BAB II

TEORI DASAR TENTANG VEKTOR DAN MATRIKS PADA STATISTIKA MULTIVARIAT

Dalam Statistika Multivariat, vektor dan matriks adalah merupakan bagian penting yang tidak bisa dipisahkannya. Pengertian-pengertian mendasar tentang vektor dan matriks adalah langkah penyederhanaan sebelum membahas statistika multivariat. Antara vektor dan matriks sebenarnya merupakan kumpulan konstanta yang dicerminkan dengan banyaknya p baris dan 1 (satu) kolom untuk Vektor dan banyaknya p baris dan n kolom untuk Matriks.

2.1. VEKTOR

DEFINISI 2.1.1

p tupel bilangan $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ yang ditulis dalam 1 (satu) kolom dan p baris disebut *VEKTOR*.

Dinotasikan dengan tanda " ~ " dibawahnya.

contoh :

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{X}$: dibaca vektor X

X_i : elemen-elemen dari vektor X

i : 1,2,3, ... , p

DEFINISI 2.1.2

Kesamaan Vektor didefinisikan sebagai :

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \text{ di sebut sama dengan } \underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix}$$

bhb

$X_i = Y_i$, untuk $i=1,2,3,\ldots,p$

DEFINISI 2.1.3

Suatu vektor dengan jumlah baris dan jumlah kolomnya masing-masing sama dengan satu (mempunyai orde 1) disebut *SKALAR*. Biasanya dituliskan tanda skalar, dengan k (konstanta).

DEFINISI 2.1.4

Perkalian dengan Skalar sebarang k, dengan vektor X adalah $k\underset{\sim}{X}$ dengan vektor dengan baris ke-i = kX_i.

DEFINISI 2.1.5

Jumlahan 2 vektor $\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{Y}$ masing-masing dengan jumlah baris sama, adalah $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{Y}$ dengan $Z_i = X_i + Y_i$, $i=1,2, \ldots, p$.

DEFINISI 2.1.6

Ruang (SPACE) dari semua p tupel dengan perkalian skalar dan penjumlahan vektor disebut *Ruang Vektor* (berdimensi p).

DEFINISI 2.1.7

Suatu vektor Z dikatakan *Kombinasi Linier* dari vektor-vektor $X_1, X_2, \ldots, X_p$ bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sedemikian sehingga :

$$Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_p X_p$$

Himpunan dari semua kombinasi linier dari $X_1, X_2, \ldots, X_p$ disebut *Perluasan Linier* dari $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

DEFINISI 2.1.8

Himpunan p vektor $X_1, X_2, \ldots, X_p$ disebut *Dependent Linier* (Bergantung Linier), bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_p X_p = 0$$

DEFINISI 2.1.9

Himpunan p vektor $X_1, X_2, \ldots, X_p$ disebut *Independent Linier* (Tak Bergantung Linier), bila $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \ldots + \lambda_p X_p = 0$, dipenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

2.2. Matriks.

DEFINISI 2.2.1

Matriks adalah suatu kumpulan elemen-elemen (bilangan riil maupun bilangan kompleks) yang disusun menurut baris dan kolom, yang berbentuk 4 (empat) persegi panjang(array rectangular), dimana panjangnya dinyatakan oleh banyak kolom dan lebar dinyatakan dengan banyaknya baris.

contoh : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$

a_{ij} = elemen-elemen matriks A

i=1,2,3,.....,p (indeks baris)

j=1,2,3,.....,n (indeks kolom)

DEFINISI 2.2.2

Dimensi Matriks (pxn) adalah pasangan bilangan (p,n), dimana p adalah dimensi baris, n adalah dimensi kolom. Dengan demikian apabila n=1 dan p baris,maka matriks disebut juga dengan Vektor (sesuai dengan definisi 2.1.1).

DEFINISI 2.2.3

Suatu matriks sebarang sebut A dengan jumlah baris dan jumlah kolomnya sama (p=n) disebut **Matriks** *Bujur Sangkar* (Matriks Square) berorde p.

DEFINISI 2.2.4

Suatu matriks sebarang sebut A dengan elemen-elemennya semua sama dengan nol disebut *Matriks Nol*. Dengan kata lain $a_{ij}=0$ untuk i=1,2,...,p dan j=1,2,...,n.

DEFINISI 2.2.5

Elemen-elemen suatu matriks dari pojok kiri atas sampai ke kanan bawah disebut *Diagonal Utama Matriks*. Dengan kata lain elemen-elemen matriks dengan i=j, dimana i=1,2,...,p merupakan *Elemen-elemen Diagonal Utama Matriks*.

DEFINISI 2.2.6

Suatu matriks square, dengan semua elemen-elemen selain diagonal utamanya sama dengan Nol, dan sekurang-kurangnya terdapat satu elemen pada diagonal utamanya yang tidak sama dengan Nol disebut *Matriks Diagonal*.

Ditulis $D_\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$

DEFINISI 2.2.7

Penjumlahan elemen-elemen pada diagonal matriks square disebut *Trace*. Sehingga jika $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,p$, maka $Tr(A)= \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$.

DEFINISI 2.2.8

Suatu matriks square, dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya = 1 dan elemen-elemen lainnya = 0 disebut *Matriks Identitas*.

Ditulis $I_p = a_{ij}$,

dengan $a_{ij}=1$, untuk $i=j$

dan $a_{ij}=0$, untuk $i \neq j$

DEFINISI 2.2.9

Suatu matriks dengan jumlah baris dan jumlah kolomnya masing-masing sama dengan 1 (berorde 1) disebut *Skalar*.

DEFINISI 2.2.10

Transpose Matriks $A = (a_{ij})$ adalah matriks baru yang diperoleh dari A, dengan cara menukar baris menjadi kolomnya dan menukar kolom semula menjadi barisnya, dinotasikan A'. Jadi misalkan dimensi matriks $A=(pxn)$, maka $A'=(nxp)$

DEFINISI 2.2.11

Suatu matriks square, sebut A adalah *Matriks Simetris* jika $A=A'$.

DEFINISI 2.2.12

Matriks Orthogonal $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $i=j=1,2,\ldots,p$ adalah matriks square orde p apabila dipenuhi :

a. $\sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij}\gamma_{kj} = 0,\ i\neq k$ atau $\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij}\gamma_{ik} = 0,\ j\neq k$

b. $\sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij}^{2} = 1$, atau $\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij}^{2} = 1$, $i,j=1,2,\ldots,p$

DEFINISI 2.2.13

Kesamaan Matriks, Dua matriks A dan B dikatakan sama jika $a_{ij} = b_{ij}$ dimana $i=1,2,..,p$ dan $j=1,2,\ldots,n$.

DEFINISI 2.2.14

Penjumlahan dan *Pengurangan* untuk 2 (dua) matriks berdimensi sama, didefinisikan sebagai misal $C=A\pm B$, dimana $(c_{ij})=(a_{ij})\pm(b_{ij})$ $i=1,2,\ldots,p$ dan $j=1,2,\ldots,n$. Dari sini kemudian diperoleh bahwa :

i. $(A+B)' = A'+B'$

ii. $A + B = B + A$

iii. $A+(B+C)=(A+B)+C$

DEFINISI 2.2.15

Pergandaan Skalar dengan suatu matriks A, ditulis kA, dimana

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \dots & ka_{pn} \end{bmatrix}$$

DEFINISI 2.2.16

Jika diberikan $A=(a_{ij})$, dimensi (pxn) dan $B=(b_{ij})$, dimensi (nxr) maka *Hasil Kali AB* didefinisikan sebagai $C=(c_{ij})$, berdimensi (pxr). Elemen-elemennya dihitung menurut :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$ dimana $i=1,2,\dots,p$ dan $j=1,2,\dots,r$ sedang k menyatakan banyak kolom matriks pertama yang harus sama dengan banyak baris matriks kedua. Perkalian matriks tidaklah komutatif, $AB \neq BA$ namun demikian jika dalam hal khusus AB=BA, maka matriks disebut Komutatif.

Dari sini juga didapatkan bahwa :

i. $(AB)C = A(BC) = ABC$ (assosiatif).

ii. $A(B+C) = AB+AC$ (distributif)

iii. $(A+B)'=A'+B'$

iv. $(AB)' = B'A'$

v. $(A')' = A$

vi. $AI = IA = A$ dan $A+0 = 0+A = A$

DEFINISI 2.2.17

Determinan suatu matriks square orde n, $A=(a_{ij})$ berkaitan dengan skalar , yang senantiasa berharga riil yang didefinisikan sebagai :

$$|A| = \sum (\pm\ a_{1i}\ a_{2j}\ \ldots\ldots a_{nn}\ ).$$

Sifat-sifat determinan.

1. Jika semua elemen sama dengan nol, maka $|A|=0$.
2. Determinan dari matriks transpose adalah sama dengan determinan matriks semula, $|A'|=|A|$.
3. Penukaran dua kolom/baris dalam suatu matriks orde n mengubah tanda determinan dengan mengalikannya dengan (-1).
4. Jika sebuah matriks mempunyai dua baris dan dua kolom yang sama, maka nilai dari determinan sama dengan Nol. Sehingga $|A|+|A|=0$, jika $|A|=0$
5. Mengalikan $|A|$ dengan k sama dengan mengalikan setiap elemen dari baris ke-i atau kolom ke-j dari A dengan k. Jadi $|\lambda A|=\lambda^n|A|$.

DEFINISI 2.2.18

Pandang $A=(a_{ij})$, suatu matriks square orde p disebut *Non Singular*, jika $|A|\neq 0$ dan disebut *Singular*, jika $|A|=0$.

DEFINISI 2.2.19

Pandang $A=(a_{ij})$, suatu matriks orde p dan jika

$|A| \neq 0$, maka $A^{-1}=(a^{ij})$, dimensi (pxp) disebut *Invers Matriks*, yang didefinisikan dengan $a^{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

DEFINISI 2.2.20

Matriks square A, orde p dan I_p matriks identitas, orde p. Skalar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ yang memenuhi persamaan $|A-\lambda I|=0$ disebut *Eigen Value (Akar-Akar Karakteristik)* dari matriks A. Persamaan $|A-\lambda I|=0$ disebut *Persamaan Karakteristik* .

DEFINISI 2.2.21

Matriks square A berorde p, dan λ akar karakteristik dari A. Bila X adalah Vektor yang tidak merupakan vektor nol $(X \neq 0)$ sedemikian hingga $AX=\lambda X$, maka X disebut *Eigen Vektor (Vektor Karakteristik)*, dari matriks A yang bersesuaian dengan akar-akar karakteristik λ.

DEFINISI 2.2.22

Pandang $\underset{\sim}{X}$ berdimensi (px1) menunjukkan vektor p, dan $A=(a_{ij})$ menunjukkan matriks simetris dimensi (pxp) maka

$$Q = X'AX = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} X_i X_j a_{ij}$$

disebut *Bentuk Kuadratik* dengan variabel $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

DEFINISI 2.2.23

Pandang definisi 2.2.22, jika $Q = X'AX > 0$

(atau < 0), untuk semua vektor X yang tidak sama dengan Nol, maka Q disebut *Bentuk Kuadratik Definit Positip* (atau *Negatip*), dan matriks A disebut *Matriks Definit Positip* (atau *Negatip*), dengan lebih biasa ditulis $A>0$ (atau $A<0$).

Jika $Q\geq 0$(atau ≤ 0), untuk semua $X\neq 0$, maka Q disebut *Bentuk Kuadratik Semidefinit Positip* (atau *Negatip*), sedang Matriks A disebut *Matriks Semidefinit Positip* (*Negatip*).