

BAB V

DISTRIBUSI NORMAL

5.1. DISTRIBUSI NORMAL UNIVARIAT.

Definisi 5.1.1 :

Peubah acak Y dikatakan mempunyai distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 , jika fungsi densitasnya dapat ditulis dengan :

$$f(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (y-\mu)^2 / \sigma^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

Peubah acak Y berdistribusi normal, ditulis dengan

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Untuk menaksir μ dan σ^2 dalam Definisi 5.1.1, misal sampel acak dari n pengamatan yang saling bebas Y_1, Y_2, \dots, Y_n diperoleh dari populasi. Harga-harga daripada pengamatan Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah y_1, y_2, \dots, y_n . Penaksir-penaksir likelihood maksimum dari μ dan σ^2 adalah :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Seperti yang akan kita perlihatkan sebagai berikut.

Menurut Definisi 4.3.1 :

$$L(\mu, \sigma^2 | y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$L^* = \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$$

Kemudian L^* kita differensialkan parsial terhadap μ dan σ^2 , sehingga diperoleh persamaan normal :

$$\left. \frac{\delta L^*}{\delta \mu} \right|_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\left. \frac{\delta L^*}{\delta \sigma^2} \right|_{\hat{\sigma}^2} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

Untuk $\hat{\sigma}^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$\text{Jadi } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

Selanjutnya,

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$n \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2$$

$$\text{Jadi } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2$$

Untuk menunjukkan apakah penaksir - penaksir likelihood maksimum, adalah tak bias untuk parameter-parameter populasi μ dan σ^2 , kita tunjukkan bahwa $E(\hat{\theta}) = \theta$ untuk parameter θ . Dari uraian Bab IV, diperoleh bahwa

$$E[\hat{\mu}] = \mu$$

$$E[\hat{\sigma}^2] = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

Maka $\hat{\mu} = \bar{y}$ adalah penaksir tak bias untuk μ , tetapi $\hat{\sigma}^2$ adalah penaksir bias untuk σ^2 . Penaksir tak bias untuk σ^2 adalah :

$$S^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$\text{Maka } E(S^2) = \sigma^2$$

Sifat yang penting dari peubah-peubah acak normal ialah bahwa jika Y_1, Y_2, \dots, Y_n peubah acak berdistribusi normal dengan mean μ_i dan variansi σ_i^2 , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka :

$$X = \sum_{i=1}^n a_i Y_i \sim N \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

Jadi kombinasi linear dari peubah-peubah acak berdistribusi normal juga berdistribusi normal.

Hal penting dari sifat di atas, misal,

$Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka diperoleh

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Teorema 5.1.1 :

Distribusi normal univariat dengan mean μ dan variansi σ^2 merupakan fungsi densitas probabilitas yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy = 1$$

Bukti :

Misal harga integral tersebut,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy$$

Misal, $\frac{y-\mu}{\sigma} = V$ maka $dV = \frac{1}{\sigma} dy$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} V^2} dV$$

Akan kita buktikan bahwa $A^2 = 1$ yang berarti $A = 1$, karena fungsi harus bernilai positif, Misal peubah kedua yang berdistribusi normal adalah W , maka :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} V^2} dV \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} W^2} dW \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (V^2 + W^2)} dV dW \end{aligned}$$

Kita substitusikan :

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh : } V^2 + W^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2 \end{aligned}$$

Batas integral menjadi :

$$r : 0 \longrightarrow \infty$$

$$\theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

Menurut Definisi 2.2.32 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(V, W) dV dW = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[m(r, \theta), n(r, \theta)] |j(r, \theta)| dr d\theta$$

$$V = r \cos \theta \quad \text{maka} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \cos \theta \quad \text{dan} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$W = r \sin \theta \quad \text{maka} \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \sin \theta \quad \text{dan} \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} |j(r, \theta)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial W}{\partial r} & \frac{\partial W}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \end{aligned}$$

Bentuk integral diatas menjadi :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-1/2 r^2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-1/2 r^2} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-1/2 r^2} [\theta]_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^{\infty} r e^{-1/2 r^2} dr \end{aligned}$$

$$\Lambda^2 = - \left. e^{(-1/2) r^2} \right|_0^{\infty} = 1$$

$\Lambda = 1$ (harga integral yang dipakai akar positif)

Jadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\{-1/2 (y-\mu)^2/\sigma^2\}} dy = 1$$

5.2. DISTRIBUSI NORMAL MULTIVARIAT.

Perubah acak \mathcal{Z} disebut peubah acak normal standart, jika peubah acak \mathcal{Z} mempunyai fungsi densitas normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Anggap $\mathcal{Z}_i \sim N(0, 1)$ sedemikian sehingga $E(\mathcal{Z}_i) = 0$ dan $V[\mathcal{Z}_i] = 1$. Fungsi densitas dari peubah acak normal standart \mathcal{Z}_i adalah :

$$f(\mathcal{Z}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\{-\mathcal{Z}_i^2/2\}}, \quad -\infty < \mathcal{Z}_i < \infty \dots (5.2.1)$$

Misal $\mathcal{Z}' = [\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_p]$, suatu vektor dari peubah-peubah acak yang saling bebas, fungsi densitas bersama dari \mathcal{Z} adalah perkalian dari masing-masing fungsi densitas,

$$f(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_p) = f(\mathcal{Z}') = \prod_{i=1}^p f(\mathcal{Z}_i) \dots (5.2.2)$$

Untuk kasus normal standart persamaan (5.2.2) menjadi :

$$f(\mathcal{Z}') = \prod_{i=1}^p f(\mathcal{Z}_i) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{-p/2} e^{\{-1/2 \mathcal{Z}'\mathcal{Z}'\}}, \quad -\infty < \mathcal{Z}_i < \infty \dots (5.2.3)$$

Persamaan (5.2.3) p vektor acak \mathcal{Z} dikatakan