t_2}$ adalah jumlah dari seluruh jumlah kuadrat interaksi dua faktor, dengan

$$SSA_{t_1}A_{t_2} = \frac{K.m}{a_{t_1}.a_{t_2}} \sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}} \left(\bar{Y}_{\ldots i_{t_1} \ldots i_{t_2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t_1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t_2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.).} \right)^2$$

dan sebagainya.

Selanjutnya SSA_t disebut jumlah kuadrat pengaruh faktor A_t. Besaran ini mengukur variasi estimator rata-rata taraf- faktor, $\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots}$. Makin besar harga, $\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots}$ makin besar harga SSA_t.

$SSA_{t_1}A_{t_2}$ disebut jumlah kuadrat interaksi faktor A_{t_1} dan A_{t_2}, yang mengukur variasi estimator interaksi, $\left(\bar{Y}_{\ldots i_{t_1} \ldots i_{t_2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t_1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t_2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.).} \right)$, dan sebagainya.

Didalam kepentingan perhitungan digunakan rumus-rumus yang lebih sederhana, yang secara aljabar identik dengan rumus-rumus yang telah dibahas diatas,

$$SSTO = \sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} Y^2_{i_1 \ldots i_n l} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m} \quad \ldots\ldots(3.4.6)$$

$$SSTR = \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} Y^2_{i_1 \ldots i_n .}}{m} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m} \quad \ldots\ldots(3.4.7)$$

$$SSE = \sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} Y^2_{i_1 \ldots i_n l} - \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} Y^2_{i_1 \ldots i_n .}}{K.m} \quad \ldots\ldots(3.4.8)$$

$$SSA_t = \frac{\sum_{i_t}^{a_t} Y^2_{\ldots i_t \ldots}}{K.m / a_t} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m} \quad \ldots\ldots(3.4.9)$$

Jumlah kuadrat interaksi dua faktor $SSA_{t1}A_{t2}$ diperoleh dengan cara bekerja pada rata-rata taraf faktor, $\overline{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots}$. Rata-rata ini dipandang sebagai rata-rata perlakuan untuk analisa dua faktor A_{t1} dan A_{t2}. Jumlah kuadrat perlakuan untuk dua faktor ini dinyatakan sebagai $SSTR(A_{t1}A_{t2})$,

$$SSTR(A_{t1}A_{t2}) = \frac{K.m}{a_{t1}.a_{t2}} \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \left(\overline{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \overline{Y}_{(n.).} \right)^2$$

$$= \frac{K.m}{a_{t1}.a_{t2}} \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} Y^2_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - K.m\, \overline{Y}^2_{(n.).}$$

$$= \frac{K.m}{a_{t1}.a_{t2}} \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \left\{ \frac{Y_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots}}{K.m/a_{t2}a_{t2}} \right\}^2 - K.m \left\{ \frac{Y_{(n.).}}{K.m} \right\}^2$$

$$= \frac{\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} Y^2_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots}}{K.m/a_{t2}a_{t2}} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$$

...................(3.4.10)

Berdasarkan persamaan (3.4.5) dan (3.4.9) untuk A_{t1} dan A_{t2} diperoleh hubungan,

$$SSTR(A_{t1}A_{t2}) = SSA_{t1} + SSA_{t2} + SSA_{t1}A_{t2} \quad .....(3.4.11)$$

sehingga $SSA_{t1}A_{t2}$ dihitung dengan rumus,

$$SSA_{t1}A_{t2} = SSTR(A_{t1}A_{t2}) - SSA_{t1} - SSA_{t2}$$

........................(3.4.12)

Dengan jalan yang sama, jumlah kuadrat perlakuan untuk analisa tiga faktor A_{t1}, A_{t2} dan A_{t3} adalah,

$$SSTR(A_{t1}A_{t2}A_{t3}) =$$

$$\frac{\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \sum_{i_{t3}}^{a_{t3}} Y^2_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots i_{t3} \ldots}}{K.m/a_{t2}a_{t2}\,a_{t3}} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$$

................(3.4.13)

$$SSA_{t1}A_{t2}A_{t3} =$$

$$SSTR\,(A_{t1}A_{t2}A_{t3}) - SSA_{t1} - SSA_{t2} - SSA_{t3} - SSA_{t1}A_{t2} -$$

$$SSA_{t1}A_{t3} - SSA_{t2}A_{t3} - SSA_{t1}A_{t2}A_{t3}. \quad ....(3.4.14)$$

dan sebagainya.

Untuk jumlah kuadrat interaksi n-faktor digunakan hubungan pada persamaan (3.4.5) dengan

$$SSTR = \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \ldots \sum_{i_n}^{a_n} Y^2_{i_1 \ldots i_n}}{m} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}.$$

Tabel 3.4.1. memuat jumlah kuadrat dan SSTR yang bersesuaian.

Tabel 3.4.1. Jumlah Kuadrat perlakuan

Jumlah Kuadrat (MS)	SSTR
SSA_t = SSTR (A_t) t = 1,2,.....n	$\frac{\Sigma Y^2_{...i_t...}}{K.m\ /a_t} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$
$SSA_{t_1}A_{t_2}$ = SSTR($A_{t_1}A_{t_2}$)- SSA_{t_1}- SSA_{t_2} t1,t2=1,2,..n, t1≠t2.	$\frac{\sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}}\sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}} Y^2_{...i_{t_1}...\ i_{t_2}..}}{K.m/a_{t_2}a_{t_2}} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$
$SSA_{t_1}A_{t_2}A_{t_3}$ = SSTR ($A_{t_1}A_{t_2}A_{t_3}$) - SSA_{t_1}- SSA_{t_2} - SSA_{t_3} - $SSA_{t_1}A_{t_2}$- $SSA_{t_1}A_{t_3}$ - $SSA_{t_2}A_{t_3}$ - $SSA_{t_1}A_{t_2}A_{t_3}$. t1,t2,t3= 1,2,...n t1≠t2≠t3	$\frac{\sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}}\sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}}\sum_{i_{t_3}}^{a_{t_3}} Y^2_{..i_{t_1}..\ i_{t_2}..i_{t_3}..}}{K.m/a_{t_2}a_{t_2}\ a_{t_3}} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$
$SSA_{t_1}...A_{t_k}$ = SSTR($A_{t_1}...A_{t_k}$) -(SSA_{t_1} +.....+ SSA_{t_k}) -.....- ($SSA_{t_1}...A_{t_{k-1}}$ +....+ $SSA_{t_2}...A_{t_k}$) t1,t2,...tk = 1,2...n t1≠t2≠ ....≠tk	$\frac{\sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}}\cdots\sum_{i_{t_k}}^{a_{t_k}} Y^2_{..i_{t_1}...i_{t_2}....,...i_{t_k}..}}{K.m/a_{t_2}a_{t_2}\ a_{t_3}} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$
$SSA_1...A_n$ = SSTR - (SSA_1+.....+ SSA_n) - (SSA_1A_2+.....+ $SSA_{n-1}A_n$) -.......- ($SSA_1...A_{n-1}$+.......+ $SSA_2.....A_n$).	$\frac{\sum_{i_1}^{a_1}\sum_{i_2}^{a_2}\cdots\sum_{i_n} Y^2_{i_1...i_n.}}{m} - \frac{Y^2_{(n.).}}{K.m}$

3.5. Dekomposisi Derajad Kebebasan (DK)

Derajad kebebasan dari suatu jumlah kuadrat merupakan banyaknya elemen yang dijumlahkan dikurangi dengan banyaknya batasan yang independen. Yang dimaksud batasan independen adalah jumlahan elemen-elemen tersebut yang berharga nol, dan tidak tergantung batasan lain.

Derajad kebebasan yang bersesuaian dengan SSTO adalah (K.m-1). Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut :
Banyaknya pengamatan adalah K.m buah dan terdapat satu batasan yaitu,

$$\sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} (Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{(n.).}) = 0$$

jadi, DKSSTO = K.m -1

Derajad kebebasan yang bersesuaian dengan SSTR adalah K-1, karena terdapat K rata-rata perlakuan dan terdapat batasan,

$$\sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{Y}_{(n.).}) = 0$$

jadi, DKSSTR = K - 1.

SSA_t (t=1,2,...n) masing-masing mempunyai derajad kebebasan a_t - 1, karena faktor A_t mempunyai a_t taraffaktor sehingga terdapat a_t rata-rata taraffaktor, $\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots}$, dan mempunyai satu batasan,

$$\sum_{i_t}^{a_t} (\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n.).}) = 0$$

jadi, $DKSSA_t$ = (a_t - 1).

Derajad kebebasan dari jumlah kuadrat interaksi dua faktor $SSA_{t1}A_{t2}$ dipikirkan sebagai berikut :

Terdapat $a_{t1} \times a_{t2}$ interaksi. Ada a_{t2} batasan yaitu :

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} (\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.).}) = 0$$

untuk setiap $i_{t2} = 1,2,\ldots .a_{t2}$

dan a_{t1} batasan, yaitu,

$$\sum_{i_{t2}} (\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots} - \bar{Y}_{\ldots i_{t2} \ldots} + \bar{Y}_{(n.).}) = 0,$$

untuk semua $i_{t1}=1,2,\ldots .a_{t1}$,

akan tetapi a_{t1} batasan ini hanya $a_{t1}-1$ yang independen, karena batasan yang terakhir diakibatkan oleh a_{t2} batasan yang terdahulu, jadi derajad kebebasan dari $SSA_{t1}A_{t2}$ adalah

$$a_{t1} \times a_{t2} - (a_{t1} + a_{t2} - 1) = (a_{t1}-1)(a_{t2}-1)$$

atau

$$DKSSA_{t1}A_{t2} = (a_{t1}-1)(a_{t2}-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5.4)$$

Dengan pemikiran yang sama dapat dicarai DK dari $SSA_{t1}A_{t2}A_{t3}$, $SSA_{t1}A_{t2}A_{t3}A_{t4}$, dan seterusnya. Derajad kebebasan tersebut termuat dalam tabel 4.5.1.

Tabel 3.5.1. Derajad Kebebasan

Jumlah Kuadrat (SS)	Derajad Kebebasan (DK)
SSA_t, $t=1,2,\ldots.n$	$(a_t - 1)$
$SSA_{t_1}A_{t_2}$ $t_1,t_2 = 1,2,\ldots.n$	$(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1)$
$SSA_{t_1}A_{t_2}A_{t_3}$ $t_1,t_2,t_3 = 1,2,\ldots n$ $\vdots$	$(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1)(a_{t_3}-1)$
$SSA_{t_1}A_{t_2}\ldots A_{t_k}$ $t_1,t_2,\ldots.t_k = 1,2,\ldots..n$	$(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1)\ldots\ldots.. (a_{t_k}-1)$
SSTR	$(K - 1)$
SSE	$K (m - 1)$
SSTO	$K.m - 1$

Dari tabel 3.5.1. terlihat bahwa,

$$DKSSTO = DKSSTR + DKSSE \qquad \ldots\ldots\ldots(3.5.5)$$

menunjukkan bahwa dekomposisi derajad kebebasan sesuai dengan dekomposisi jumlah kuadratnya.

3.6. Rata-Rata Kuadrat Dan Harga Harapan

Rata-rata kuadrat merupakan hasil bagi jumlah kudrat (SS) dengan derajad kebebasan (DK) yang sesuai.

Rata-rata kuadrat total dinotasikan dengan MSTO adalah jumlah kuadarat total, SSTO, dibagi dengan DKSSTO, (Km-1), yaitu,

$$MSTO = \frac{SSTO}{DKSSTO} = \frac{SSTO}{Km - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.1)$$

Rata-rata kuadrat perlakuan dinotasikan dengan MSTR, adalah jumlah kuadrat perlakuan, SSTR, dibagi dengan DKSSTR, (K-1),

$$MSTR = \frac{SSTR}{DKSSTR} = \frac{SSTR}{K - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.2)$$

Rata-rata kuadrat sesatan, dinotasikan dengan MSE, yaitu,

$$MSE = \frac{SSE}{DKSSE} = \frac{SSE}{K(m-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.3)$$

Rata-rata kuadrat untuk pengaruh faktor dan interaksi, masing-masing adalah,

Rata-rata kuadrat untuk pengaruh faktor, dinotasikan dengan MSA_t, yaitu,

$$MSA_t = \frac{SSA_t}{DKSSA_t} = \frac{SSA_t}{(a_t-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.4)$$

Rata-rata kuadrat interaksi dua faktor A_{t1} dan A_{t2}, dinotasikan dengan $MSA_{t1}A_{t2}$, adalah,

$$MSA_{t1}A_{t2} = \frac{SSA_{t1}A_{t2}}{DKSSA_{t1}A_{t2}} = \frac{SSA_{t1}A_{t2}}{(a_{t1}-1)(a_{t2}-1)} \qquad \ldots\ldots(3.6.5)$$

dan sebagainya.

Rata-rata kuadrat interaksi k-faktor, dinotasikan, $MSA_{t1}\ldots.A_{tk}$,

$$MSA_{t1}\ldots.A_{tk} = \frac{SSA_{t1}\ldots.A_{tk}}{(a_{t1}-1)x\ldots.x(a_{tk}-1)} \qquad \ldots\ldots(3.6.6)$$

Dan rata-rata kuadrat interaksi n-faktor, dinotasikan dengan $MSA_1\ldots.A_n$, yaitu,

$$MSA_1\ldots.A_n = \frac{SSA_1\ldots.A_n}{(a_1- 1)x\ldots.x(a_k- 1)} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.6.7)$$

Harga Harapan

Harga harapan dari rata-rata kuadrat adalah harga yang diharapkan dari suatu rata-rata kuadrat (nilai statistik) yang berlaku untuk populasi. Jadi harga harapan merupakan parameter .

Harga harapan rata-rata kuadrat sesatan , dinotasikan dengan E(MSE), dicari sebagai berikut,

$$E(MSE) = E\left(\frac{SSE}{K(m-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{K(m-1)} E(SSE)$$

dari persamaan (3.4.4c) diperoleh,

$$E(MSE) = \frac{1}{K(m-1)} E\left(\sum_{i_1}^{n_1} \cdots \sum_{i_n}^{n_n} \sum_{l}^{m} (Y_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot})^2\right)$$

dengan mengingat bahwa,

$$Y_{i_1 \ldots i_n l} = \mu_{i_1 \ldots i_n} + \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}$$

dan jika dijumlahkan untuk m pengamatan kemudian dibagi dengan m, didapat,

$$\bar{Y}_{i_1 \ldots i_n \cdot} = \mu_{i_1 \ldots i_n} + \bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n \cdot}$$

dimana,

$$\bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n \cdot} = \frac{\sum_{l}^{m} \bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n \cdot}}{m}$$

akan diperoleh,

$$E(MSE) = \frac{1}{K(m-1)} E\left(\sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} (\varepsilon_{i_1 \ldots i_n l} - \bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n \cdot})^2\right)$$

karena $\sum_{l} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l} = m \; \bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n \cdot}$), diperoleh,

$$E(MSE) = \frac{1}{K(m-1)} E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \left(\sum_{l}^{m} \varepsilon^2_{i_1 \ldots i_n l} - m.\bar{\varepsilon}^2_{i_1 \ldots i_n \cdot}\right)$$

karena $E(\varepsilon^2_{i_1\ldots i_n l})$ sama untuk seluruh pengamatan, maka berlaku,

$$E(MSE) = \frac{1}{K(m-1)} \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \left\{ E \sum_{l}^{m} \varepsilon^2_{i_1\ldots i_n l} - m.E\left(\frac{\sum_{l}^{m} \bar{\varepsilon}_{i_1\ldots\ldots i_n\cdot}}{m} \right)^2 \right\}$$

diketahui bahwa $E(\varepsilon^2_{i_1\ldots i_n l}) = \sigma^2$ dan $\varepsilon_{i_1\ldots i_n l}$ independen atau,

$E\ (\ \varepsilon_{i_1\ldots i_n l}.\varepsilon_{i'_1\ldots i'_n l'})$, dimana $i_1\ldots i_n l \neq i'_1\ldots i'_n l$, berharga nol maka,

$$E(MSE) = \frac{1}{K(m-1)} \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (m-1).\sigma^2$$
$$= \sigma^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.8)$$

Harga harapan rata-rata kuadrat perlakuan dinotasikan dengan E(MSTR), dicari sebagai berikut

$$E(MSTR) = E\left(\frac{SSTR}{K-1} \right)$$

dari persamaan (3.4.4b) diperoleh,

$$E(MSTR) = \frac{m}{K-1} E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\bar{Y}_{i_1\ldots i_n\cdot} - \bar{Y}_{(n.).})^2$$

$$= \frac{m}{K-1} E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \left\{ \frac{\sum_{l}^{m} Y_{i_1\ldots i_n l}}{m} - \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} (Y_{i_1\ldots i_n l}}{K.m} \right\}^2$$

dengan persamaan (3.4.1) dan (3.1.2) akan diperoleh,

$$E(MSTR) = \frac{m}{K-1} E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \{(\mu_{i_1\ldots i_n} - \mu_{(n.)}) + (\bar{\varepsilon}_{i_1\ldots i_n\cdot} - \bar{\varepsilon}_{(n.).}))^2$$

dengan,

$$\bar{\varepsilon}_{(n.).} = \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} \sum_{l}^{m} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}}{K.m},$$

karena $E \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})(\bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})$

sama dengan nol, maka,

$$E(MSTR) = \frac{m}{K-1} \left\{ E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})^2 + E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2 \right\}$$

karena $\mu_{i_1 \ldots i_n}$ dan $\mu_{(n.)}$ merupakan konstanta maka,

$$E \left\{ \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})^2 \right\} = \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})^2$$

dan seperti dalam mencari E(MSE), dapat dicari bahwa,

$$E \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\bar{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_n .} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2 = \frac{K-1}{m} \sigma^2.$$

dengan demikian diperoleh,

$$E(MSTR) = \sigma^2 + \frac{m}{K-1} \sum_{i_1}^{a_1} \cdots \sum_{i_n}^{a_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.9)$$

Harga harapan rata-rata kuadrat pengaruh faktor A_t ($t=1,2,\ldots.n$) dinotasikan $E(MSA_t)$ dicari sebagai berikut,

$$E(MSA_t) = \frac{1}{a_t - 1} E(SSA_t)$$

$$= \frac{K.m}{a_t(a_t - 1)} E \sum_{i_t}^{a_t} \left\{ \bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{Y}_{(n.).} \right\}^2.$$

dengan mengingat bahwa,

$$\bar{Y}_{\ldots i_t \ldots} = \frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n} \sum_{l} Y_{i_1 \ldots i_n l}}{K.m/a_t}.$$

$$\bar{Y}_{(n.).} = \frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \sum_{l} Y_{i_1 \ldots i_n l}}{K.m} ,$$

dan dengan persamaan (3.1.2) akan diperoleh,

$$E(MSA_t) = \frac{K.m}{a_t(a_t - 1)} E \sum_{i_t} \left((\alpha_t)_{i_t} + (\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})\right)^2$$

dimana,

$$\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} = \frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n} \sum_{l} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n l}}{K.m/a_t}$$

karena $E\left(\sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)_{i_t} \cdot (\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})\right) = 0$, maka

$$E(MSA_t) = \frac{K.m}{a_t(a_t - 1)} \left(E\left(\sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)_{i_t}\right)^2 + E \sum_{i_t}^{a_t} (\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2\right),$$

mudah dicari bahwa,

$$E \sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)_{i_t}^2 = \sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)_{i_t}^2$$

$$E \sum_{i_t}^{a_t} (\bar{\varepsilon}_{\ldots i_t \ldots} - \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2 = \frac{a_t(a_t-1)}{K.m} \cdot \sigma^2,$$

Sehingga diperoleh,

$$E(MSA_t) = \sigma^2 + \frac{K.m}{a_t(a_t - 1)} \cdot \sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)_{i_t}^2 \quad \ldots\ldots(3.6.10)$$

Harga harapan rata-rata kuadrat interaksi dua faktor A_{t1} dan A_{t2}, $t1, t2 = 1, 2, \ldots, n$, $t1 < t2$, dinotasikan $E(MSA_{t1}A_{t2})$ dicari sebagai berikut :

$$E(MSA_{t1}A_{t2}) = \frac{K.m}{(a_t-1)(a_t - 1)} E(SSA_{t1}A_{t2})$$

atau,

$$E(MSA_{t1}A_{t2}) = \frac{K.m}{a_{t1}a_{t2}(a_{t1}-1)(a - 1)} \cdot E \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \left[\bar{Y}_{\ldots i_{t1} \ldots i_{t2} \ldots}\right.$$

$$- \bar{Y}_{\dots i_{t1}\dots} - \bar{Y}_{\dots i_{t2}\dots} + \bar{Y}_{(n.).}\Big]^2$$

Dengan defínsi dari $\bar{Y}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots}$; $\bar{Y}_{\dots i_{t1}\dots}$, $\bar{Y}_{\dots i_{t2}\dots}$ dan $\bar{Y}_{(n.).}$ serta dengan persamaan (3.1.2), diperoleh,

$$E(MSA_{t1}A_{t2}) =$$

$$\frac{K.m}{a_{t1}a_{t2}(a_{t1}-1)(a_{t2}-1)}\; E \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}\Big[(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} + (\bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t2}\dots} + \bar{\varepsilon}_{(n.).}\Big]^2$$

dengan,

$$\bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots} = \frac{\sum_{i_1}^{a_1}\cdots\sum_{i_{t1-1}}^{a_{t1-1}}\sum_{i_{t1+1}}^{a_{t1+1}}\cdots\sum_{i_{t1-1}}^{a_{t1-1}}\sum_{i_{t1+1}}^{a_{t1+1}}\cdots\sum_{i_n}^{a_n}\sum_{l}^{m}\varepsilon_{i_1\dots i_n l}}{K.m/a_{t1}a_{t2}}$$

karena,

$$E\Big[\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}\,(\bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t2}\dots} + \bar{\varepsilon}_{(n.).}\Big] = 0$$

maka ,

$$E(MSA_{t1}A_{t2}) =$$

$$\frac{K.m}{a_{t1}a_{t2}(a_{t1}-1)(a_{t2}-1)}\Big[E\Big(\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})^2_{i_{t1}i_{t2}} + \sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t2}\dots} + \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2\Big]$$

Harga harapan dari suku pertama adalah,

$$E\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})^2_{i_{t1}i_{t2}} = \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}}\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})^2_{i_{t1}i_{t2}},$$

dan harga harapan suku kedua dicari sebagai berikut,

$$E\sum_{i_{t1}}\sum_{i_{t2}}(\bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots i_{t2}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t1}\dots} - \bar{\varepsilon}_{\dots i_{t2}\dots} + \bar{\varepsilon}_{(n.).})^2$$

$$= E \sum_{i_{t1}} \sum_{i_{t2}} \Big(\bar{\varepsilon}^2_{..i_{t1}..i_{t2}..} + \bar{\varepsilon}^2_{..i_{t1}...} + \bar{\varepsilon}^2_{..i_{t2}..} + \bar{\varepsilon}^2_{(n.).}$$

$$- 2.\bar{\varepsilon}_{..i_{t1}..i_{t2}..} . \bar{\varepsilon}_{..i_{t1}...} - 2.\bar{\varepsilon}_{..i_{t1}..i_{t2}..} . \bar{\varepsilon}_{..i_{t2}..}$$

$$+ 2.\bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} . \bar{\varepsilon}_{(n.).} + 2.\bar{\varepsilon}_{..i_{t1}...} . \bar{\varepsilon}_{...i_{t2}...} -$$

$$2.\bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..} . \bar{\varepsilon}_{(n.).} - 2.\bar{\varepsilon}_{...i_{t2}...} . \bar{\varepsilon}_{(n.).} \Big)$$

dengan mengingat bahwa,

$$\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} = a_{t2}.\bar{\varepsilon}_{...i_{t1}....}$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} = a_{t1}.\bar{\varepsilon}_{...i_{t2}..}$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..} = a_{t1}.\bar{\varepsilon}_{(n.).}$$

$$\sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \bar{\varepsilon}_{...i_{t2}..} = a_{t2}.\bar{\varepsilon}_{(n.).}$$

$$\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} = a_{t1}.a_{t2}.\bar{\varepsilon}_{(n.).} ,$$

akan diperoleh

$$E \sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \big(\bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} - \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}...} - \bar{\varepsilon}_{...i_{t2}..} + \bar{\varepsilon}_{(n.).} \big)^2$$

$$= E \Big(\sum_{i_{t1}} \sum_{i_{t2}} \bar{\varepsilon}^2_{...i_{t1}..i_{t2}..} - a_{t2}.\sum_{i_{t1}} \bar{\varepsilon}^2_{...i_{t1}..} - a_{t1} x$$

$$\sum_{i_{t2}} \bar{\varepsilon}^2_{...i_{t2}..} + a_{t1}.a_{t2}.\bar{\varepsilon}^2_{(n.).} \Big)$$

karena $E\,(\varepsilon_{i_1...i_n l}.\varepsilon_{i'_1...i'_n l'})$, dimana $i_1..i_n l \neq i'_1...i'_n l'$, berharga nol, maka,

$$E \sum_{i_{t1}} \sum_{i_{t2}} \Big\{ \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}..i_{t2}..} - \bar{\varepsilon}_{...i_{t1}...} - \bar{\varepsilon}_{...i_{t2}...} + \bar{\varepsilon}_{(n.).} \Big\}^2$$

$$= \frac{a_{t_1}^2 . a_{t_2}^2}{K.m} . \sigma^2 - \frac{a_{t_1}^2 . a_{t_2}}{K.m} . \sigma^2 - \frac{a_{t_1} . a_{t_2}^2}{K.m} . \sigma^2 + \frac{a_{t_1} . a_{t_2}}{K.m} . \sigma^2 ,$$

$$= \frac{a_{t_1} . a_{t_2} (a_{t_1} - 1)(a_{t_2} -)}{K.m} . \sigma^2 .$$

Diperoleh harga harapan , $E(MSA_{t_1}A_{t_2})$,

$$E(MSA_{t_1}A_{t_2}) = \sigma^2 + \frac{K.m}{a_{t_1}a_{t_2}(a_{t_1}-1)(a_{t_2}- 1)} \sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}} (\alpha_{t_1}\alpha_{t_2})^2_{i_{t_1} i_{t_2}}$$

Dengan jalan yang sama dapat dicari harga harapan rata-rata kuadrat interaksi tiga faktor, empat faktor dan sebagainya.Harga- harga harapan ini termuat dalam tabel 3.6.2.

Tabel 3.6.2. Harga Harapan

Rata-Rata Kuadrat (MS)	Harga Harapan E(MS)
Perlakuan, SSTR	$\sigma^2 + \frac{m}{K-1} \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{(n.)})^2$
Pengaruh faktor A_t $t=1,2,\ldots n$	$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_t(a_t-1)} \cdot \sum_{i_t}^{a_t} (\alpha_t)^2_{i_t}$
Interaksi dua faktor A_{t_1} dan A_{t_2} $t_1, t_2 = 1,2,\ldots n$	$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_{t_1} a_{t_2} (a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1)} \times$ $(\sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}} (\alpha_{t_1}\alpha_{t_2})^2_{i_{t_1} i_{t_2}}$
Interaksi tiga faktor A_{t_1}, A_{t_2} dan A_{t_3} $t_1, t_2, t_3 = 1,2,\ldots n$ $t_1 < t_2 < t_3$ . . .	$\sigma^2 + \frac{K.m}{a_{t_1} a_{t_2} a_{t_3} (a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1)(a_{t_3}-1)}$ $\times \sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \sum_{i_{t_2}}^{a_{t_2}} \sum_{i_{t_3}}^{a_{t_3}} (\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\alpha_{t_3})^2_{i_{t_1} i_{t_2} i_{t_3}}$
Interaksi k-faktor $A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots A_{t_k}$ $t_1, t_2, \ldots t_k = 1,2,\ldots n$ $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ $SSA_{t_1 \ldots t_k}$ ⋮	$\sigma^2 +$ $\frac{K.m \cdot \sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \ldots \sum_{i_{t_k}}^{a_{t_k}} (\alpha_{t_1} \ldots \alpha_{t_k})^2_{i_{t_1} \ldots i_{t_k}}}{a_{t_1} \ldots a_{t_k} (a_{t_1}-1) \ldots (a_{t_k}-1)}$
Interaksi n-faktor $SSA_1 \ldots A_n$	$\sigma^2 +$ $\frac{m \cdot \sum_{i_{t_1}}^{a_{t_1}} \ldots \sum_{i_{t_n}}^{a_{t_n}} (\alpha_{t_1} \ldots \alpha_{t_n})^2_{i_{t_1} \ldots i_{t_n}}}{(a_{t_1}-1) \ldots (a_{t_n}-1)}$
Sesatan SSE	σ^2

Harga harapan rata-rata kuadrat pengaruh faktor A_t, $E(MSA_t)$,menunjukkan bahwa, apabila tidak ada pengaruh faktor, yaitu apabila $\mu_{\ldots i_t \ldots}$ sama untuk semua $i_t=1,2,\ldots a_t$, atau seluruh $(\alpha_t)_{i_t} = 0$, $i_t=1,2,\ldots a_t$, rata-rata kuadrat, MSA_t dan MSE mempunyai harga harapan yang sama. Tetapi apabila ada pengaruh, harga harapan MSA_t, cenderung akan lebih besar dari pada harga harapan MSE. Demikian juga untuk harga harapan rata-rata kuadrat interaksi, $E(MSA_{t1}A_{t2})$. Jika tidak ada interaksi antara faktor A_{t1} dan A_{t2} atau seluruh $(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = 0$, $t1, t2 = 1,2,\ldots n$, $E(MSA_{t1}A_{t2})$ sama dengan E(MSE), dan apabila ada interaksi, $E(MSA_{t1}A_{t2})$ cenderung lebih besardari pada E(MSE). Hal yang sama terjadi untuk interaksi tiga faktor, empat faktor dan sebagainya. Sehingga didapatkan perbandingan - perbandingan MSA_t/MSE, $MSA_{t1}A_{t2}/MSE$, $MSA_{t1}A_{t2}A_{t3}$ dan sebagainya, yang merupakan suatu nilai statistik yang mengindikasikan adanya pengaruh faktor atau interaksi. Sedangkan nilai statistik yang mengindikasikan adanya perbedaan dari K perlakuan (populasi) adalah MSTR/MSE, karena apabila tidak ada perbedaan dari K perlakuan atau seluruh rata-rata populasi $\mu_{i_1 \ldots i_n}$ untuk setiap $i_t=1,2,\ldots a_t$, $t=1,2,\ldots.n$ sama, harga harapan MSTR sama dengan MSE, sebaliknya jika tidak semua rata-rata populasi sama, harga harapan MSTR cenderung lebih besar dari pada E(MSE).

3.7. Pengujian

Pengujian adalah tahap dari analisa variansi untuk memutuskan ada tidaknya pengaruh suatu faktor serta interaksi dari faktor-faktor yang dipelajari.

Uji pengaruh faktor

Jika suatu faktor tidak ada pengaruhnya atau pengaruhnya nol, maka semua rata-rata taraffaktor ketika pada taraf-taraf dari faktor tersebut sama. Sebaliknya jika tidak semua rata-rata taraffaktor pada taraf-taraf dari faktor tersebut sama maka faktor tersebut mempunyai pengaruh. Misalnya ingin mengetahui pengaruh faktor A_t, apabila semua rata-rata taraffaktor $\mu_{\ldots i_t \ldots}$ ($i_t=1,2,\ldots a_t$) sama maka pengaruh faktor A_t sama dengan nol atau $(\alpha_t)_{i_t}=0$ untuk semua i_t.Sehingga terdapat dua pernyataan (misalnya S_1 dan S_2) yaitu :

S_1 : semua $\mu_{\ldots i_t \ldots}$, $i_t=1,2,\ldots a_t$ sama

S_2 : Tidak semua $\mu_{\ldots i_t \ldots}$, $i_t=1,2,\ldots a_t$ sama

atau,

S_1 : $(\alpha_t)_1 = (\alpha_t)_2 = \ldots\ldots = (\alpha_t)_{a_t} = 0$

S_2 : tidak semua $(\alpha_t)_{i_t} = 0$

Jika dilihat harga harapan, $E(MSA_t)$ pada tabel 3.6.2. bahwa apabila semua $(\alpha_t)_{i_t} = 0$, $i_t=1,2,\ldots.a_t$, maka $E(MSA_t)$ sama dengan $E(MSE)$, sehingga statistik, F^*, yang digunakan adalah,

$$F^* = \frac{MSA_t}{MSE} \text{ , atau } F^* = \frac{SSA_t/(a_t-1)}{SSE\ /K(m-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7.1)$$

Harga harapan penyebut F^* adalah σ^2 dan har ga harapan pembilang lebih besar atau sama dengan σ^2.Jika suatu hipotesa nol (Ho) mengatakan bahwa tidak ada pengaruh faktor A_t, atau,

$$H_0 : (\alpha_t)_1 = (\alpha_t)_2 = \ldots\ldots = (\alpha_t)_{a_t} = 0,$$

maka terdapat daerah penolakan Ho, disimbulkan H1, yang mempunyai arti ada pengaruh faktor A_t, atau,

$$H_1 : \text{tidak semua } (\alpha_t)_{i_t} = 0,\ i_t=1,2,\ldots a_t.$$

Kesamaan harga harapan pembilang dan penyebut statistik F^* dicapai bilamana Ho benar.Dengan demikian daerah penolakan Ho diambil kejadian $F^* > C_0$, dengan Co suatu konstanta yang lebih besar dari satu, sebab harga F^* yang besar lebih mungkin terjadi apabila Ho salah dari pada Ho benar. Untuk menentukan Co digunakan kenyataan bahwa pembilang dan penyebut F^* adalah variabel random independen sedemikian sehingga,

SSE / σ^2 berdistribusi chi-kuadrat dengan derajad kebebasan (DK) sama dengan K(m-1),

Jika Ho benar maka SSA_t/σ^2 juga berdistribusi chi-kuadrat dengan derajad kebebasan a_t-1 .

Sehingga jika Ho benar , variabel

$$F^* = \frac{SSA_t/(a_t-1)}{SSE\ /K(m-1)} = \frac{SSA_t/[\sigma^2(a_t-1)]}{SSE\ /[\sigma^2 K(m-1)]},$$

berdistribusi F dengan derajad kebebasan $[(a_t-1);K(m-1)]$. Dengan demikian jika $F[1-\alpha;(a_t-1);K(m-1)]$ adalah menunjukkan harga dimana probabilitas F^* lebih besar dari harga tersebut adalah α, maka untuk Co = $F[1-\alpha;(a_t-1);K(m-1)]$ kejadian $F^* >$ Co akan mempunyai probabilitas α jika Ho benar.

Jadi aturan keputusan untuk mengontrol kesalahan menolak Ho, Ho benar pada taraf signifikan α atau dengan kepercayaan 100(1-α)% adalah,

$F^* \leq F[1-\alpha;(a_t-1);K(m-1)]$, disimpulkan Ho

$F^* > F[1-\alpha;(a_t-1);K(m-1)]$, disimpulkan H1.

Jika disimpulkan Ho berarti pemgaruh faktor untuk semua taraffaktor $((\alpha_t)_{i_t}$, $i_t=1,2,...a_t)$ adalah nol. Dan jika disimpulkan H1 berarti tidak semua pengaruh $(\alpha_t)_{i_t}$ sama dengan nol.

Co biasanya disebut dengan titik kritis. Jika besar taraf signifikan sudah ditentukan, harga Co dapat dicari pada daftar disttribusi F (lihat lampiran).

Uji interaksi dua faktor

Untuk mengetahui adanya interaksi dua faktor sembarang, A_{t1} dan A_{t2}, t1,t2=1,2,..n, t1≠t2, diadakan pengujian dengan mengingat bahwa besar interaksi $(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}$ adalah nol untuk semua $i_{t1}=1,2,...a_{t1}$ dan $i_{t2}=1,2,...a_{t2}$, apabila tidak ada interaksi.Sehingga hipotesa nol (Ho) dan hipotesa alternatif (H1) adalah,

$$H_0 = \text{semua } (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = 0$$

$$H_1 = \text{tidak semua } (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = 0$$

Dengan melihat harga harapan pada tabel 3.6.2., statistik F^*yang sesuai adalah,

$$F^* = \frac{MSA_{t_1}A_{t_2}}{MSE} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7.2)$$

Dengan analisa yang sama seperti pada uji pengaruh faktor, F^* akan berdistribusi $F[(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1);K(m-1)]$, dan titik kritis Co sedemikian sehingga probabilitas $F^*>Co$ sama dengan α jika Ho benar adalah $F[1-\alpha;(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1);K(m-1)]$. Sehingga aturan keputusan yang sesuai untuk mengkontrol kesalahan Ho ditolak dengan Ho benar pada taraf signifikan α adalah :

$F^* \le F[1-\alpha;(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1);K(m-1)]$ disimpulkan Ho

$F^* > F[1-\alpha;(a_{t_1}-1)(a_{t_2}-1);K(m-1)]$ disimpulkan H1

Jika disimpulkan Ho berarti dengan kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ kedua faktor A_{t_1} dan A_{t_2} tidak berinteraksi dan jika disimpulkan H1 berarti dengan kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ disimpulkan faktor A_{t_1} dan A_{t_2} berinteraksi.

Dengan cara yang sama bisa diuji adanya interaksi tiga faktor, empat faktor dan sebagainya.

Uji perbedaan populasi

Untuk mengetahui apakah dari K populasi yang dipelajari berbeda edilakukan pengujian sebagai berikut, Jika tidak ada perbedaan populasi maka rata-rata populasi, $\mu_{i_1 \ldots i_n}$, seluruhnya akan berharga sama, sehingga harga harapan rata-rata kuadrat perlakuan E(MSTR) akan sama dengan E(MSE). Dari sini statistik pengujian yang sesuai adalah,

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7.3)$$

Hipotesa nol (Ho) dan hipotesa alternatif (H1) adalah,

H_0 : semua $\mu_{i_1 \ldots i_n}$ sama,

H_1 : tidak semua $\mu_{i_1 \ldots i_n}$ sama,

dengan, $i_1=1,2,\ldots a_1$, $i_2=1,2,\ldots a_2$, ..., $i_n=1,2,\ldots a_n$. Seperti pada uji pengaruh faktor, jika H_0 benar F^* akan berdistribusi F [(K-1:K(m-1)], dengan (K-1) adalah DKMSTR dan K(m-1) adalah DKMSE. Sedangkan titik kritis C_0 dengan probabilitas $F^*>C_0$, α, jika H_0 benar adalah $F[1-\alpha ;(K-1); K(m-1)]$, sehingga aturan keputusan untuk mengontrol kesalahan menolak H_0 dengan H_0 benar dengan taraf signifikan α adalah,

$F^* \leq F[1-\alpha ;(K-1:K(m-1)]$, disimpulkan H_0,

$F^* > F[1-\alpha ;(K-1:K(m-1)]$, disimpulkan H_1.

Jika disimpulkan H_0, yang berarti semua rata-rata populasi sama, maka disimpulkan tidak terdapat perbedaan dari K populasi tersebut, dan jika disimpulkan H_1, maka disimpulkan terdapat perbedaan dari K populasi tersebut.