BAB II
ELEMEN ELEMEN DALAM ANALISA MULTIFAKTOR

Analisa variansi multifaktor adalah analisa untuk mengetahui adanya pengaruh beberapa variabel bebas (faktor) terhadap variabel tak bebas. Termasuk didalamnya mengetahui adanya interaksi, yaitu pengaruh bersama dari dua faktor atau lebih.

Variabel merupakan karakteristik obyek-obyek yang diamati. Misalnya obyek yang diamati adalah mahasiswa, karakteristik-karakteristik tersebut antara lain : jenis kelamin, tingkat ekonomi, asal sekolah, indek prestasi.

Karakteristik tersebut menyebabkan obyek yang diamati menjadi bervariasi. Dalam contoh di atas, Jenis kelamin menyebabkan mahasiswa dibedakan atas laki-laki dan wanita, tingkat ekonomi mungkin dibedakan atas tingkat ekonomi rendah, sedang dan tinggi, dan sebagainya.

Pembeda variabel bebas dengan variabel tak bebas berdasarkan pola pemikiran sebab-akibat. Variabel tak bebas dipikirkan sebagai akibat, yang keadaannya tergantung dari variabel bebas. Misalnya dua variabel yaitu jenis kelamin dan indek prestasi. Berdasarkan pola pemikiran jenis kelamin mempengaruhi (tidak mempengaruhi) indek prestasi. Jenis kelamin sebagai variabel bebas (faktor) dan indek prestasi sebagai variabel tak bebas.

Dalam analisa multifaktor faktor-faktor yang ingin diketahui pengaruhnya, banyaknya dua atau lebih dan dianalisa secara bersama-sama. Masing-masing faktor menyebabkan variasi. Bentuk variasi dari suatu faktor disebut dengan taraffaktor. Misalnya faktor jenis kelamin, bentuk variasinya adalah laki-laki dan wanita. Laki-laki dan wanita merupakan taraffaktor-taraffaktor dari faktor jenis kelamin. Dengan adanya taraffaktor dari masing-masing faktor, obyek yang dibicarakan akan menjadi beberapa kelompok. Setiap kelompok tersebut mempunyai sifat yang ditentukan satu taraf faktor untuk masing-masing faktor. Misalnya faktor jenis kelamin dan tingkat ekonomi. Jenis kelamin mempunyai taraffaktor laki-laki dan wanita, tingkat ekonomi mempunyai taraffaktor ekonomi rendah dan ekonomi tinggi. Jika obyek pembicaraannya mahasiswa, akan terdapat empat kelompok mahasiswa yaitu : mahasiswa yang mempunyai sifat laki-laki dan tingkat ekonomi rendah, mahasiswa yang mempunyai sifat laki-laki dan tingkat ekonomi tinggi, mahasiswa yang mempunyai sifat wanita dan tingkat ekonomi rendah, dan mahasiswa yang mempunyai sifat wanita dan tingkat ekonomi tinggi. Kelompok atau kumpulan seluruh obyek yang mempunyai sifat tertentu disebut populasi. Dalam contoh diatas terdapat empat populasi. Sedangkan kumpulan obyek yang merupakan sebagian dari populasi disebut sampel.

Yang dimaksud dengan elemen dalam analisa multifaktor adalah pengaruh faktor dan interaksi faktor dari faktor-faktor yang dipelajari. Dalam bab ini akan dicari harga-harga elemen-elemen tersebut.

Sebelum membahas lebih lanjut elemen-elemen tersebut akan dibahas lebih dahulu mengenai rata-rata taraffaktor.

2.1. Rata-Rata Taraffaktor

Dalam menganalisa faktor, yang dianalisa adalah harga-harga yang ditunjukkan oleh variabel tak bebas, yang disebut dengan respon. Jika diberikan beberapa harga respon tersebut, misalnya, x_1, x_2, x_3, ...x_n. Yang dimaksud dengan rata-rata, dinotasikan dengan $\bar{x}$, adalah,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Dengan kata lain rata-rata merupakan jumlah seluruh harga pengamatan dibagi dengan banyaknya pengamatan. Sedangkan ukuran yang menunjukkan variasi dari harga-harga tersebut, atau, menunjukkan bagaimana harga-harga pengamatan menyebar dari rata-rata adalah variansi. Variansi dinotasikan dengan S^2, yaitu :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Rata-rata dari respon untuk seluruh obyek suatu populasi disebut dengan rata-rata populasi, dinotasikan dengan μ (baca : mu). Dan variansinya disebut dengan variansi populasi, dinotasikan dengan σ^2 (baca : sigma kuadrat). Sedangkan $\bar{x}$ dan S^2 masing-masing merupakan rata-rata sampel dan variansi sampel. Ukuran-ukuran yang dipikirkan untuk populasi disebut dengan parameter. μ dan σ merupakan contoh dari parameter. Ukuran yang diperoleh dari sampel disebut statistik. S^2 dan $\bar{x}$ merupakan contoh dari statistik. Statistik merupakan ukuran nyata yang memberikan informasi tentang parameter tertentu.

Analisa Variansi

Prosedur analisa variansi didasarkan pada kenyataan, bahwa apabila rata-rata populasi berbeda untuk populasi satu dengan lainnya, maka variansi seluruh obyek gabungan populasi cenderung lebih besar dari variansi masing-masing populasi. Misalnya, terdapat dua populasi masing-masing mempunyai rata-rata 0 dan 10, dengan variansi sama yaitu 1. Sebaran harga-harga dari populasi pertama berada disekitar 0, dan populasi kedua berada disekitar 10. Rata-rata gabungan populasi kira-kira akan sama dengan 5 dan variansinya jauh lebih besar dari 1, yaitu kira-kira sama dengan 25.

Analisa variansi multifaktor dilakukan dengan pemecahan variansi keseluruhan menjadi bagian-bagian yang masing-masing mengukur variasi yang disebabkan oleh berbagai sumber penyebab. Hasil pemecahan variansi ini meliputi variansi internal yaitu variansi yang mengukur variasi pada masing-masing populasi, dan variansi eksternal yaitu variansi yang mengukur variasi antar populasi. Variansi eksternal akan dipecah lagi menjadi variansi-variansi yang mengukur pengaruh masing-masing faktor dan variasi interaksi antar faktor.

Anggapan yang harus dipegang dalam analisa variansi adalah setiap populasi berdistribusi normal dan mempunyai variansi sama. Hal ini supaya dapat menyimpulkan bahwa perbedaan rata-rata sampel dari suatu populasi disebabkan karena adanya perbedaan populasi, bukan karena fluktuasi sampel saja (perbedaan yang disebabkan karena pengambilan sampel yang berbeda dari populasi yang sama).

Apabila suatu hipotesa nol (dugaan mula-mula), dinotasikan dengan Ho, mengatakan bahwa tidak ada perbedaan rata-rata populasi (tidak ada pengaruh faktor atau tidak ada interaksi faktor), anggapan bahwa variansi sama juga bisa diartikan bahwa sampel yang diamati juga berasal dari populasi yang tidak berbeda. Sehingga untuk menguji hipotesa ini diperlukan tolok ukur sampai batas mana dikatakan ada pengaruh atau interaksi berdasarkan variansi-variansinya.

Dari pemecahan variansi diperoleh ukuran-ukuran variasi pengaruh faktor, interaksi dua faktor, interaksi tiga faktor dan sebagainya. Apabila akan menguji hipotesa nol mengenai pengaruh faktor tertentu, dipakai ukuran variasi pengaruh faktor tersebut. Misalnya ukuran tersebut dinotasikan dengan MS_1^2, kemudian dibandingkan dengan ukuran variasi lainnya, misalnya dinotasikan dengan MS_2^2 (lihat pada pembahasan pengujian pada bab III, untuk menguji pengaruh faktor A_1 digunakan MSA_1 dibanding dengan MSE), sedemikian sehingga kedua ukuran tersebut mempunyai harga harapan (harga yang berlaku untuk populasi) sama jika Ho benar. Sehingga diperoleh statistik F^*, yaitu :

$$F^* = \frac{MS_1^2}{MS_2^2}$$

Jika Ho tidak benar artinya ada pengaruh faktor, MS_1 akan relatif lebih besar daripada MS_2 dan statistik F^*

cenderung lebih besardari 1. Dengan demikian dapat menyatakan apakah Ho benar atau tidak.

Secara lebih khusus, untuk uji hipotesa nol harus diketahui distribusi dari F^*. Hal ini akan dibicarakan pada sub-bab "Pengujian" pada bab-bab selanjutnya.

Taraffaktor

Telah disinggung di atas, bahwa taraffaktor adalah bentuk variasi yang disebabkan oleh suatu faktor. Dengan kata lain taraffaktor adalah bentuk tertentu dari faktor. Apabila faktor tersebut adalah metode mengajar, maka terdapat beberapa taraffaktor katakanlah metode 1, metode 2 dan metode 3. Obyek pembicaraan (siswa) terbagi atas tiga populasi yaitu : populasi siswa yang diajar dengan metode 1, populasi siswa yang diajar dengan metode 2 dan populasi siswa yang diajar metode 3.

Sekarang jika faktor yang dipelajari sebanyak n yakni : $A_1, A_2, \ldots, A_n$, masing-masing mempunyai a_t taraffaktor, $t=1,2,\ldots n$. Taraffaktor-taraffaktor dari A_t dinamakan taraffaktor ke i_t, $i_t=1,2,\ldots.a_t$. Dari faktor A_1 mengakibatkan obyek pembicaraan menjadi a_1 populasi, kemudian dari faktor A_2, a_1 populasi tersebut masing-masing dibedakan lagi menjadi a_2 populasi, demikian seterusnya sehingga terdapat $a_1 x a_2 x \ldots x a_n$ populasi yang mempunyai sifat berbeda. Misalnya tiga faktor, yaitu jenis kelamin dengan taraffaktor laki-laki dan wanita, metode mengajar dengan taraffaktor metode 1 dan metode 2. dan tingkat kecerdasan dengan taraffaktor tingkat tinggi dan tingkat rendah. Masing-masing faktor terdapat 2 taraf-faktor, sehingga terdapat 2 x 2 x 2 = 8 populasi.

Rata-Rata Populasi

Faktor-faktor yang dipelajari adalah $A_1, A_2, \ldots, A_n$, masing-masing menpunyai taraffaktor $i_1=1,2,\ldots a_1$, $i_2=1, 2,\ldots a_2$, ..., $i_n=1,2,\ldots a_n$. Sehingga akan terdapat $a_1 x a_2 x \ldots \ldots x a_n$ populasi. Banyaknya populasi dinotasikan dengan K. Jadi terdapat K populasi.

Setelah respon diidentifikasi (misalnya untuk prestasi belajar adalah nilai ujian) dan pengamatan dilakukan terhadap semua obyek, maka akan diperoleh rata-rata sebenarnya untuk masing-masing populasi. Rata-rata ini disebut dengan rata-rata populasi. Rata-rata dari populasi yang mempunyai sifat faktor A_1 pada taraf i_1, faktor A_2 pada taraf i_2, dan seterusnya, dinotasikan dengan,

$$\mu_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n} \quad \text{atau} \quad \mu_{i_1 \ldots i_n}$$

dengan, $i_1 = 1,2,3,\ldots.a_1$, $i_2 = 1,2,3,\ldots.a_2$, ...
$i_n = 1,2,3,\ldots a_n$.

(Untuk menyatakan $\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}$ cukup dengan $\mu_{i_1 \ldots i_5}$)

Contoh :

1. $\mu_{\underbrace{111111}_{n}}$ adalah rata dari populasi yang mempunyai sifat faktor A_1 pada taraffaktor 1, faktor A_2 pada taraf 1, dan seterusnya sampai dengan faktor A_n pada taraffaktor 1.

2. Misalnya faktor yang dipelajari adalah jenis ke-

lamin dengan taraffaktor pertama laki-laki, taraffaktor kedua wanita, dan faktor metode mengajar dengan taraffaktor pertama metode 1, taraffaktor kedua metode 2.Jika obyeknya adalah siswa dan respon yang diamati adalah nilai ujian, maka,

$\mu_{1\ 1}$ adalah rata-rata nilai ujian dari seluruh siswa laki-laki yang diajar dengan metode 1.

$\mu_{1\ 2}$ adalah nilai ujian dari seluruh siswa laki-laki yang diajar demgan metode 2,

$\mu_{2\ 1}$ adalah rata-rata seluruh siswa wanita yang diajar dengan metode 1,

$\mu_{2\ 2}$ adalah rata-rata nilai ujian dari seluruh siswa wanita yang diajar dengan metode 2.

Dalam pembahasan bab II ini rata-rata dari setiap populasi dianggap diketahui. Misalnya dalam contoh 2 di atas nilai ujian setiap individu dari masing-masing populasi diketahui, kemudian masing-masing diambil rata-ratanya, sehingga diperoleh rata-rata populasi (rata-rata sebenarnya) dari masing-masing populasi, yaitu: μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} dan μ_{22}.

Rata-Rata Taraffaktor

Dipikirkan rata-rata populasi $\mu_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n}$, dengan i_t adalah taraffaktor dari faftor A_t sembarang, $1 \leq t \leq n$. Apabila indek yang lain dalam keadaan tertentu (faktor lain pada taraffaktor yang tertentu) dan i_t berjalan dari 1 sanpai dengan a_t, maka didapatkan a_t rata-rata populasi yaitu : $\mu_{i_1 \ldots i_{t-1}\ 1\ i_{t+1} \ldots i_n}$, $\mu_{i_1 \ldots i_{t-1}\ 2\ i_{t+1} \ldots i_n}$,........, $\mu_{i_1 \ldots i_{t-1}\ a_t\ i_{t+1} \ldots i_n}$. Rata-rata dari a_t rata-rata populasi ini disebut dengan rata-rata taraffaktor dari faktor A_t, ketika faktor $A_{t'}$, $t' \neq t$, pada taraffaktor $i_{t'}$, dinotasikan dengan $\mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n}$.

Jadi,

$$\mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n} = \frac{\sum_{i_t}^{a_t} \mu_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n}}{a_t} \qquad (2.1.1)$$

dengan,

Σ menyatakan jumlahan berdasarkan harga indek i_t,

Dot (.) dalam indek menyatakan harga-harga indek yang diwakili dot tersebut, dan menunjukkan bahwa rata-rata taraffaktor tersebut merupakan rata-rata dari rata-rata populasi untuk semua harga indek yang diwakili.

Demikian pula untuk dua indek $i_{t1}=1,2,3,..a_{t1}$ dan $i_{t2}=1,2,...a_2$. Akan diperoleh rata-rata taraffaktor dari faktor A_{t1} dan A_{t2} dimana faktorfaktor lain pada taraf-faktor tertentu, dinotasikan dengan,

$\mu_{i_1 .. i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} .. i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} .. i_n}$, yaitu :

$$\mu_{i_1 .. i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} .. i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} .. i_n} = \frac{\sum_{i_{t1}}^{a_{t1}} \sum_{i_{t2}}^{a_{t2}} \mu_{i_1 .. i_{t1} . i_{t2} . i_n}}{a_{t1} \times a_{t2}} \qquad ....(2.1.2)$$

Rata-rata taraffaktor untuk tiga faktor, empat faktor dan sebagainya dicari dengan jalan yang sama.

Rata-rata taraffaktor ketika faktor A_t pada taraffaktor i_t, adalah,

$$\mu_{\ldots i_t \ldots} = \frac{\sum_{i_1} \ldots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \ldots \sum_{i_n} \mu_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n}}{a_1 \times \ldots \times a_{t-1} \times a_{t+1} \ldots \times a_n} \qquad \ldots\ldots(2.1.1)$$

Akhirnya diperoleh rata-rata taraffaktor dari seluruh faktor, dinotasikan dengan ,

$$\mu_{\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n}} \quad \text{atau} \quad \mu_{(n\ \cdot)}, \text{ yaitu :}$$

$$\mu_{(n\ \cdot)} = \frac{\sum_{i_1}^{a_1} \sum_{i_2}^{a_2} \ldots \sum_{i_n}^{a_n} \mu_{i_1 \ldots i_n}}{a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_n} \qquad \ldots\ldots(2.1.3)$$

$\mu_{(n\ \cdot)}$ merupakan rata-rata dari seluruh rata-rata populasi.

2.2. Pengaruh Khusus Dan Pengaruh Utama

Pengaruh khusus faktor A_t pada taraffaktor ke i_t, dinotasikan dengan $(\alpha_t)_{i_t(i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_n)}$ merupakan selisih rata-rata populasi $\mu_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n}$ dengan rata-rata taraffaktor, $\mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n}$. Jadi,

$$(\alpha_t)_{i_t(i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n)} = \mu_{i_1 \ldots i_t \ldots i_n} - \mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.1)$$

dimana $i_t = 1, 2, \ldots\ldots a_t$.

Pengaruh utama faktor A_t pada taraffaktor i_t dinotasikan dengan $(\alpha_t)_{i_t}$, didefinisikan sebagai rata-rata dari dari seluruh pengaruh khusus faktor A_t pada taraf i_t(untuk indek yang lain berjalan). Jadi,

$$(\alpha_t)_{i_t} = \frac{\sum_{i_1} \ldots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \ldots \sum_{i_n} (\alpha_t)_{i_t(i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_n)}}{a_1 \times \ldots \times a_{t-1} \times a_{t+1} \ldots \times a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.2)$$

Pengaruh utama faktor A_t pada taraf i_t, $(\alpha_t)_{i_t}$, dapat dinyatakan sebagai selisih rata-rata taraffaktor ketika faktor A_t pada taraffaktor i_t(rata-rata taraffaktor dari faktor A_j untuk semua j=1,2,...n, j≠t), $\mu_{\ldots i_t \ldots}$ dan rata-rata keseluruhan, $\mu_{(n.)}$. jadi,

$$(\alpha_t)_{i_t} = \mu_{\cdot\ \cdot\ \cdot i_t \cdot\ \cdot} - \mu_{(n\ .)} \qquad \ldots\ldots(2,2,3)$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

karena,

$$(\alpha_t)_{i_t(i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_n)}$$

$$= \mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n}, \text{ maka,}$$

$$(\alpha_t)_{i_t} = \frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n} (\mu_{i_1 \ldots i_n} - \mu_{i_1 \ldots i_{t-1} \cdot i_{t+1} \ldots i_n})}{a_1 x \ldots x\ a_{t-1} x a_{t+1} \ldots x\ a_n}$$

karena,

$$\frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n} \mu_{i_1 \ldots i_n}}{a_1 x \ldots x\ a_{t-1} x a_{t+1} \ldots x\ a_n} = \mu_{\cdot\ \cdot\ \cdot i_t \cdot\ \cdot}, \text{ dan}$$

$$\frac{\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_{t-1}} \sum_{i_{t+1}} \cdots \sum_{i_n} \mu_{i_1 -- i_{t-1} \cdot i_{t+1} -- i_n}}{a_1 x \ldots x\ a_{t-1} x a_{t+1} \ldots x\ a_n} = \mu_{(n\ .)}, \text{ maka,}$$

$$(\alpha_t)_{i_t} = \mu_{\cdot\ \cdot\ \cdot i_t \cdot\ \cdot} - \mu_{(n\ .)}.$$

Dan dapat diperlihatkan bahwa jumlah pengaruh utama faktor A_t untuk semua harga indek i_t adalah nol.

$$\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)$$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut,

$$\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t} = \sum_{i_t} (\mu_{\cdot\ \cdot\ \cdot i_t \cdot\ \cdot} - \mu_{(n\ .)})$$

$$= \sum_{i_t} \mu_{\cdot\cdot\cdot i_t \cdot\cdot} - a_t\, \mu_{(n\,\cdot)}, \text{ karena,}$$

$$\mu_{(n.)} = \frac{\sum_{i_t} \mu_{\cdot\cdot\cdot i_t \cdot\cdot}}{a_t}, \quad \text{atau} \quad \sum_{i_t} \mu_{\cdot\cdot i_t \cdot\cdot} = a_t \mu_{(n.)}$$

sehingga,

$$\sum_{i_t} (\alpha_t)_{i_t} = 0.$$

2.3. Interaksi Khusus Dan Interaksi Utama

Interaksi Dua Faktor

Interaksi dua faktor adalah besarnya pengaruh yang disebabkan dua faktor secara bersama-sama.

Dua faktor dikatakan berinteraksi apabila terdapat dua taraffaktor, i_{t1}' dan i_{t1}'' dari faktor A_{t1} dan terdapat taraffaktor i_{t2} dari faktor A_{t2}, sedemikian sehingga pengaruh khusus faktor A_{t2} pada taraf i_{t2} ketika faktor A_{t1} pada taraf i_{t1}', $(\alpha_{t2})_{i_{t2}(i_1 \ldots i_{t1}' \ldots i_{t2-1} i_{t2+1} . i_n)}$ berbeda dengan ketika faktor A_{t1} pada taraf i_{t1}'', $(\alpha_{t2})_{i_{t2}(i_1 \ldots i_{t1}'' \ldots i_{t2-1} i_{t2+1} \ldots i_n)}$, jadi,

$$(\alpha_{t2})_{i_{t2}(i_1 \ldots i_{t1}' \ldots i_{t2-1} i_{t2+1} . i_n)} \neq$$

$$(\alpha_{t2})_{i_{t2}(i_1 \ldots i_{t1}'' \ldots i_{t2-1} i_{t2+1} . i_n)} \qquad \ldots\ldots.(2.3.1)$$

Sebaliknya jika A_{t1} dan A_{t2} tidak berinteraksi, maka untuk semua taraffaktor $i_{t1}=1,2,\ldots a_{t1}$ dari faktor A_{t1} dan semua taraffaktor $i_{t2}=1,2,\ldots a_{t2}$ dari faktor A_{t2}, pengaruh khusus faktor A_{t1} maupun faktor A_{t2} akan konstan.

Interaksi khusus dua faktor A_{t1} dan A_{t2}, masing-masing pada taraffaktor i_{t1} dan i_{t2} dinotasikan dengan, $(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1} i_{t2}(i_1 \ldots i_{t1-1} i_{t1+1} \ldots i_{t2-1} i_{t2+1} \ldots i_n)}$, merupakan selisih rata-rata populasi ketika faktor A_{t1} pada taraf-faktor i_{t1} dan faktor A_{t2} pada taraffaktor i_{t2}, (faktor lain pada taraffaktor yang tertentu), dengan rata-rata populasi tersebut jika dipikirkan tidak ada interaksi. Besarnya interaksi tersebut dicari sebagai berikut :

Apabila dipikirkan A_{t1} dan A_{t2} tidak berinteraksi, maka pengaruh khusus, $(\alpha_{t2})_{i_{t2}(i_1..i_{t1}..i_{t2-1}i_{t2+1}..i_n)} = w$, ($w$=konstan), untuk semua harga $i_{t2}=1,2,...a_{t2}$ dan $i_{t1} = 1, 2,....a_{t2}$. Berdasarkan persamaan (2.2.1), diperoleh,

$$\mu_{i_1..i_{t1}..i_{t2}..i_n} - \mu_{i_1..i_{t1}..i_{t2-1}.i_{t2+1}..i_n} = w \qquad \text{.....................(2.3.2a)}$$

Jika persamaan (2.3.2a) dijumlahkan berdasarkan harga-harga indek i_{t1}, kemudian dibagi dengan a_{t1}, didapat

$$\mu_{i_1..i_{t1-1}.i_{t1+1}..i_{t2}..i_n} - \mu_{i_1..i_{t1-1}.i_{t1+1}..i_{t2-1}.i_{t2+1}..i_n)} = w \qquad \text{...............(2.3.2b)}$$

Dari persamaan (2.3.2a) dan (2.3.2b), diperoleh

$$\mu_{i_1..i_{t1}..i_{t2}..i_n} = \mu_{i_1..i_{t1-1}.i_{t1+1}..i_{t2}..i_n} + \mu_{i_1..i_{t1}..i_{t2-1}.i_{t2+1}..i_n} - \mu_{i_1..i_{t1-1}.i_{t1+1}..i_{t2-1}.i_{t2+1}..i_n} \qquad \text{.......(2.3.2c)}$$

Jika terdapat interaksi, terdapat i_{t1} dan i_{t2} sedemikian sehingga persamaan (2.3.2c) menjadi pertidaksamaan. Sehingga besar interaksi khusus dua faktor A_{t1} dan A_{t2} masing-masing pada taraffaktor i_{t1} dan i_{t2}, adalah :

$$(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}(i_{t1-1}i_{t1+1}..i_{t2-1}i_{t2+1}..i_n)} =$$

$$\mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot i_n} - \mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot i_n} -$$
$$\mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} \cdot\cdot i_n}) -$$
$$\mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \cdot\cdot i_{t2-2} \cdot i_{t2+1} \cdot\cdot\cdot i_n} \cdot \quad \ldots\ldots(2.3.3)$$

Interaksi utama dua faktor A_t dan A_t masing-masing pada taraffaktor i_{t1} dan i_{t2} dinôtasikan dengan $(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}}$, merupakan rata-rata dari seluruh interaksi khusus faktor A_{t1} dan A_{t2} pada taraffaktor i_{t1} dan i_{t2}.

$$(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} =$$
$$\frac{\sum_{i_1} \sum_{i_{t1-1}} \sum_{i_{t1+1}} \sum_{i_{t2-1}} \sum_{i_{t2+1}} \sum_{i_n} (A_{t1}A_{t2})}{a_1 x \ldots x\ a_{t1-1} x a_{t1+1} \cdot\cdot x a_{t2-1} x a_{t2+1} \cdot\cdot x a_n}$$

dengan,

$$(A_{t1}A_{t2}) = (\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}(i_{t1-1} i_{t1+1} \cdot\cdot i_{t2-1} i_{t2+1} \cdot\cdot i_n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.4)$$

Dari persamaan (2.3.3), persamaan (2.3.4) diperoleh,

$$(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = \mu_{\cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot} - \mu_{\cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot} - \mu_{\cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot} +$$
$$\mu_{(n,\cdot)} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.5)$$

sebab,

$$\frac{\sum_{i_1} \cdot\cdot \sum_{i_{t1-1}} \sum_{i_{t1+1}} \cdots \sum_{i_{t2-1}} \sum_{i_{t2+1}} \cdots \sum_{i_n} \mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot i_n}}{a_1 x \ldots x\ a_{t1-1} x a_{t1+1} \cdot\cdot x a_{t2-1} x a_{t2+1} \cdot\cdot x a_n} =$$

$$\mu_{\cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot},$$

$$\frac{\sum_{i_1} \cdot\cdot \sum_{i_{t1-1}} \sum_{i_{t1+1}} \cdots \sum_{i_{t2-1}} \sum_{i_{t2+1}} \cdots \sum_{i_n} \mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot i_{t2-1} \cdot i_{t2+1} \cdot\cdot\cdot i_n}}{a_1 x \ldots x\ a_{t1-1} x a_{t1+1} \cdot\cdot x a_{t2-1} x a_{t2+1} \cdot\cdot x a_n} =$$

$$\mu_{\cdot\cdot i_{t1} \cdot\cdot},$$

$$\frac{\sum_{i_1} \cdot\cdot \sum_{i_{t1-1}} \sum_{i_{t1+1}} \cdots \sum_{i_{t2-1}} \sum_{i_{t2+1}} \cdots \sum_{i_n} \mu_{i_1 \cdot\cdot i_{t1-1} \cdot i_{t1+1} \cdot\cdot i_{t2} \cdot\cdot i_n}}{a_1 x \ldots x\ a_{t1-1} x a_{t1+1} \cdot\cdot x a_{t2-1} x a_{t2+1} \cdot\cdot x a_n} =$$

$\mu_{..i_{t2}..}$,

$$\frac{\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_{t1-1}}\sum_{i_{t1+1}}\cdots\sum_{i_{t2-1}}\sum_{i_{t2+1}}\cdots\sum_{i_n}\mu_{i_1..i_{t1-1}.i_{t1+1}..i_{t2-1}.i_{t2+1}..i_n}}{a_1x\ldots x\ a_{t1-1}xa_{t1+1}x\ldots xa_{t2-1}xa_{t2+1}x\ldots xa_n} =$$

$\mu_{(n\ .)}$.

Dengan persamaan (2.3.5) dapat ditunjukkan bahwa,

$$\sum_{i_t=1}^{a_t}(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = 0\ ,\ t = t_1, t2. \qquad \ldots\ldots.(2.3.6)$$

Berdasarkan persamaan (2.2.3), untuk faktor A_{t1} pada taraf-taraffaktor i_{t1} dan faktor A_{t2} pada taraffaktor i_2, dan dengan persamaan (2.3.5), diperoleh hubungan sebagai berikut,

$$(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} = \mu_{..i_{t1}..i_{t2}..} - (\alpha_{t1})_{i_{t1}} - (\alpha_{t2})_{i_{t2}} - \mu_{(n,.)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.7)$$

Dari uraian diatas secara empiris dapat diturunkan besar interaksi utama untuk k-faktor, dimana $k \le n$, yaitu

$$(\alpha_{t1}\alpha_{t2}\ldots\alpha_{tk})_{i_{t1}\ldots i_{tk}} =$$
$$\mu_{..i_{t1}..i_{t2}..,\ldots,i_{tk}..} - [(\alpha_{t1})_{i_{t1}} + \ldots\ldots + (\alpha_{tk})_{i_{tk}}] -$$
$$[(\alpha_{t1}\alpha_{t2})_{i_{t1}i_{t2}} + \ldots.+ (\alpha_{tk-1}\alpha_{tk})_{i_{tk-1}i_{tk}}] - \ldots\ldots -$$
$$\mu_{(n,.)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.8)$$

dan,

$$\sum_{i_{tj}=1}^{a_{tj}}(\alpha_{t1}\ldots\alpha_{tk})_{i_{t1}\ldots i_{tk}} = 0\ , \quad \text{untuk setiap}$$
$$j=1,2,\ldots k. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.9)$$

Jika diambil k = n, diperoleh besar interaksi n-faktor,

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)_{i_1\ldots i_n} =$$

$$\mu_{i_1 \ldots i_n} - [(\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}] - [(\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n}] - \ldots - [(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})_{i_1 \ldots i_{n-1}} + \ldots + (\alpha_2 \ldots \alpha_n)_{i_2, \ldots i_n}] - \mu_{(n,.)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.10)$$

dan, $\sum_{i_t=1}^{a_t} (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)_{i_1 \ldots i_n} = 0, \; t = 1,2,\ldots n.$ ....(2.3.11)

Dari persamaan (2.3.17), diperoleh persamaan ,

$$\mu_{i_1 \ldots i_n} = \mu_{(n,.)} + [(\alpha_1)_{i_1} + \ldots + (\alpha_n)_{i_n}] + [(\alpha_1\alpha_2)_{i_1 i_2} + \ldots + (\alpha_{n-1}\alpha_n)_{i_{n-1} i_n})] + \ldots + (\alpha_1 \ldots \alpha_n)_{i_1 \ldots i_n}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.12)$$

Persamaan (2.3.12) menunjukkan bahwa setiap rata-rata subpopulasi ditentukan oleh rata-rata populasi keseluruhan pengaruh utama dari semua faktor dan interaksi utama faktor-faktornya.

Untuk pembahasan selanjutnya pengaruh utama dan interaksi utama masing-masing disebut dengan pengaruh faktor dan interaksi faktor. Pengaruh faktor dan interaksi inilah yang disebut dengan elemen-elemen dalam analisa multifaktor, dimana akan diuji keberadaannya dalam pembahasan analisa variansi pada bab-bab selanjutnya.