BAB II

VEKTOR DAN MATRIKS

2.1. PENGERTIAN VEKTOR

DEFINISI 2.1.1.

n tupel bilangan riil $(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ ditulis dalam satu baris disebut Vektor kolom. Vektor diberi notasi dengan tanda ~ dibawahnya.

CONTOH :

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

DEFINISI 2.1.2.

Dua buah vektor $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ disebut sama, jika dan hanya jika $x_i = y_i$

2.2. OPERASI PADA VEKTOR

TRANSPOSE VEKTOR

Transpose vektor kolom adalah vektor baris, demikian juga transpose vektor baris adalah vektor kolom. Transpose diberi notasi "'" diatasnya.

CONTOH :

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

DEFINISI 2.2.1.

Jumlah dua buah vektor $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$, masing-masing dengan jumlah baris atau kolom yang sama, adalah vektor $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$ dengan

$z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

DEFINISI 2.2.2.

Untuk h skalar sembarang, perkalian vektor $\underset{\sim}{x}$ dengan skalar h menghasilkan suatu vektor $h\underset{\sim}{x}$.

DEFINISI 2.2.3.

Ruang (space) dari semua n tupel dengan perkalian skalar dan penjumlahan vektor disebut Ruang Vektor (dimensi n).

DEFINISI 2.2.4.

$\chi = a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \ldots + a_n\underset{\sim}{x}_n$ adalah kombinasi linier dari vektor $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ atau $\chi = \sum_{i=1}^{n} a_i\underset{\sim}{x}_i$

DEFINISI 2.2.5.

Himpunan vektor $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ disebut Bergantung linier bila terdapat n bilangan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tidak semuanya nol sedemikian sehingga

$$a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \ldots + a_n\underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{0}$$

Apabila $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, maka himpunan vektor tersebut dikatakan Bebas linier, dengan syarat masing-masing vektor harus berdimensi sama.

2.3. PENGERTIAN MATRIKS

DEFINISI 2.3.1.

Suatu kumpulan elemen-elemen (baik bilangan riil maupun kompleks) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang ("array rectangular") dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris disebut Matriks.

Dalam penulisan, Matriks ditulis dengan huruf besar dan tebal.

NOTASI : $A_{p\times n}$: Matriks A dengan jumlah baris p dan jumlah kolom n

CONTOH :

$$A_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

2.4. MACAM-MACAM MATRIKS

DEFINISI 2.4.1.

Suatu matriks sebarang A dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom (p = n) disebut Matriks Bujursangkar ("Square Matrix").

DEFINISI 2.4.2.

Suatu matriks sebarang A dengan elemen-elemennya (a_{ij}) semuanya sama dengan nol disebut Matriks Nol.

DEFINISI 2.4.3.

Suatu matriks bujursangkar ("Square") dengan elemen selain diagonal utamanya sama dengan nol dan sekurang-kurangnya satu elemen pada diagonal utama tidak sama dengan nol disebut Matriks Diagonal.

NOTASI :

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \text{ atau } D_\lambda = \text{diag } (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$$

DEFINISI 2.4.4.

Suatu matriks bujursangkar dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya sama dengan satu dan elemen-elemen lainnya sama dengan nol disebut Matriks Identitas.

NOTASI : I atau $I_{p\times p} = I_p$

DEFINISI 2.4.5.

Suatu matriks bujursangkar dengan elemen diatas atau dibawah diagonal utamanya semua nol disebut Matriks Segitiga. Apabila semua elemen dibawah diagonal utamanya nol disebut Matriks Segitiga Atas, sedang apabila semua elemen diatas diagonal utamanya sama dengan nol disebut Matriks Segitiga Bawah.

DEFINISI 2.4.6.

Transpose matriks A (a_{ij}) adalah matriks baru yang diperoleh dari A dengan menukar baris-barisnya dengan kolom-kolomnya atau sebaliknya.

NOTASI : Diberi tanda "'" diatasnya, atau A'

DEFINISI 2.4.7.

Matriks bujursangkar $B_{p\times p}$ disebut Nonsingular apabila determinannya tidak sama dengan nol.

CONTOH :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 11 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.4.8.

Suatu matriks A disebut Simetris apabila A = A'. Sifat demikian hanya dipenuhi oleh matriks bujursangkar.

DEFINISI 2.4.9.

Suatu matriks yang transposenya merupakan negatipnya dengan elemen pada diagonal utama nol disebut Matriks Antisimetris.

DEFINISI 2.4.10.

Apabila A suatu matriks bujursangkar, maka A dikatakan Idempoten jika $A^2 = A$

DEFINISI 2.4.11.

Suatu matriks yang dibagi menjadi submatriks-submatriks dengan suatu garis horisontal dan vertikal diantara dua baris atau dua kolom dikatakan sebagai matriks yang telah dipartisi atau disebut juga Matriks Partisi.

CONTOH :

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hdashline g & h & i \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

2.5. OPERASI PADA MATRIKS

DEFINISI 2.5.1.

Matriks A dan B masing-masing berdimensi pxn dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij} , i = 1, 2, ... , p , j = 1, 2, ... , n. Jumlah dari matriks A dan B adalah matriks C yang berdimensi pxn. C = A + B dimana elemen-elemen dari C, c_{ij} diberikan oleh $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i = 1, ... , p , j = 1, ... , n.

DEFINISI 2.5.2.

Matriks A dan B masing-masing berdimensi pxn dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij} , $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Selisih matriks A oleh B adalah matriks C yang berdimensi pxn. $C = A - B$ dimana elemen-elemen dari C, c_{ij} diberikan oleh $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, n$.

DEFINISI 2.5.3.

Misalkan skalar sebarang h dan matriks $A_{pxn} = \{a_{ij}\}$. Hasil kali skalar h dan matriks A adalah matriks B yang berdimensi sama dengan dimensi A, sedangkan elemen-elemen matriks B diberikan oleh $b_{ij} = h\, a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINISI 2.5.4.

Hasil kali matriks AB, $A_{pxn} = \{a_{ij}\}$, $B_{nxk} = \{b_{jl}\}$ adalah matriks $C_{pxk} = \{c_{il}\}$ dimana $c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jl}$ $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, k$.

CATATAN :

Hasil kali matriks A dan B ada apabila banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B.

THEOREMA 2.5.1.

Untuk setiap matriks A, B dan C sedemikian sehingga hasil kali matriks tersebut ada, dan h suatu skalar, maka berlaku :

1. $h(AB) = (hA)B$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$

4. $(B + C)\,A = BA + CA$

5. $(AB)' = B'A'$

6. AB tidak harus sama dengan BA

7. $AB = O$ tidak berarti $A = O$ atau $B = O$

DEFINISI 2.5.5.

Determinan matriks bujursangkar $A_{n\times n} = \{a_{ij}\}$ diberi notasi det A atau $|A|$ adalah suatu bilangan skalar.

BENTUK UMUM :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,|A_{ij}|\,(-1)^{i+j}$$

dimana A_{ij} adalah matriks berorde $(n-1)\times(n-1)$ yang didapat dari matriks A dengan menghilangkan baris ke-i kolom-j (Minor baris ke-i kolom ke-j) dan $n > 1$.

DEFINISI 2.5.6.

Determinan yang terjadi jika baris ke-i kolom ke-j dari suatu determinan dihilangkan disebut Minor dari a_{ij}.

CATATAN :

Khusus untuk matriks berdimensi 3x3 dapat dihitung dengan menjumlahkan hasil kali elemen sepanjang garis lurus, kemudian menguranginya dengan hasil kali elemen sepanjang garis putus-putus, untuk mencari harga determinannya.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

SIFAT-SIFAT DETERMINAN :

1. Jika A dan B adalah matriks bujursangkar berorde

sama, maka det (AB) = (det A) (det B).

2. Untuk setiap matriks bujursangkar A, det (AA') $\geq$ 0.

3. Jika A matriks orthogonal, maka det A adalah 1 atau -1.

4. Jika A matriks bujursangkar, B matriks yang diperoleh dengan menukarkan dua baris atau dua kolom dari matriks A, maka det (B) = -det (A).

5. Jika A matriks bujursangkar yang dua barisnya atau dua kolomnya sama, maka det (A) = 0.

6. Jika A matriks bujursangkar dengan sifat dua baris atau dua kolomnya sebanding, maka det (A) = 0.

7. Jika A matriks bujursangkar, B matriks yang diperoleh dari A dengan mengalikan setiap unsur dari kolom atau baris tertentu dengan bilangan atau skalar h, maka det (B) = h det (A).

DEFINISI 2.5.7.

Jika A matriks bujursangkar nonsingular, maka ada matriks B yang bersifat bahwa hasil kali AB merupakan matriks identitas, maka matriks B disebut Matriks Invers dari A.

NOTASI : $B = A^{-1}$

DEFINISI 2.5.8.

Pada matriks bujursangkar A, jumlah elemen-elemen pada diagonal utamanya disebut Trace dari matriks A. Ditulis tr (A).

CONTOH :

Misalkan A_{nxn}, maka $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

2.6. BENTUK-BENTUK KUADRATIK

Yang dimaksud dengan bentuk kuadratik dalam variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ialah bentuk :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \text{ , dimana } a_{ij} = a_{ji} \text{ untuk setiap } i$$

dan j.

Jika $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka bentuk kuadrat tersebut dapat dinyatakan sebagai $\underset{\sim}{x}'A\,\underset{\sim}{x}$.

DEFINISI 2.6.1.

Apabila A adalah matriks simetris berorde nxn, yang bersifat bahwa $\underset{\sim}{x}'A\,\underset{\sim}{x} > 0$ untuk setiap vektor $\underset{\sim}{x}$ berorde nx1 yang bukan vektor nol, maka A disebut Matriks Definit Positip. Sedang apabila A memenuhi $\underset{\sim}{x}'A\,\underset{\sim}{x} \geq 0$, maka A disebut Semi Definit Positip.

DEFINISI 2.6.2.

Apabila A adalah matriks simetris yang berorde nxn, yang bersifat bahwa $\underset{\sim}{x}'A\,\underset{\sim}{x} < 0$ untuk setiap vektor $\underset{\sim}{x}$ berorde nx1 yang tidak nol, maka A disebut Matriks Definit Negatip. Sedang apabila A memenuhi $\underset{\sim}{x}'A\,\underset{\sim}{x} \leq 0$, maka A disebut Semi Definit Negatip.

2.7. AKAR DAN VEKTOR KARAKTERISTIK

DEFINISI 2.7.1.

A matriks bujursangkar pxp, I matriks identitas pxp. Skalar λ_1, λ_2, ... , λ_p, yang memenuhi persamaan $|A-\lambda I| = 0$ disebut Akar-akar Karakteristik dari matriks A. Persamaan $|A-\lambda I| = 0$ disebut Persamaan Karakteristik.

Jika matriks A memiliki p akar karakteristik, yaitu λ_1, λ_2, ... , λ_p, maka akar-akar karakteristik ini mempunyai beberapa sifat, antara lain :

1. $\lambda_1 . \lambda_2 . \ldots\ldots . \lambda_p = |A|$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_p = tr\ (A)$

DEFINISI 2.7.2.

Setiap akar karakteristik λ_i dari matriks bujursangkar A yang berorde nxn, yang menentukan vektor $\underset{\sim}{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots , b_{in})$ yang bersifat bahwa $(A - \lambda_i I_n)\ \underset{\sim}{b}_i = \underset{\sim}{0}$, maka $\underset{\sim}{b}_i$ disebut Vektor Karakteristik dari A yang ditentukan oleh λ_i.