BAB V

DISTRIBUSI NORMAL

5.1. DISTRIBUSI NORMAL UNIVARIAT.

Definisi 5.1.1 :

Peubah acak Y dikatakan mempunyai distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2, jika fungsi densitasnya dapat ditulis dengan :

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\{-1/2(y-\mu)^2/\sigma^2\}}, \quad -\infty < y < \infty$$

Peubah acak Y berdistribusi normal, ditulis dengan

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Untuk menaksir μ dan σ^2 dalam Definisi. 5.1.1, misal sampel acak dari n pengamatan yang saling bebas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ diperoleh dari populasi. Harga-harga daripada pengamatan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Penaksir-penaksir likelihood maksimum dari μ dan σ^2 adalah :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Seperti yang akan kita perlihatkan sebagai berikut. Menurut Definisi. 4.3.1 :

$$L = L(y_1, y_2, \ldots, y_n | \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i | \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ - \frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$L^* = \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2$$

Kemudian L^* kita differensialkan parsial terhadap μ dan σ^2, sehingga diperoleh persamaan normal :

$$\left. \frac{\delta L^*}{\delta \mu} \right|_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\left. \frac{\delta L^*}{\delta \sigma^2} \right|_{\hat{\sigma}^2} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

Untuk $\sigma^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\mu} = 0$$

Jadi $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$

Selanjutnya

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$n\,\hat{\sigma}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu})$$

Jadi $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu})^2$$

Untuk menunjukkan apakah penaksir - penaksir likelihood maksimum. adalah tak bias untuk parameter-parameter populasi μ dan σ^2, kita tunjukkan bahwa E $(\hat{\theta}) = \theta$ untuk parameter θ. Dari uraian Bab IV, diperoleh bahwa

$$E\,[\hat{\mu}] = \mu$$

$$E\,[\hat{\sigma}^2] = (\frac{n-1}{n})\sigma^2$$

Maka $\hat{\mu} = \bar{y}$ adalah penaksir tak bias untuk μ, tetapi $\hat{\sigma}^2$ adalah penaksir bias untuk σ^2. Penaksir tak bias untuk σ^2 adalah :

$$S^2 = (\frac{n}{n-1})\,\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Maka $E(S^2) = \sigma^2$

Sifat yang penting dari peubah-peubah acak normal ialah bahwa jika $Y_1, Y_2, .. Y_n$ peubah acak berdistribusi normal dengan mean μ_i dan variansi σ_i^2, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ maka :

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \sim N\,(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\sigma_i^2\,)$$

Jadi kombinasi linear dari peubah-peubah acak berdistribusi normal juga berdistribusi normal.

Hal penting dari sifat di atas, misal,

$Y_i \sim N\,(\mu, \sigma^2)$, maka diperoleh

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Teorema 5.1.1 :

Distribusi normal univariat dengan mean μ dan variansi σ^2 merupakan fungsi densitas probabilitas yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\{-\frac{1}{2}(y-\mu)^2/\sigma^2\}} dy = 1$$

Bukti :

Misal harga integral tersebut,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}(y-\mu)^2/\sigma^2)} dy$$

Misal, $\frac{y-\mu}{\sigma} = V$ maka $dV = \frac{1}{\sigma} dy$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}V^2)} dV.$$

Akan kita buktikan bahwa $A^2 = 1$ yang berarti $A = 1$, karena fungsi harus bernilai positip. Misal peubah kedua yang berdistribusi normal adalah W, maka :

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{-\frac{1}{2}V^2\}} dV \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{-\frac{1}{2}W^2\}} dW$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{-\frac{1}{2}(V^2+W^2)\}} dV\, dW$$

Kita substitusikan :

$V = r \cos \theta$ dan

$W = r \sin \theta$

Diperoleh : $V^2 + W^2 = r^2 \ Cos^2 \ \theta + r^2 \ Sin^2 \ \theta$

$$= r^2 (Sin^2 \ \theta + Cos^2 \ \theta) = r^2$$

Batas integral menjadi :

$$r : 0 \longrightarrow \infty$$

$$\theta : 0 \longrightarrow 2\pi$$

Menurut Definisi 2.2.32 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(V,W) dV \ dW = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[\, m\ (r,\theta), n(r,\theta)]$$
$$|j(r,\theta)| \ dr \ d\theta$$

$V = r \ Cos \ \theta$ maka $\frac{\delta V}{\delta r} = Cos \ \theta$ dan $\frac{\delta V}{\delta \theta} = r \ Sin \ \theta$

$W = r \ Sin \ \theta$ maka $\frac{\delta W}{\delta r} = Sin \ \theta$ dan $\frac{\delta W}{\delta \theta} = r \ Cos \ \theta$

Sehingga :

$$|\ j\ (r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\delta V}{\delta r} & \frac{\delta V}{\delta \theta} \\ \frac{\delta W}{\delta r} & \frac{\delta W}{\delta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cos \ \theta & -r \ Sin \ \theta \\ Sin \ \theta & r \ Cos \ \theta \end{vmatrix}$$

$$= r \ Cos^2 \ \theta + r \ Sin^2 \ \theta = r$$

Bentuk integral diatas menjadi :

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r\, e^{\{-1/2 \ \ r^2\}} dr \ d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \ e^{\{-1/2 \ \ r^2\}} \ d\theta \ dr$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r \ e^{\{-1/2 \ \ r^2\}} [\,\theta\,]_0^{2\pi} \ dr$$

$$= \int_0^{\infty} r \ e^{\{-1/2 \ \ r^2\}} dr$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{\{-1/2 \ \ r^2\}} d(-1/2 \ \ r^2)$$

$$A^2 = - e^{\{-1/2 \quad r^2\}} \Big|_0^{\infty} = 1$$

A = 1 (harga integral yang dipakai akar positip

Jadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\{-1/2 \quad (y-\mu)^2/\sigma^2\}} dy = 1$$

5.2. DISTRIBUSI NORMAL MULTIVARIAT.

Perubah acak Z disebut peubah acak normal standart, jika peubah acak Z mempunyai fungsi densitas normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Anggap $Z_i \sim N(0, 1)$ sedemikian sehingga $E(Z_i) = 0$ dan $V[Z_i] = 1$. Fungsi densitas dari peubah acak normal standart Z_i adalah :

$$f(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\{-Z_i^2/2\}}, \quad -\infty < Z_i < \infty \; ..... (5.2.1)$$

Misal $\underset{\sim}{Z}' = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_p]$, suatu vektor dari peubah-peubah acak yang saling bebas, fungsi densitas bersama dari Z adalah perkalian dari masing-masing fungsi densitas,

$$f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p) = f(\underset{\sim}{Z}) = \prod_{i=1}^{p} f(Z_i) \; ..... (5.2.2)$$

Untuk kasus normal standart persamaan (5.2.2)menjadi :

$$f(\underset{\sim}{Z}) = \prod_{i=1}^{p} f(Z_i) = (2\pi)^{-p/2} e^{\{-1/2 \; Z'Z\}},$$

$$-\infty < Z_i < \infty \; ....(5.2.3).$$

Persamaan (5.2.3) p vektor acak Z dikatakan