BAB II

MATERI DASAR

2.1. RELASI DAN FUNGSI

Dalam pembahasan Pengantar Ruang Uniform, Relasi dan Fungsi merupakan teori dasar dari Ruang Uniform. Sehingga pengertian-pengertian yang ada pada Relasi dan Fungsi sangat diperlukan untuk pembahasan teorema-teorema selanjutnya. Relasi maupun fungsi pada pembahasan ini didefinisikan sebagai himpunan bagian dari pergandaan kartesius dari himpunan-himpunan tertentu.

Definisi 2.1.1

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah:
Himpunan pasangan berurutan (a,b) dalam A X B yang mana $a \in A$ dan $b \in B$.

Relasi R ini dapat juga dinotasikan sebagai berikut:

$R: A \dashrightarrow B$ atau $a\,R\,b$, $a \in A$ dan $b \in B$.

Untuk notasi bukan Relasi R adalah $a \not R\, b$, $a \in A$, $b \in B$.
Jadi dengan kata lain bahwa Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan pasangan berurutan yang merupakan himpunan bagian dari A X B.

Definisi 2.1.2

Diberikan Relasi R, $R \subset A \times B$
Yang dimaksud invers dari R yang dinotasikan R^{-1} adalah $\{(b,a);\ (a,b) \in R\}$

Definisi 2.1.3

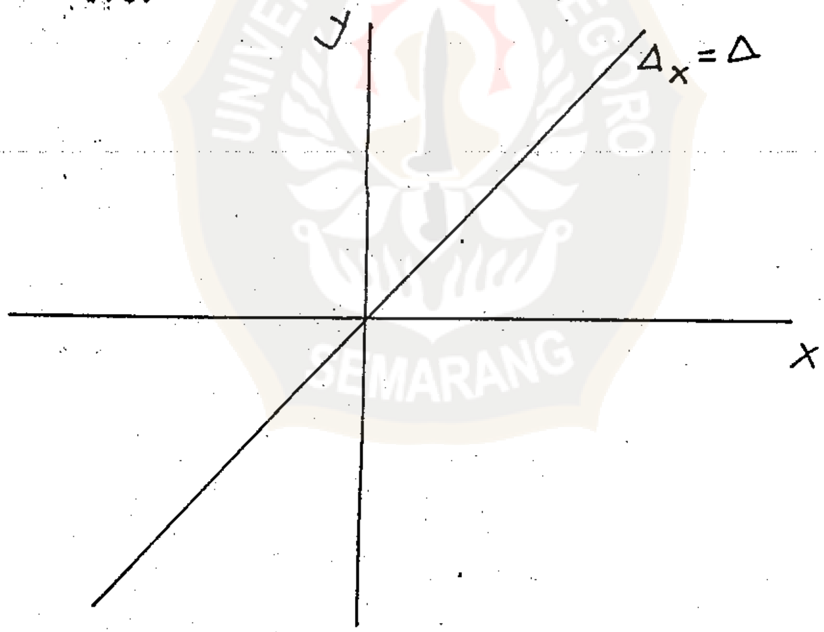
Relasi identitas dari suatu himpunan A dengan notasi $\triangle_A$ atau disingkat $\triangle$ adalah himpunan pasangan berurutan (a,a), $a \in A$.

Pada diagram kartesius Relasi identitas atau $\triangle$ disebut sebagai diagonal.

Contoh 2.1.1

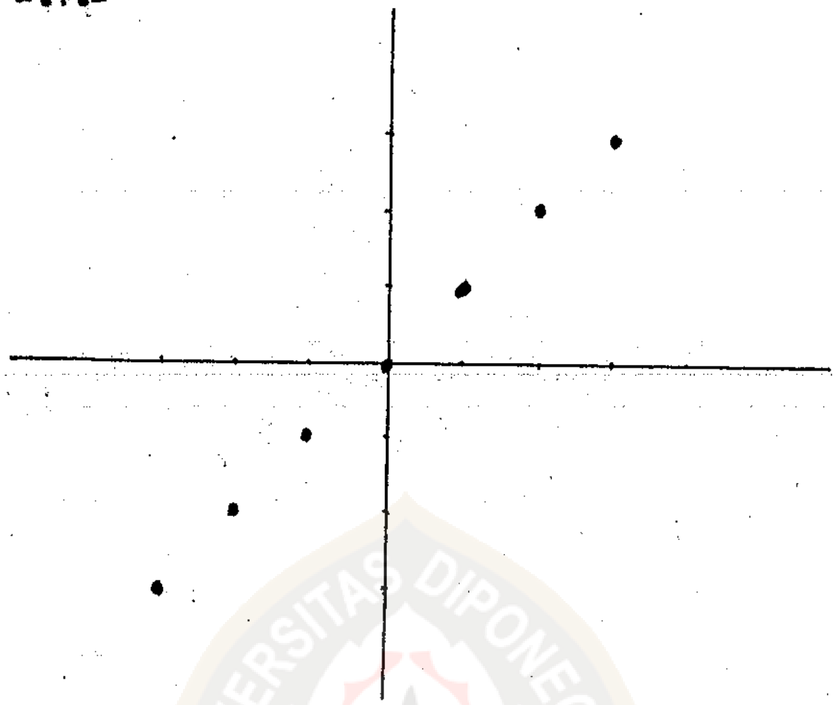
1. Diberikan X himpunan bilangan Riil, maka $\triangle = \{(x,x),\ x \in X\}$
   Relasi identitas ini dapat dinyatakan dalam grafik kartesius sebagai berikut:

   Gambar 2.1.1



2. Diberikan himpunan $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   Relasi identitas dari himpunan A adalah $= \{(x,x),\ x \in A\}$
   atau $\triangle_A = \triangle = \{(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ dalam grafik kartesius sebagai titik-titik yang berada pada diagonal.

Gambar 2.1.2



Definisi 2.1.4

Diberikan Relasi U, $U \subset X \times X$

Bayangan $a \in X$ dari Relasi U dinotasikan U (a) adalah $\{y \mid (a,y) \in U\}$ dan selanjutnya jika $A \subset X$, maka $U(A) = \{y \mid (a,y) \in U,\ a \in A\}$

Catatan 2.1.1

Relasi U dikatakan simetris jika dan hanya jika $U = U^{-1}$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

U simetris jika dan hanya jika $\{ y \mid (a,y) \in U\} = \{y \mid (y,a) \in U\}$

Contoh 2.1.2

1. Diberikan Relasi U, $U \subset X \times X$ sebagai berikut:

   $U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)\}$

   Relasi invers dari U adalah:

   $U^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (3,2), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

   karena $U = U^{-1}$, maka U dikatakan Relasi yang simetris.

2. Diberikan himpunan $A \subset X$

Relasi V dinyatakan sebagai berikut:

$V = \{(x,y), \ |x-y| < r, \ x,y \in A\}$, di mana r untuk sembarang bilangan riil positip.

Relasi invers dari V adalah $V^{-1} = \{(y,x), (x,y) \in V\}$

$V^{-1} = \{(y,x), \ |y-x| < r \ , \ r \in R^{+}\}$

$V^{-1} = \{(y,x), \ |y-x| = |x-y| < r$, sehingga $V = V^{-1}$

Jadi Relasi V adalah Relasi yang simetris.

Definisi 2.1.5

Diberikan Relasi U dan Relasi V , di mana $U \subset A \times B$ dan $V \subset B \times C$

$A \ , B \ , C \subset X$

Komposisi relasi U dan V yang dinotasikan V o U adalah himpunan semua pasangan (a,c) sedemikian sehingga terdapat $b \in B$ yang berlaku $(a,b) \in U$ dan $(b,c) \in V$

Atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

$V \circ U = \{(a,c) \ : \ a \in A \ , \ c \in C$; terdapat $b \in B$ sedemikian sehingga $(a,b) \in U \ , (b,c) \in V\}$

Contoh 2.1.3

1. Diberikan suatu himpunan A,B dan C yang dinyatakan sebagai berikut:

$A : \{1,2,3,4\}$

$B : \{a,b,c\}$

$C : \{5,6,7,8\}$

dan Diberikan juga suatu Relasi U, V sebagai berikut:

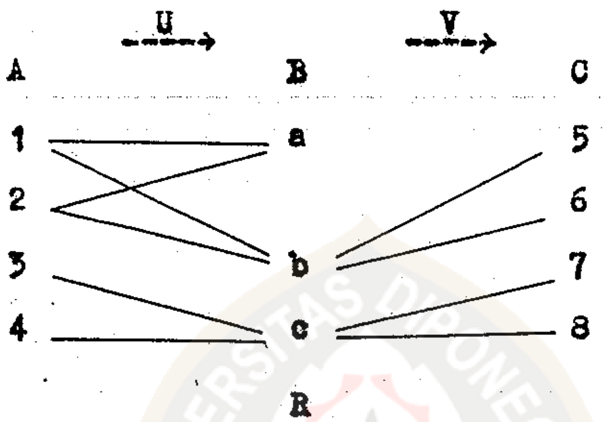
$U : \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,c), (4,c)\}$

$V : \{(b,5), (b,6), (c,8), (c,7)\}$

maka komposisi Relasi U dan V adalah sebagai berikut:

$$V \circ U = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,7),(3,8),(4,7),(4,8)\}$$

Dalam penyelesaian menentukan himpunan penyelesaian ini dapat juga dengan bantuan diagram sebagai berikut:



$$R = U \circ V = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,7),(3,8),(4,7),(4,8)\}$$

2. Diberikan relasi dalam himpunan bilangan Riil, yang didefinisikan sebagai berikut:

$U : \{(x,y),\ 0 \leq x - y \leq 1\ ,\ x,y \in R\}$

R : himpunan bilangan Riil.

Tunjukkan bahwa $U \circ U^{-1} = \{(x,z) : |x - z| \leq 1\}$

Penyelesaian:

Dari definisi 2.1.5, maka

$$\begin{aligned} U \circ U^{-1} &= \{(x,z) : y \in R \text{ sedemikian sehingga } (x,y) \in U^{-1}, (y,z) \in U \\ &= \{(x,z) : y \in R \text{ sedemikian sehingga } (y,x),\ (y,z) \in U \\ &= \{(x,z) : y \in R \text{ sedemikian sehingga } 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq (y - z) \leq 1 \end{aligned}$$

Sekarang dimisalkan $S = \{(x,z) : |x - z| < 1\}$, akan kita tunjukkan $U \circ U^{-1} = s$

Diberikan $(x,z) \in U \circ U^{-1}$, maka ada $y \in R$ sedemikian sehingga $0 \leqslant y - x \, , \, y - z \leqslant 1$. Tetapi dari

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant y - x \, , \, y - z \leqslant 1 \quad & \Rightarrow \quad y - z \leqslant 1 \\
& \Rightarrow \quad y - z \leqslant 1 + y - x \\
& \Rightarrow \quad x - z \leqslant 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ i)}
\end{aligned}
$$

Kemudian dari

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant y - x \, , \, y - z \leqslant 1 \quad & \Rightarrow \quad y - x \leqslant 1 \\
& \Rightarrow \quad y - x \leqslant 1 + y - z \\
& \Rightarrow \quad -1 \leqslant x - z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ii)}
\end{aligned}
$$

dari i) dan ii) $0 \leqslant y - x \, , \, y - z \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x - z \leqslant 1$

Jadi $|x - z| \leqslant 1$ sehingga $(x,z) \in S$

Oleh karenanya $U \circ U^{-1} \subset S$

Untuk selanjutnya, Diberikan $(x,z) \in S$, maka $|x - z| \leqslant 1$.
Diberikan juga y = maka (x,z) , maka berlaku

$0 \leqslant y - x \leqslant 1$ dan $0 \leqslant y - z \leqslant 1$

(y,x) : $0 \leqslant y - x \leqslant 1$, maka $(y,x) \in U$ dan oleh karenanya $(x,y) \in U^{-1}$.

(y,z) : $0 \leqslant y - z \leqslant 1$, maka $(y,z) \in U$

Oleh karenanya $(x,z) \in U \circ U^{-1}$. (dari definisi 2.1.5).
Jadi $S \subset U \circ U^{-1}$.

dari $U \circ U^{-1} \subset S$ dan $S \subset U \circ U^{-1}$, maka terbukti $U \circ U^{-1} = S$ atau

$$U \circ U^{-1} = \{ (x,z) : |x - z| \leqslant 1 \}$$

CATATAN 2.1.2

Sifat-sifat yang ada pada komposisi Relasi.

Diberikan Relasi-relasi U , V , $W \subset X \times X$

1. $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$

BUKTI

$(U \circ V) \circ W = \{ (x,y) : \exists a \in X$ sedemikian sehingga $(x,a) \in W$ dan $(a,y) \in (U \circ V)$

$= \{ (x,y) : \exists a \in X, \exists b \in X$ sedemikian sehingga $(x,a) \in W$ dan $(a,b) \in V$, $(b,y) \in U \}$

$= \{ (x,y) : \exists b \in X$ sedemikian sehingga $(x,b) \in V \circ W$ dan $(b,y) \in U \}$

$= U \circ (V \circ W)$

Jadi terbukti $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$, sehingga komposisi Relasi-relasi berlaku sifat asosiatif.

2. $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$

BUKTI

$(U \circ V)^{-1} = \{ (x,y) : (y,x) \in U \circ V \}$

$= \{ (x,y) : \exists b \in X$ sedemikian sehingga $(y,b) \in V$ dan $(b,x) \in U \}$

$= \{ (x,y) : \exists b \in X$ sedemikian sehingga $(b,y) \in V^{-1}$ dan $(x,b) \in U^{-1} \}$

$= \{ (x,y) : \exists b \in X$ sedemikian sehingga $(x,b) \in U^{-1}$ dan $(b,y) \in V^{-1} \}$

$= V^{-1} \circ U^{-1}$

Jadi terbukti $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$.

3. $U \circ U^{-1} = U^{-1} \circ U$ Untuk U simetris yaitu $U = U^{-1}$

BUKTI

$U \circ U^{-1} = \{ (x,y), \exists a \in X$ sedemikian sehingga $(x,a) \in U^{-1}$ dan $(a,y) \in U \}$

$= \{ (x,y), \exists a \in X$ sedemikian sehingga $(x,a) \in U$ dan

$(a,y) \in U^{-1}\}$

$= U^{-1} \circ U$

4. $U \circ \Delta = \Delta \circ U$. Di mana Δ diagonal atau Relasi Identitas.

BUKTI

$U \circ \Delta = \{(x,y) : \exists a \in X$ sedemikian sehingga $(x,a) \in \Delta$ dan $(a,y) \in U\}$

$(x,a) \in \Delta$, maka $x = a$

$= \{(x,y) : (x,x) \in \Delta$ dan $(x,y) \in U\}$

$= \{(x,y) : (x,y) \in U$ dan $(x,x) \in \Delta\}$

x sebarang dalam X, dan sekarang diambil $y \in X$

$= \{(x,y) : (x,y) \in U$ dan $(y,y) \in \Delta\}$

$= U \circ \Delta$

LEMMA 2.1.1

Diberikan V Simetris , maka $V \circ U \circ V = \bigcup \{V(x) \times V(y), (x,y) \in U\}$

BUKTI

$\Leftarrow$ Dimulai dari pengertian $V \circ U \circ V$ terlebih dahulu.

$V \circ U \circ V = \{(u,v) : \exists x \in X, \exists y \in X$ sedemikian sehingga $(u,x) \in V$, $(x,y) \in U$ dan $(y,v) \in V\}$

V diambil simetris, sehingga $V = V^{-1}$

Oleh karenanya jika $(u,x) \in V$, maka $(u,x) \in V^{-1}$

Kemudian karena $(u,x) \in V^{-1}$, maka $(x,u) \in V$.

$(x,u) \in V$, $u \in V(x)$ dan dari $(y,v) \in V$, maka $v \in V(y)$

Jadi untuk setiap $(x,y) \in U$ berlaku $U \in V(x)$ dan $V \in V(y)$.
Tetapi $U \in V(x)$ dan $v \in V(y)$ jika $(U,v) \in \{V(x) \times V(y)\}$
sehingga $(U,V) \in \{V(x) \times V(y)\}$ untuk setiap $(x,y) \in U$
Oleh karenanya $V \circ U \circ V \subset \bigcup \{V(x) \times V(y)\}$ ....i)

$\Leftarrow$ Diberikan $(U,V) \in \bigcup\{V(x) \times V(y)\}$ maka
$u \in V(x)$ dan $v \in V(y)$

dari $u \in V(x)$, maka $(x,u) \in V$ dan dari $v \in V(y)$, maka $(y,v) \in V$

Diambil V Simetris maka $V = V^{-1}$, sehingga $(u,x) \in V$ dan $(y,V) \in V$

Diberikan (x,y) sebarang dalam U, sedemikian sehingga $(u,x) \in V$
V, $(x,y) \in U$ dan $(y,v) \in V$

Oleh karenanya $(u,v) \in V \circ U \circ V$

Jadi $\bigcup\{V(x) \times V(y)\} \subset V \circ U \circ V$ ....ii)

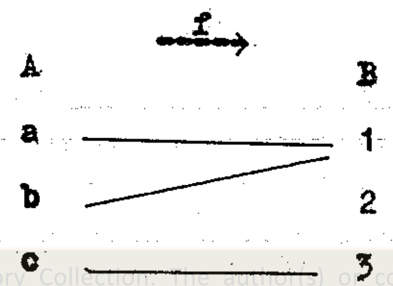
Dari i) dan ii) maka terbukti $V \circ U \circ V = \bigcup\{V(x) \times V(y)\}$.

Definisi 2.1.6

Suatu Relasi f yang mengkawankan himpunan A ke himpunan B yang biasanya dinotasikan $f : A \longrightarrow B$ dikatakan merupakan fungsi, jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ mempunyai satu kawan di himpunan B.

Contoh 2.1.4

$f : A \longrightarrow B$ yang ditunjukkan dalam diagram di bawah ini:



$f : \{(a,1),(b,1),(c,3)\}$

f ini merupakan fungsi, karena setiap anggota A mempunyai satu kawan di B. Dan selanjutnya untuk definisi invers, komposisi fungsi dan lain-lain analog dengan definisi-definisi yang ada pada Relasi.

2.2. RUANG TOPOLOGI

Definisi 2.2.1

Diberikan $X \neq \emptyset$

$\mathcal{T}$ adalah keluarga himpunan bagian-himpunan bagian dari X.

$\mathcal{T}$ merupakan Topologi pada X jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. X, $\emptyset$ termasuk anggota
2. Union atau gabungan dari sejumlah anggota-anggota $\mathcal{T}$ termasuk dalam $\mathcal{T}$
3. Irisan tiap 2 anggota $\mathcal{T}$ termasuk dalam $\mathcal{T}$.

Anggota dari Topologi ini adalh merupakan himpunan-himpunan yang terbuka, maka anggota-anggota Topologi ini disebut Open Set. Dan untuk selanjutnya pasangan terurut $(X, \mathcal{T})$ disebut Ruang Topologi.

Contoh 2.2.1

1. Diberikan suatu himpunan semesta sebagai berikut:

   $X : \{1,2,3,4\}$

   Akan kita selidiki apakah klas-klas himpunan di bawah ini merupakan suatu Topologi pada X.

   $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

   $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}\}$

Penyelesaian:

$\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, \ X, \{1,2\} \ , \{1,2,3\}\}$

$\mathcal{T}_1$ merupakan Topologi pada X, sebab semua aksioma Topologi dipenuhi oleh $\mathcal{T}_1$

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\} , \{2,3\} , \{2,3,4\}\}$

$\mathcal{T}_2$ bukan merupakan Topologi pada X, sebab $\{1\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{T}_2$. Jadi salah satu aksioma dari Topologi tidak terpenuhi.

2. Diberikan R himpunan bilangan Riil.

$\mathcal{U}$ adalah keluarga semua himpunan bagian-himpunan bagian dari R yang terbuka.

$\mathcal{U}$ ini memenuhi aksioma-aksioma dari Topologi, maka $\mathcal{U}$ merupakan Topologi pada R dan $\mathcal{U}$ disebut Usual Topologi pada R.

3. Diberikan himpunan X yang tidak kosong.

$\mathcal{D}$ adalh keluarga semua himpunan-bagian-himpunan bagian dari X.

$\mathcal{D}$ ini merupakan Topologi pada X karena memenuhi aksioma-aksioma dari Topologi. Dan $\mathcal{D}$ ini disebut Discrit Topologi pada X.

Pasangan berurutan $(X, \mathcal{D})$ disebut Ruang Topologi Discrit.

4. Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$ dan $\mathcal{G} = \{X, \emptyset\}$

dan ternyata jika diselidiki $\mathcal{G} = \{X, \emptyset\}$ memenuhi aksioma-aksioma dari Topologi. Jadi $\mathcal{G}$ merupakan Topologi pada X. $\mathcal{G}$ yang beranggotakan $\emptyset$ dan X sendiri ini disebut Indiscrit Topologi pada X.

Pasangan berurutan $(X, \mathcal{G})$ disebut Ruang Indiscrit Topologi.

Definisi 2.2.2

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi dan $A \subset X$
A dikatakan closed (tertutup) jika dan hanya jika A^c (komplemen dari A) adalah merupakan himpunan terbuka.

Contoh 2.2.2

1. Diberikan $\mathcal{T} : \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$, $\mathcal{T}$ merupakan Topologi pada X, $X = \{1,2,3,4\}$

   Himpunan bagian-himpunan bagian di atas adalah open, makq himpunan bagian-himpunan bagian yang tertutup adalah:

   $\{X, \emptyset, \{3,4\}, \{4\}\}$

   X dan $\emptyset$ merupakan himpunan bagian yang tertutup dan sekaligus terbuka.

2. Diberikan $(X, \mathfrak{D})$ Ruang Topologi Discrete, yang anggotanya semua himpunan bagian dari X. $\mathfrak{D}$ merupakan Topologi, maka anggota-anggotanya open. Selanjutnya karena anggota $\mathfrak{D}$ adalah semua himpunan bagian dari X maka komplemen dari anggota-anggota tersebut juga merupakan anggota $\mathfrak{D}$.

   Komplemen dari himpunan terbuka adalah himpunan tertutup, oleh karenanya anggota-anggota $\mathfrak{D}$ juga tertutup.

Definisi 2.2.3

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi dan $A \subset X$. Closure dari A yang dinotasikan $\bar{A}$ adalah irisan dari semua himpunan bagian - himpunan bagian yang tertutup dan memuat A.

Atau dengan kata lain :

Jika $\{F_i \mid i \in I\}$ adalah keluarga dari himpunan bagian - himpunan bagian dari X yang tertutup, maka Closure A, $(\bar{A}) = \{\bigcap F_i, i \in I.\}$.

Theorema 2.2.1

$(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi

$A \subset X$

$x \in \bar{A}$, jika dan hanya jika $x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$

Bukti :

Diberikan $x \in \bar{A}$ dan $x \in G \in \mathcal{T}$.

Andaikan $G \cap A = \emptyset$, maka $A \subset X - G$ dan $X - G$ adalah tertutup. Sejak $x \in X - G$ maka terjadi kontradiksi.

Jadi yang benar adalah $x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$

Untuk sebaliknya andaikan $x \notin \bar{A}$ maka terdapat himpunan tertutup F sedemikian sehingga $F \supset A$ dan $x \notin F$.

Sejak $x \in X - F$ dan $(X - F) \cap A = \emptyset$

maka timbul kontradiksi.

Yang benar adalah $x \in \bar{A}$, $x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$.

Sehingga terbukti $x \in \bar{A}$, jika dan hanya jika $x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$.

Titik x pada $\bar{A}$ disebut ADHERENT POINT dari A.

Dari definisi 2.2.3 disebutkan bahwa $\bar{A}$ merupakan irisan dari himpunan - himpunan tertutup , maka $\bar{A}$ merupakan himpunan tertutup pula . Dan dapat diambil kesimpulan pula bahwa $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A. Atau $A \subset \bar{A} \subset F$ sehingga dapat dikatakan A tertutup jika dan hanya jika $A = \bar{A}$.

Definisi 2.2.4

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi.

$x \in A \subseteq X$

x merupakan titik interior dari A jika x termasuk dalam himpunan terbuka $G \subset A$

Atau dengan kata lain x interior dari A jika $x \in G \subset A$.

Himpunan titik-titik interior dari A dinotasikan int (A), $\mathring{A}$ atau A^o.

Sifat-sifat yang ada pada interior A:

1. A^o adalah terbuka.
2. A^o merupakan himpunan bagian dari A yang terbesar.
3. A terbuka jika dan hanya jika $A = \mathring{A}$

Keterangan:

1. A^o merupakan gabungan (union) dari semua himpunan bagian dari A yang terbuka, maka A^o juga terbuka.
2. $\mathcal{G} = \{ G_i \mid G_i \subset A \}$ adalah klas himpunan bagian - himpunan bagian dari A yang terbuka.

   $$\mathring{A} = \bigcup G_i$$

   Karena $\mathring{A}$ Union dari himpunan bagian - himpunan bagian dari A yang terbuka, maka $\mathring{A}$ merupakan himpunan bagian terbesar dari A yang terbuka.
3. Dari $\mathring{A}$ merupakan bagian yang terbesar dari A yang terbuka, maka A terbuka jika dan hanya jika $A = \mathring{A}$.

Contoh 2.2.4

1. Diberikan $X = \{1,2,3,4\}$ dan

   $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

   $A \subset X$

   $A = \{1,2,3\}$ maka interior A atau $\mathring{A}$ adalah sebagai berikut:

Penyelesaian:

Kita selidiki satu per satu dari anggota X.
Untuk $1 \in X$, himpunan terbuka $\subset A$ yang memuat 1 adalah $\{1,2\}$ dan $\{1,2,3\}$ sehingga dapat ditemukan himpunan terbuka A yang memuat 1 atau $1 \in 1,2 \subset 1,2,3$
Jadi 1 titik interior dari A.

Untuk $2 \in X$, $2 \in \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$, atau $2 \in \{1,2\} \subset A$
Sehingga 2 titik interior dari A.

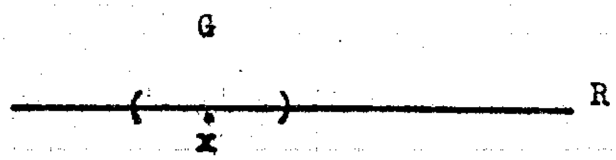
Untuk $3 \in X$, $3 \in \{1,2,3\} \subset A$, sehingga 3 titik interior dari A.

Dan terakhir untuk $4 \in X$ tidak ada himpunan terbuka $\subset A$ yang memuat 4 atau, $4 \notin G \subset A$. Jadi 4 bukan titik interior dari A. Oleh karenanya $A^o = \{1,2,3\}$

Dari sifat-sifat yang berlaku pada interior, ternyata di sini dapat ditunjukkan bahwa $\{1,2,3\}$ merupakan himpunan bagian A yang terbesar dan karena $A = \mathring{A}$ maka A terbuka, hal ini jelas karena $A \in \mathcal{T}$.

2. Diberikan R adalah himpunan bilangan Riil, dan $Q \subset R$ di mana $Q = \{x \,/\, x$ bilangan Rasional$\}$, maka Q ini tidak mempunyai interior. Sebab setiap $G \subset R$, yang terbuka, maka ia akan memuat bilangan Rasional dan Irasional. Sehingga Q tidak mempunyai titik interior.

   Atau dapat ditunjukkan sebagai berikut:



   G adalah himpunan terbuka $\subset R$, dan G jelas memuat bilangan Rasional maupun Irasional, Sehingga $x \in G \not\subset Q$

Jadi Q tidak mempunyai titik interior.

2.3 Neighborhood dan Neighborhood Sistim

Definisi 2.3.1

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi.

$x \in X$ dan N adalah suatu himpunan bagian dari X.

N merupakan Neighborhood dari titik x jika dan hanya jika N memuat himpunan terbuka G yang memuat x.

Atau dengan kata lain, N Neighborhood dari x jika dan hanya jika $x \in G \subset N$.

Dan selanjutnya keluarga semua Neighborhood dari x disebut Neighborhood Sistim atau Sistim persekitaran yang dinotasikan (x).

Contoh 2.2.5

1. Diberikan $X = \{1,2,3,4\}$ dan $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$, maka $\mathcal{N}(1)$ adalah sbb:

Penyelesaian:

Ambil $N = \{1,2\} \subset X$, maka akan terdapat $G \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $1 \in \{1,2\} \subset \{1,2\}$. Sehingga $\{1,2\}$ Neighborhood dari 1. Selanjutnya $1 \in \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ dan $1 \in \{1,2\} \subset X$ Jadi $\{1,2,3\}$, X juga Neighborhood dari 1.

Atau dengan kata lain $\mathcal{N}(1) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$

2. Diberikan $(X, \mathcal{G})$ Ruang Topologi Indiscrete, maka Neighborhood dari titik $x \in X$ adalah sebagai berikut:

Penyelesaian :

X bukan himpunan kosong, $X \neq \emptyset$

$\mathcal{G} = X, \emptyset$ adalah Topologi pada X dan ($X, \mathcal{G}$) Ruang Topologi Indiskrite, maka himpunan terbuka yang merupakan himpunan bagian dari X adalah $\emptyset$ dan X sendiri . Dan selanjutnya himpunan ter- yang memuat X hanyalah X sendiri, sehingga $x \in X \subset X$. jadi X merupakan Neighborhood dari X dan $\mathcal{N}(x) = \{X\}$.

Theorema 2.3.1

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi.

$\mathcal{N}(x)$ adalah Neighbourhood Sistim dari x untuk $x \in X$, maka $\mathcal{N}(x)$ akan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. Jika $N \in \mathcal{N}(x)$, maka $x \in N$
2. Jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$ dan $N_2 \in \mathcal{N}(x)$, maka berlaku $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$
3. Jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$ dan $N_1 \subset N_2$, maka $N_2 \in \mathcal{N}(x)$
4. Jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, maka terdapat $N_2 \in \mathcal{N}(x)$ sedemikian se-demikian sehingga $N_2 \subset N_1$ dimana N_2 merupakan Neighbourhood dari setiap titiknya, atau $N_2 \in \mathcal{N}(x)$ untuk setiap $x \in N_2$.

Bukti :

1. Jika $N \in \mathcal{N}(x)$, maka $x \in N$

   $N \in \mathcal{N}(x)$, maka N merupakan Neighbourhood dari x.

   Dari definisi 2.3.1 , N merupakan Neighbourhood dari x maka terdapat $G \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G \subset N$.

   Karena $G \subset N$, maka jelas $x \in N$.

   Sehingga Theorema 2.3.1 sifat yang pertama terpenuhi.

2. Diberikan $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, maka N_1 Neighbourhood darixx .

   Dari definisi 2.3.1 maka terdapat $G_1 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G_1 \subset N_1$.

   Selanjutnya $N_2 \in \mathcal{N}(x)$, maka N_2 Neighbourhood dari x.

Oleh karenanya terdapat $G_2 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G_2 \subset N_2$. Dari $x \in G_1 \subset N_1$ dan $x \in G_2 \subset N_2$ maka terdapat $x \in G_1 \cap G_2 \subset N_1 \cap N_2$. Dari keterangan diatas bahwa $G_1 \in \mathcal{T}$ dan $G_2 \in \mathcal{T}$, maka dari definisi 2.2.1 aksioma ke 3 diperoleh $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$. Dan oleh karenanya $G_1 \cap G_2$ adalah himpunan terbuka yang memuat x.

Jadi $x \in G_1 \cap G_2 \subset N_1 \cap N_2$, dimana $G_1 \cap G_2$ terbuka, maka $N_1 \cap N_2$ merupakan Neighbourhood dari x. Atau dengan kata lain lain $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$, sehingga Theorema 2.3.1 sifat ke 2 terpenuhi, yaitu Jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, $N_2 \in \mathcal{N}(x)$, maka $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$.

3. Jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$ dan $N_1 \subset N_2$, maka $N_2 \in \mathcal{N}(x)$.

   Kita ambil dari sifat pertama, yaitu jika $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, maka $x \in N_1$. Pada ketentuan lain $N_1 \subset N_2$, sehingga $x \in N_1 \subset N_2$

   Kemudian $x \in N_1$, maka dari definisi 2.3.1 terdapat $G_1 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G_1 \subset N_1$.

   Karena $N_1 \subset N_2$, maka $x \in G_1 \subset N_1 \subset N_2$, dan selanjutnya $x \in G_1 \subset N_2$. Jadi N_2 memuat himpunan terbuka yang memuat x sehingga N_2 merupakan Neighbourhood dari x , atau $N_2 \in \mathcal{N}(x)$.

   Jadi Theorema 2.3.1 sifat yang ke 3 terpenuhi.

4. Diberikan $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, akan ditunjukan terdapat $N_2 \in \mathcal{N}(x)$ sedemikian sehingga $N_2 \subset N_1$ dan N_2 merupakan Neighbourhood dari setiap titiknya.

   $N_1 \in \mathcal{N}(x)$, maka dari definisi 2.3.1 terdapatlah $G_1 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G_1 \subset N_1$. $N_2 \in \mathcal{N}(x)$ maka terdapat $G_2 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G_2 \subset N_2$. N_2 adalah terbuka maka setiap titik dalam N_2 termuat didalam himpunan ter-

terbuka yang termuat dalam N_2 sehingga $x \in G_2 \subset N_2$, sehingga N_1 memuat N_2 dan N_2 merupakan Neighbourhood dari setiap titiknya. Jadi terbukti untuk Theorema 2.3.1 sifat yang ke 4.

2.4 BASIS DAN SUB BASIS PADA RUANG TOPOLOGI

Definisi 2.4.1

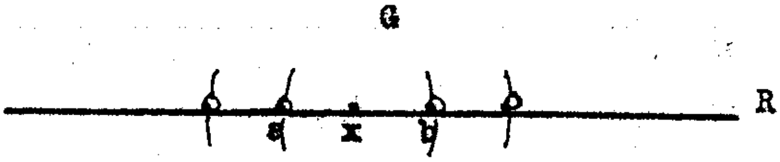
Dibrikan $(X, \mathfrak{T})$ adalah Ruang Topologi.
$\mathfrak{B}$ adalah keluarga himpunan bagian - himpunan bagian dari X . $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$ disebut sebagai basis dari Topologi $\mathfrak{T}$ jika dan hanya jika untuk sebarang x X yang termasuk hipunan terbuka $G \in \mathfrak{T}$, maka himpunan $B \in \mathfrak{B}$ dengan $x \in B \subset G$
Atau dengan kata lain :
$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$. $\mathfrak{B}$ merupakan basis dari topologi $\mathfrak{T}$ jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka $G \in \mathfrak{T}$ merupakan gabungan anggota -anggota $\mathfrak{B}$.

Contoh 2.4.1

1. Diberikan $(X, \mathfrak{T})$ adalah Ruang Topologi.
   $X = \{a, b, c, d, e\}$
   $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{d, e\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{a, d, e\}, \{a, c, d\}, \{d, c, e\}\}$.
   $\mathfrak{B} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{d, e\}, \{c, d\}\}$
   Akan ditunjukan bahwa $\mathfrak{B}$ merupakan basis dari Topologi $\mathfrak{T}$
   Penyelesaian :
   Dari definisi 2.4.1 gabungan dari anggota - anggota $\mathfrak{B}$ adalah anggota $\mathfrak{T}$. Hal ini dapat kita lihat secara langsung dari anggota- anggota bila kita mnggabungkan beberapa anggota $\mathfrak{B}$ maka akan menghasilkan himpunan terbuka anggota dari Topologi $\mathfrak{T}$.

2. Diberikan $\mathcal{T}$ adalah Usual Tonologi nada R, maka interval terbuka - interval terbuka akan membentuk basis dari $\mathcal{T}$

Penyelesaian:



Untuk setian himpunan terbuka $G \in \mathcal{T}$, dengan $x \in G$ tentu danat ditemukan interval terbuka $(a,b) \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in (a,b) \subset G$, sehingga

$\mathcal{B} = \{ (a,b) \mid a,b \in R , a < b$ adalah basis dari Usual Tonologi $\mathcal{T}$

Definisi 2.4.2

$(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Tonologi

$\mathcal{S}$ adalah sub keluarga himpunan bagian - himpunan bagian dari X yang terbuka.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ merupakan sub basis dari Tonologi $\mathcal{T}$ nada X, jika dan hanya jika irisan dari sejumlah terhingga anggota-anggota $\mathcal{S}$ merupakan anggota dari basis Tonologi $\mathcal{T}$

Contoh 2.4.2

1. Diberikan $X = \{a,b,c\}$ dan $(X, \mathcal{T})$ Ruang Tonologi

$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \emptyset, X\}$

$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

Tunjukkan bahwa $\mathcal{S}$ merupakan sub basis dari Tonologi $\mathcal{T}$

Penyelesaian :

$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

maka irisan dari sejumlah anggota-anggota $\mathcal{S}$ adalah

$$\mathcal{B} = \{ \emptyset, X , \{a\} , \{b\} , \{a,b\} , X \}$$

dan Union dari anggota-anggota $\mathcal{B}$ adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X , \{a\} , \{b\} , \{a,b\}\}$$

Jadi $\mathcal{S}$ merupakan sub basis dari Topologi $\mathcal{T}$

2. Diberikan $(X, \mathcal{T})$ Ruang Topologi Biasa
   $\mathcal{T}$ adalah Topologi pada X bilangan Riil, maka
   $\mathcal{S} = \{ (a,\infty), (-\infty, b) \mid a,b \in R , a \subset b$ adalah sub basis dari Topologi biasa
   Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\mathcal{S} = \{ (a, \infty), (-\infty, b) \mid a,b \in R , a<b \}$$

Irisan dari 2 interval tak hingga (a, ∞) dan $(-\infty,b)$ yaitu $(a,\infty) \cap (-\infty,b)$ adalah interval-interval terbuka (a,b) pada garis bilangan R, Sehingga $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in R , a < b\}$ merupakan basis dari Topologi biasa $\mathcal{T}$ (sesuai contoh 2.4.1 no. 2)

Karena irisan dari sejumlah terhingga anggota-anggota $\mathcal{S}$ membentuk basis dari Topologi $\mathcal{T}$ maka $\mathcal{S}$ merupakan sub basis dari Topologi $\mathcal{T}$.

2.5 FUNGSI KONTINU PADA RUANG TOPOLOGI

Definisi 2.5.1

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ dan $(y, \mathcal{T}^1)$ masing-masing merupakan Ruang Topologi. Dan fungsi f memetakan X ke Y, atau memetakan Ruang Topologi $(X, \mathcal{T})$ ke $(y, \mathcal{T}^1)$.

Fungsi f dikatakan kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$ jika dan hanya jika bayangan invers fungsi f dari setiap himpunan bagian Y yang terbuka merupakan himpunan bagian dari X yang terbuka.

Atau dengan kata lain, f kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$ jika dan hanya jika

$$G \in \mathcal{T}^1 \Longrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$$

Contoh 2.5.1

1. Diberikan topologi-topologi pada X dan Y masing-masing sbb:

$X = \{a,b,c,d\}$

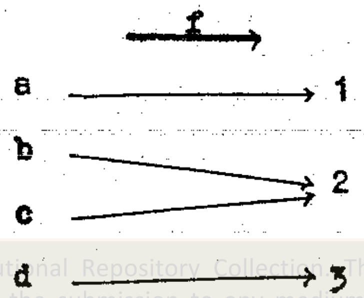
$Y = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T}$ adalah topologi pada X,

$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\ \emptyset, X\}$

$\mathcal{T}' = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset, X\}$

dan fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dinyatakan dalam diagram di bawah ini:



akan kita selidiki apakah f kontinu terhadap $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$

Penyelesaian:

f kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$ jika dan hanya jika $G \in \mathcal{T}^1 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$

Himpunan-himpunan terbuka yang ada pada $\mathcal{T}^1$ adalah $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, , $\emptyset$, Y, maka

Jika $\{1\} \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \mathcal{T}$

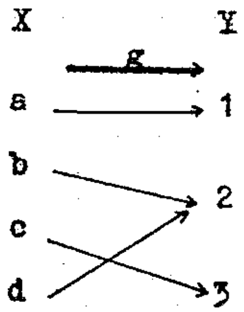
$\{2\} \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(\{2\}) = \{b,c\} \in \mathcal{T}$

$\{1,2\} \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,c\} \in \mathcal{T}$

$Y \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(Y) = \{a,b,c,d\} = X \in \mathcal{T}$

Karena bayangan invers dari setiap anggota $\mathcal{T}^1$ merupakan anggota dari $\mathcal{T}$, maka f adalah kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$.

2. Diberikan topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$ yang sama dengan contoh 2.5.1 no. 1 dan fungsi g yang memetakan $(X, \mathcal{T})$ ke $(Y, \mathcal{T}^1)$ dinyatakan dalam diagram di bawah ini:



Himpunan terbuka - himpunan terbuka anggota-anggota topologi $\mathcal{T}^1$ adalah $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, $\emptyset$, Y, maka

Jika $\{1\} \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \mathcal{T}$

$\{1,2\} \in \mathcal{T}^1$, maka $f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,d\} \notin \mathcal{T}$

Karena ada anggota $\mathcal{T}^1$ yang menyebabkan bayang inversnya bukan anggota $\mathcal{T}$, maka fungsi g dikatakan tidak kontinu terhadap topologi $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}^1$.

Theorema 2.5.1

Diberikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$

f kontinu jika dan hanya jika invers image (bayangan invers) dari setiap himpunan bagian tertutup dari Y merupakan himpunan tertutup dari X.

Atau dengan kata lain:

$f : X \longrightarrow Y$ kontinu jika dan hanya jika

$F \subset Y$ tertutup $\Rightarrow f^{-1}(F)$ tertutup

BUKTI:

$\Longrightarrow$ Diberikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$ adalah kontinu.

Ambil F himpunan bagian Y yang tertutup, maka F^c adalah terbuka.

Dari definisi 2.5.1 kita peroleh jika F^c terbuka, maka $f^{-1}(F^c)$ adalah terbuka dan selanjutnya

$f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$, oleh karena $(f^{-1}(F))^c$ adalah terbuka, maka dari definisi 2.2.2 diperoleh $f^{-1}(F)$ tertutup.

Jadi terbukti jika f kontinu, maka berlaku

$F \subset Y$ tertutup $\Rightarrow f^{-1}(F)$ tertutup ....i)

$\Longleftarrow$ Untuk sebaliknya Diberikan F himpunan bagian dari Y yang tertutup dan $f^{-1}(F)$ adalah tertutup dalam X.

Ambil G himpunan bagian dari Y yang terbuka maka G^c adalah himpunan bagian dari Y yang tertutup dan $f^{-1}(G^c)$ tertutup.

Oleh karena $f^{-1}(G^c) = [f^{-1}(G)]^c$ tertutup, maka $[f^{-1}(G)]^c$ adalah terbuka.

Dan selanjutnya kita peroleh

Jika $G \subset Y$ terbuka, maka $f^{-1}(G)$ terbuka.

Dari definisi 2.5.1 maka adalah kontinu .... ii)

Dari i) dan ii) maka terbukti $f : X \longrightarrow Y$ kontinu jika dan hanya jika $F \subset Y$ tertutup $\Longrightarrow f^{-1}(F)$ tertutup.

Definisi 2.5.2

Diberikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$

Fungsi f dikatakan kontinu pada titik $x \in X$ jika dan hanya jika bayangan invers f dari setiap himpunan terbuka $H \subset Y$ memuat $f(x)$ adalah merupakan superset dari suatu himpunan terbuka $G \subset X$ yang memuat x.

Atau dengan kata lain:

Fungsi f kontinu pada $x \in X$ jika dan hanya jika bayangan invers dari setiap Neighborhood f(x) merupakan Neighborhood x ; disingkat

$$N \in \mathcal{N} f(x) \Longrightarrow f^{-1}(N) \in \mathcal{N}(x)$$

Contoh 2.5.2

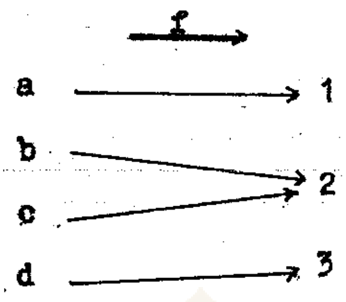
1. Diberikan $X = \{a,b,c,d\}$, dan

$Y = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T}$ topologi pada X, $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset, X\}$

$\mathcal{T}'$ topologi pada Y, $\mathcal{T}' = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset, Y\}$

Fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dinyatakan dalam diagram di bawah ini:



Tunjukkanlah bahwa f kontinu pada titik $a \in X$

Penyelesaian:

Dari definisi 2.5.2 f kontinu pada $a \in X$ jika dan hanya jika $N \in \mathcal{N}(f(a)) \Rightarrow f^{-1}(N) \in \mathcal{N}(a)$

$f(a) = 1$

$\mathcal{N}(f(a)) = \mathcal{N}(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, Y\}$

$\mathcal{N}(a) = \{\{a\}, \{a,b,c\}, X\}$

Kita selidiki satu per satu anggota $\mathcal{N}(f(a))$

$\{1\} \in \mathcal{N}(f(a)) \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \mathcal{N}(a)$

$\{1,2\} \in \mathcal{N}(f(a)) \Rightarrow f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,c\} \in \mathcal{N}(a)$

$Y \in \mathcal{N}(f(a)) \Rightarrow f^{-1}(Y) = \{a,b,c,d\} = X \in \mathcal{N}(a)$

Karena bayangan invers dari setiap Neighborhood dari f(a) adalah merupakan Neighborhood dari a maka dari definisi 2.5.2 f merupakan fungsi kontinu pada titik $a \in X$.

2. Dari contoh soal 2.5.2 no. 1 akan kita selidiki apakah $f : X \longrightarrow Y$ kontinu di titik $b \in X$

Penyelesaian:

f kontinu pada titik $b \in X$ jika dan hanya jika

$N \in \mathcal{N}(f(b)) \Longrightarrow f^{-1}(N) \in \mathcal{N}(b)$

$f(b) = \{2\}$

$\mathcal{N}(f(b)) = \{\{2\}, \{1,2\}, Y\}$

$\mathcal{N}(b) = \{\{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$

$\{2\} \in \mathcal{N}(f(b)) \Longrightarrow f^{-1}(\{2\}) = \{b,c\} \in \mathcal{N}(b)$

$\{1,2\} \in \mathcal{N}(f(b)) \Longrightarrow f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,c\} \in \mathcal{N}(b)$

$Y \in \mathcal{N}(f(b)) \Longrightarrow f^{-1}(Y) = \{a,b,c,d\} = X \in \mathcal{N}(b)$

Karena setiap Neighborhood dari f(b) dapat ditemukan anggota dari $\mathcal{N}(b)$ sebagai bayangan inversnya, maka dari definisi 2.5.2 f merupakan fungsi kontinu pada titik $b \in X$

Theorema 2.5.2

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ dan $(Y, \mathcal{T}^1)$ adalah Ruang Topologi, dan fungsi $f : X \longrightarrow Y$.

Fungsi f kontinu jika dan hanya jika f kontinu untuk setiap titik $x \in X$.

BUKTI :

$\Longrightarrow$ Diberikan fungsi f kontinu, dan himpunan terbuka $H \subset Y$ yang memuat f(x), atau $H \in \mathcal{N}(f(x))$

Karena f kontinu, dan H terbuka maka dari definisi 2.5.1 diperoleh $f^{-1}(H)$ terbuka.

$x \in f^{-1}(H)$ dan $f^{-1}(H)$ terbuka, maka f kontinu di titik $x \in X$.

$\Leftarrow$ Kemudian untuk sebaliknya diberikan f kontinu pada setiap titik $x \in X$, diberikan juga $H \subset Y$ yang terbuka. Untuk setiap titik $x \in f^{-1}(H)$, ada himpunan terbuka $Gx \subset X$ sedemikian sehingga $x \in Gx \subset f^{-1}(H)$

Dari $Gx \subset f^{-1}(H)$, maka dapat dinyatakan sebagai berikut:

$f^{-1}(H) = \bigcup \{ Gx \mid x \in f^{-1}(H)\}$

Gx terbuka , maka union himpunan terbuka atau $\bigcup Gx$ adalah terbuka. Sehingga $f^{-1}(H)$ adalah terbuka.

Jadi H terbuka $\Rightarrow f^{-1}(H)$, dari definisi 2.5.1 maka f kontinu.

2.6 RUANG TOPOLOGI TERPISAH

Definisi 2.6.1

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi.

$(X, \mathcal{T})$ dikatakan terpisah atau Hausdrof jika untuk setiap x dan y dalam X, di mana $x \neq y$ terdapat himpunan terbuka G dan H sedemikian sehingga $x \in G$, $y \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$

Contoh 2.6.1

Diberikan $X = \{1,2,3,4\}$

$\mathcal{T}$ adalah topologi pada X , $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

Akan ditunjukkan bahwa $(X, \mathcal{T})$ ini adalah terpisah.

Penyelesaian:

$X = \{1,2,3,4\}$

Untuk $1,2 \in X$, himpunan terbuka yang memuat 1 adalah

$\{1\}$, $\{1,3\}$, X. Dan himpunan terbuka yang memuat 2 adalah $\{2,3,4\}$, X, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$

Ambil G himpunan terbuka yang memuat 1 = $\{1\}$ dan H himpunan terbuka yang memuat 2 = $\{2,3,4\}$, maka $G \cap H = \{1\} \cap \{2,3,4\} = \emptyset$

Untuk $3,4 \in X$, maka himpunan terbuka yang memuat 3 adalah $\{3\}$, $\{1,3\}$ $\{2,3,4\}$, X dan himpunan terbukayang memuat 4 adalah $\{2,3,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,2,4\}$, X

Untuk $x \neq y$, yaitu $3 \neq 4$ dapat ditemukan $\{3\} \cap \{2,4\} = \emptyset$

Karena setiap $x,y \in X$, $x \neq y$ dapat ditemukan himpunan terbuka yang memuat x misalnya G dan himpunan terbuka yang memuat y misalnya H sedemikian sehingga berlaku $G \cap H = \emptyset$.

Theorema 2.6.1

$(X, \mathcal{T})$ Ruang topologi separated jika dan hanya jika Δ tertutup pada $X \times X$.

$\Delta = \{(x,x), \; x \in X\}$

BUKTI:

$\Rightarrow$ Diberikan $(X, \mathcal{T})$ Ruang topologi separated.

dan $(x,y) \notin \Delta$, maka $x \neq y$.

Sehingga terdapat $G \in \mathcal{N}(x)$ dan $H \in \mathcal{N}(y)$

sedemikian sehingga $G \cap H = \emptyset$ (sesuai definisi 2.7.1)

Kemudian $(G \times H) \cap \Delta = \emptyset$

$G \times H = \{(x,y) \mid x \in G, y \in H\}$, sehingga

$G \times H \in \mathcal{N}(x,y)$

Oleh karenanya $(x,y) \notin \overline{\Delta}$

Karena (x,y) diambil sebarang maka $\Delta = \overline{\Delta}$

Dan terbukti Δ tertutup pada $X \times X$.

$\Leftarrow$ Untuk sebaliknya diberikan $x \neq y$ dan Δ tertutup pada $X \times X$, maka Δ^c adalah terbuka.
Sehingga terdapat $G \in \mathcal{N}(x)$ dan $H \in \mathcal{N}(y)$
Sedemikian sehingga $G \times H \subset \Delta^c$.

Andaikan $G \cap H \neq \emptyset$, maka terdapat $x \in G \times H$ sedemikian sehingga $(x,x) \in G \times H$, yaggberarti $(G \times H) \cap \Delta \neq \emptyset$
Timbul kontradiksi, karena $G \times H \subset \Delta^c$. Jadi pengandaian salah, yang betul $G \cap H = \emptyset$.

Karena x,y sebarangg dan $x \neq y$, terdapat Himpunan terbuka G yang memuat x, dan Himpunan terbuka H yang memuat y sehingga $G \cap H = \emptyset$, maka dari definisi 2.7.1 terbukti $(X, \mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi Terpisah.