# BAB II

# PENGGUNAAN VEKTOR DAN MATRIKS DALAM STATISTIK

## 2.1. VEKTOR

Definisi 2.1.1 :

Vektor berdimensi n ialah suatu susunan yang teratur daripada elemen-elemen berupa angka-angka (besaran-besaran) sebanyak n buah, yang disusun baik menurut baris, dari kiri ke kanan ( disebut vektor baris/row vector) maupun menurut kolom, dari atas ke bawah ( disebut vektor kolom/column vector).

Catatan :

Elemen-elemen daripada vektor biasanya disebut komponen-komponen sebagai notasinya dipakai huruf latin kecil ( misalnya $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_4$ untuk x = 4).

Sedangkan untuk vektornya sendiri dipakai huruf latin besar yang diberi tanda " ~ " dibawahnya (misal $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$, $\underset{\sim}{Z}$).

Bahwasannya vektor itu tidak lain daripada matriks yang terdiri dari satu baris dan n kolom untuk vektor baris, dan terdiri dari n baris dan satu kolom untuk vektor kolom.

Contoh 2.1.1 :

1. Untuk vektor baris $\underset{\sim}{X}$ :

$$\underset{\sim}{X} = [x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots x_n]$$

2. Untuk vektor kolom $\underset{\sim}{Y}$ :

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \underset{\sim}{Y}' = [y_1,\ y_2,\ \ldots,y_n]$$

dimana tanda "'" menyatakan transpose (lihat Definisi 2.2.7)

Definisi 2.1.2 :

Vektor satuan $\underset{\sim}{U}_i$ ialah vektor dimana komponen yang ke $i$ mempunyai nilai 1 sedangkan lainnya mempunyai nilai 0.

Definisi 2.1.3 :

Vektor disebut vektor nol apabila komponen - komponen dari vektor tersebut semuanya sama dengan 0. Diberikan tanda $\underset{\sim}{0}$.

Definisi 2.1.4 :

Yang disebut vektor jumlah ( Sum Vektor) ialah suatu vektor dimana semua komponen-komponennya mempunyai nilai 1.

Diberi tanda $\underset{\sim}{1} = [1, 1, \ldots\ldots, 1]$

Definisi 2.1.5 :

Dua buah vektor $\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{Y}$ dikatakan sama apabila semua komponennya sama dan berdimensi sama, yaitu apabila $\underset{\sim}{X} = [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$ dan $\underset{\sim}{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ maka $\underset{\sim}{X}$ akan sama dengan $\underset{\sim}{Y}$ apabila $x_i = y_i$ , $\forall i$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots, n$).

Definisi 2.1.6 :

Apabila $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} \pm \underset{\sim}{Y}$ dimana

$$\underset{\sim}{Z} = [Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_n]$$
$$\underset{\sim}{X} = [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$$
$$\underset{\sim}{Y} = [y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n]$$

maka $Z_i = X_i \pm Y_i$ , $\forall i$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots, n$)

Definisi 2.1.7 :

Apabila vektor $\underset{\sim}{X}$ berdimensi $n$, yaitu $\underset{\sim}{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dan suatu skalar $k$, kemudian dikalikan maka $\underset{\sim}{X} \cdot k = k \cdot \underset{\sim}{X}$ yaitu bahwa :

$$\underset{\sim}{X} \cdot k = [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n] \cdot k =$$

$$[x_1 \cdot k, x_2 \cdot k, \ldots\ldots, x_n \cdot k]$$

$$= [k \cdot x_1, k \cdot x_2, \ldots\ldots, k \cdot x_n]$$

$$= k \cdot [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$$

$$= k \cdot \underset{\sim}{x}$$

Definisi 2.1.8 :

Apabila $\underset{\sim}{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dan $\underset{\sim}{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ maka $\underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{Y}$ akan menghasilkan suatu matriks sedangkan $\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{Y}'$ akan menghasilkan suatu skalar.

$$\underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1, y_2, \ldots y_n] = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \ldots x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \ldots x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \ldots x_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{Y}' = [x_1, x_2, \ldots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \ldots\ldots + x_n y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Definisi 2.1.9 :

Apabila $\underset{\sim}{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ suatu vektor dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$ suatu matriks maka

$$V = \underset{\sim}{X} \cdot A = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



$$= [x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_n a_{n1},\ x_1 a_{12} +$$

$$x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{n2},\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_n a_{nn}]$$

$$= [\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1},\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2},\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}]$$

$$V = A \cdot \underset{\sim}{X}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.10 :

Yang dimaksud Ruang Vektor berdimensi n atau Ruang Vektor Euclidian ialah suatu koleksi/kumpulan yang lengkap (set) daripada semua vektor yang berkomponen sebanyak n dimana semua hal-hal tentang penjumlahan dan perkalian masih tetap berlaku bagi vektor-vektor ini dan Ruang Vektor yang merupakan set ini diberi simbol $E^n$. Vektor dengan komponen sebanyak n, biasanya disebut vektor berdimensi n. Apabila k suatu skalar dan $\underset{\sim}{X}$ berada di $E^n$ maka k . $\underset{\sim}{X}$ juga berada di $E^n$. Apabila $\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{Y}$ berada di

$E^n$ maka $\underset{\sim}{X} \pm \underset{\sim}{Y}$ juga berada di $E^n$

Definisi 2.1.11 :

Apabila kita mempunyai set daripada vektor-vektor sebanyak m, yang masing-masing berdimensi n, katakanlah vektor $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, ... $\underset{\sim}{X}_m$ dan sebuah vektor lain yang berdimensi n, katakan vektor $\underset{\sim}{A}$ dan berlaku hubungan :

$\underset{\sim}{A} = k_1 . \underset{\sim}{X}_1 + \ldots + k_m . \underset{\sim}{X}_m = \sum_{i=1}^{m} k_i \; \underset{\sim}{X}_i$ , dimana $k_i$ = bilangan konstan, maka dikatakan bahwa vektor $\underset{\sim}{A}$ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, ..., $\underset{\sim}{X}_m$.

Definisi 2.1.12 :

Suatu set daripada vektor-vektor sebanyak m, berasal dari $E^n$, dikatakan bergantung linear apabila untuk skalar $k_1$, $k_2$, ..., $k_m$ berlaku hubungan : $k_1 \underset{\sim}{X}_1 + k_2 \underset{\sim}{X}_2 + \ldots + k_m \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{0}$, dengan syarat bahwa paling tidak satu skalar $k_i$ dengan $k_i \neq 0$ dan selanjutnya set dari vektor $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, ..., $\underset{\sim}{X}_m$ ini akan disebut bebas linear apabila berlaku hubungan $k_1 \underset{\sim}{X}_1 + k_2 \underset{\sim}{X}_2 + \ldots + k_m \underset{\sim}{X}_m = \underset{\sim}{0}$ dengan syarat bahwa nilai dari semua skalar $k_i = 0$, yaitu apabila $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$

## 2.2. M A T R I K S.

Definisi 2.2.1 :

Matriks adalah suatu kumpulan daripada elemen-elemen (real/kompleks) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang (array rectangular) dimana panjang dan lebarnya di tunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris. Apabila matriks A terdiri dari p baris dan q kolom, maka matriks A ditulis sebagai :

$$ {}_{p\times q}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1j} \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2j} \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{ij} \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pj} \dots & a_{pq} \end{bmatrix} = [a_{ij}],\ i=1,2,\dots,p \quad j=1,2,\dots,q $$

Definisi 2.2.2 :

Suatu matriks sebut A dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom (p = q) disebut matriks bujur sangkar ( square matriks ) dinyatakan secara umum :

$$ {}_{p\times p}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1j} \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2j} \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{ij} \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pj} \dots & a_{pp} \end{bmatrix} $$

Definisi 2.2.3 :

Suatu matriks A dengan elemen-elemennya $[a_{ij}]$ = 0 disebut matriks nol. Dinyatakan secara umum :

$$ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} $$

Definisi 2.2.4 :

Suatu matriks bujur sangkar (square matriks) dengan semua elemen - elemen selain diagonal utamanya sama dengan nol dan sekurang-kurangnya satu elemen pada diagonal utama tidak sama dengan nol disebut matriks diagonal.

Dinyatakan secara umum :

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} \text{ atau } D_\lambda = \text{diag } [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$$

Definisi 2.2.5 :

Suatu matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen diagonal utama = 1 dan elemen-elemen lainnya = 0, disebut matriks identitas, dinotasikan dengan I. Dinyatakan secara umum :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.6 :

Suatu matriks dengan jumlah baris dan kolom sama dengan satu disebut skalar, dinyatakan dengan k.

Definisi 2.2.7 :

Transpose matriks $A = [a_{ij}]$ dinotasikan dengan A' adalah matriks baru yang diperoleh dari A dengan menukar baris-baris (kolom-kolom)nya dengan kolom-kolom (baris-baris)nya. Dinyatakan secara umum :

$${}_{p\times q}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

$$A'_{q \times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{qp} \end{bmatrix}$$

Sifat 2.2.7 :

1. $(A')' = A$
2. $(A + B)' = A' + B'$
3. $(AB)' = B'A'$
4. $k(A') = (kA)'$ , $k$ = skalar

Definisi 2.2.8 :

Suatu matriks A berdimensi p x q dikatakan simetris bhb $A = A'$. Dikatakan secara umum :

Jika $A = [a_{ij}]$ merupakan matriks simetris maka $a_{ij} = a_{ji}$ , $\forall\, i, j$.

Definisi 2.2.9 :

Matriks orthogonal $\Gamma = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, p$ adalah matriks bujur sangkar berdimensi p dimana :

1). $\sum_{j=i}^{p} a_{ij}\, a_{kj} = 0$ , $i \neq k$

atau $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, a_{ik} = 0$ , $j \neq k$

2). $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^{2} = 1$ atau $\sum_{i=1}^{p} a_{ij}^{2} = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, p$

Secara equivalen , $\Gamma$ adalah orthogonal bhb

$\Gamma\Gamma' = \Gamma'\Gamma = I$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} & \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} \\ \frac{1}{\sqrt{p}} & -\frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots\cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots\cdots & -\frac{2}{\sqrt{2.3}} & \cdots\cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots\cdots & ..0.. & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & -\frac{(p-1)}{\sqrt{(p-1)p}} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.10 :

Jika A dan B matriks-matriks bujur sangkar dan berlaku AB = BA, maka A dan B dikatakan berkomutatif satu sama lain. Sering kita jumpai bahwa A dan B tidak komutatif atau $AB \neq BA$.

Definisi 2.2.11 :

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama, yaitu A = B apabila A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama, disamping itu elemen-elemen pada baris dan kolom yang bersangkutan harus sama, artinya $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i, j$, dimana :

$a_{ij}$ = elemen matriks A dari baris $i$ dan kolom $j$

$b_{ij}$ = elemen matriks B dari baris $i$ dan kolom $j$

Apabila A dan B tidak sama, ditulis $A \neq B$, berarti $a_{ij} \neq b_{ij}$, untuk beberapa nilai $i$ dan $j$.

Definisi 2.2.12 :

Penjumlahan dan pengurangan dari dua buah matriks $A = [a_{ij}]$ berdimensi pxq dan $B = [b_{ij}]$ berdimensi pxq di definisikan oleh $A \pm B = C = [c_{ij}]$, dimana $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = 1,2, \ldots,p$

$j = 1,2, \ldots,q$

Definisi 2.2.13 :

Apabila $A = [a_{ij}]$ berdimensi pxq dan $B = [b_{ij}]$ berdimensi qxr kemudian dengan perkalian matriks A . B, kita maksudkan suatu matriks C = $[c_{ij}]$ berdimensi pxr, dimana elemen C dari baris ke $i$ dan kolom ke $j$ diperoleh dengan rumus :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} a_{it}\, b_{tj} \qquad , \; i = 1, 2, \ldots, p$$

$$j = 1, 2, \ldots, r$$

Dinyatakan secara umum :

$$A_{p\times q} \; . \; B_{q\times r} = C_{p\times r}$$

sama

Definisi 2.2.14 :

Setiap matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ berdimensi p selalu dikaitkan dengan suatu skalar, fungsi harga riil dari elemen-elemen itu disebut suatu determinan. Dinyatakan secara umum, det (A) atau $|A|$.

Definisi 2.2.15 :

Minor dari elemen $a_{ij}$ suatu matriks $A = [a_{ij}]$ adalah determinan dari bentuk matriks dengan menghapus baris ke $i$ dan kolom ke $j$ dari A di notasikan $|A_{ij}|$ dan kofaktor dari $[a_{ij}]$ adalah $(-1)^{i+j}\ |A_{ij}|$ adalah suatu skalar.

Definisi 2.2.16 :

Determinan dari sebuah matriks berdimensi p dapat dicari dengan cara pengembangan Laplace :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$ dengan $i$ sebarang, disebut uraian baris ke $i$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j} \quad A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

dengan $j$ sebarang, disebut uraian kolom ke $j$.

Contoh 2.2.16 :

Misal $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ maka :

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \ . \ 2 - 5 \ .(-2) + 2 \ . \ 3 = 6 + 10 + 6 = 32$$

Sifat 2.2.14 :

1. Harga determinan tidak ada , $|A| = 0$, jika semua elemen-elemen dari baris atau kolomnya sama dengan nol.
2. $|A| = |A'|$.
3. Jika dua baris/kolom diubah, determinannya dikalikan dengan minus 1.
4. Jika semua elemen-elemen dari baris/kolom, dikaitkan dengan faktor konstan, determinannya dikaitkan dengan faktor yang sama. Dengan demikian jika :

$$B = \begin{bmatrix} k \ a_{11} & k \ a_{12} & \dots k \ a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$



dimana $k$ adalah suatu skalar dan $A = [a_{ij}]$

maka $|B| = k\,|A|$.

5. $|AB| = |A| \,.\, |B|$.

Definisi 2.2.17 :

Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular apabila det(A) = 0. Jika det (A) $\neq$ 0 maka di sebut matriks nonsingular.

Catatan 2.2.17 :

Matriks yang nonsingular mempunyai invers sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers.

Definisi 2.2.18 :

Sebuah matriks bujur sangkar A berdimensi p,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B sehingga $A \,.\, B = B \,.\, A = I_p$.

Matriks B disebut invers matriks A, ditulis $A^{-1}$ matriks bujur sangkar berdimensi p.

Contoh 2.2.18 :

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^{-1}$ diperoleh dengan rumus

$|A| = ad - bc = D$.

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.19 :

Pandang matriks $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$

kita sebut kofaktor dari elemen $a_{ij}$ sebagai $A_{ij}$, maka transpose dari matriks $A_{ij}$ disebut matriks adjoin dari A.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1p} & A_{2p} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.20 :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} \quad , \quad |A| \neq 0$$

Contoh 2.2.20 :

Invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah :

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 - (-3) + (-3) = 6 + 3 - 3 = 6$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj . } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & -7/6 \\ -1/2 & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.21 :

Rank dari suatu matriks A, dinotasikan dengan R (A), adalah jumlah maksimum dari kolom-kolom yang bebas linear.

Catatan 2.2.21 :

A berdimensi pxq maka $R(A) \leq \min(p,q)$.

Definisi 2.2.22 :

Jumlah elemen diagonal suatu matriks bujur sangkar disebut suatu trace, dinotasikan dengan tr. Jadi, jika $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$ maka

$$tr(A) = \sum_{j=i}^{p} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{pp}.$$

Contoh 2.2.22 :

Misal, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{2} a_{jj} = a_{11} + a_{22} = 5 + 3 = 8$$

Sifat 2.2.22 :

1. Diasumsikan A berdimensi pxn dan B berdimensi nxp maka : tr (AB) = tr (BA).
2. Trace dari suatu matriks bujur sangkar adalah sama dengan jumlah dari akar-akar karakteristiknya
3. Jika k adalah suatu skalar dan jika A berdimensi pxp maka : tr (k A) = k . tr(A).
4. Misal S berdimensi pxp, $|S| \neq 0$, A berdimensi pxp maka : $tr(S^{-1} A S) = tr(A)$.

5. Misal $R(A) = 1$, untuk $A$ berdimensi pxp, maka jika $|A - \lambda I| = 0$ maka $\lambda = tr(A)$.
6. Jika $A$ berdimensi pxn, $B$ berdimensi pxn, maka : $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
7. Misal $A$ berdimensi pxn $B$ berdimensi nxp untuk $A = [a_{ij}]$ , $B = [b_{ij}]$, maka :

   $$tr\ (AB) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ b_{ji}$$

   Jika A dan B adalah matriks simetris,

   $$tr\ (AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{ij}$$

   atau :

   $$tr\ (ABC) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} a_{\alpha\beta}\ b_{\beta\gamma}\ C_{\gamma\alpha}$$

8. Jika $k$ suatu skalar, $tr\ (k) = k$.
   sebagai contoh, jika $\underset{\sim}{X}$ berdimensi px1, $A$ berdimensi pxp $\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$ adalah suatu skalar, maka : $tr\ (A\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X}') = \underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$

Definisi 2.2.23 :

Misal $\underset{\sim}{X}$ berdimensi px1, dan $A = [a_{ij}]$ menyatakan matriks simetris berdimensi pxp, maka : $Q = \underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\ x_i x_j$

Q disebut bentuk kwadrat dalam peubah-peubah $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Apabila A tidak simetris, didefinisikan :

$$B = \frac{A + A'}{2}$$

dan bentuk kwadratnya $Q = \underset{\sim}{X}'B\underset{\sim}{X}$

Definisi 2.2.24 :

Bentuk kwadrat $Q = \underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$ dikatakan definite positip apabila $Q > 0$ , $\forall\ \underset{\sim}{X}$ , $\underset{\sim}{X} \neq \underset{\sim}{0}$

Definisi 2.2.25 :

Bentuk kwadrat $Q = \underset{\sim}{X}' A \underset{\sim}{X}$ di katakan semi definite positip apabila $Q \geq 0$, $\forall$ $\underset{\sim}{X}$, dan nilai-nilai $\underset{\sim}{X} \neq 0$ untuk mana $Q = 0$

Definisi 2.2.26 :

Suatu bentuk kwadrat $Q = \underset{\sim}{X}' A \underset{\sim}{X}$ dikatakan bukan definite apabila nilainya positip untuk beberapa nilai dari $\underset{\sim}{X}$ dan negatif untuk lainnya.

Contoh 2.2.23 :

1. $Q = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

   $$Q = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{X}' A \underset{\sim}{X}$$

2. $Q = 3x_1^2 + 5x_2^2$, bentuk kwadrat definite positip dengan 2 peubah.
3. $Q = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x_3^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 3x_3^2$, bentuk kwadrat semi definite positip.
4. $Q = 4x_1^2 - 3x_2^2$, bentuk kwadrat bukan definite positip.

Definisi 2.2.27 :

Derivatif parsial adalah suatu derivatif yang diperoleh dengan mendifferensialkan suatu fungsi $f$ terhadap satu peubah bebas, sedang peubah bebas yang lain dianggap konstan.

Definisi 2.2.28 :

Misal $z = f(x,y)$ maka derivatif parsial dari $z$ terhadap x adalah :

$$\frac{\delta\, z}{\delta\, x} = \frac{\delta\, f(x,y)}{\delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x + \Delta x,\ y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

dan derivatif parsial dari $z$ terhadap y' adalah

$$\frac{\delta\, z}{\delta\, y} = \frac{\delta\, f(x,y)}{\delta\, y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\,(x,\ y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Contoh 2.2.28 :

$z = f(x,y) = 3 - 4\,x^2 + y^2$

maka derivatif parsial $z$ terhadap x,y dianggap konstan sehingga :

$$\frac{\delta\, z}{\delta\, x} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta\, x} = \frac{\delta}{\delta\, x}\,(3 - 4x^2 + y^2) = -8x.$$

dan derivatif parsial $f$ terhadap y, x dianggap konstan, sehingga :

$$\frac{\delta\, z}{\delta\, y} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta\, y} = \frac{\delta}{\delta\, y}\,(3 - 4x^2 + y^2) = 2y.$$

Definisi 2.2.29 :

Turunan fungsi skalar $f$ terhadap matriks X = $[x_{ij}]$ berdimensi pxn , i = ..., p dan j = 1 ,2, ..., n adalah :

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f(x)}{\delta x_{11}} & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{12}} & \cdots & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{1n}} \\ \frac{\delta f(x)}{\delta x_{21}} & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{22}} & \cdots & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f(x)}{\delta x_{p1}} & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{p2}} & \cdots & \frac{\delta f(x)}{\delta x_{pn}} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.29 :

1. Anggap $\underset{\sim}{X}$ berdimensi px1 , dan $f\,(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}$

   maka menurut Definisi 2.2.29 :

$$f\,(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} = [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 .$$

$$\frac{\delta f(\underset{\sim}{X})}{\delta \underset{\sim}{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} \\ \frac{\delta}{\delta x_2} \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} \\ \vdots \\ \frac{\delta}{\delta x_p} \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_p \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = 2\underset{\sim}{X}$$

2. Apabila $\mathscr{Z} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{22}$ dan $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

maka : $\frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{11}} & \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{12}} \\ \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{21}} & \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{22} & 0 \\ -x_{22} & x_{11}-x_{21} \end{bmatrix}$

Definisi 2.2.30 :

Apabila suatu skalar $\mathscr{Z}$ merupakan kombinasi linear dari nilai-nilai $x_i$, sehingga misalnya :

$$\mathscr{Z} = \underset{\sim}{a}'_{1\times r} \underset{\sim}{X}_{r\times 1} = \underset{\sim}{X}'_{1\times r} \underset{\sim}{a}_{r\times 1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r$$

maka menurut Definisi 2.2.29 haruslah :

$$\frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_1} \\ \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_2} \\ \vdots \\ \frac{\delta\mathscr{Z}}{\delta x_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = \underset{\sim}{a}$$

Definisi 2.2.31 :

Apabila skalar $\mathscr{Z}$ merupakan bentuk kwadrat dalam $x_i$, sehingga $\mathscr{Z} = \underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}$, sedang ${}_{r\times r}A_r = A'$, maka

$$\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} x_m a_{mn} x_n$$

maka turunan $\mathscr{Z}$ terhadap $x_i$ adalah :

$$\frac{\delta \mathscr{Z}}{\delta x_i} = 2 \sum_{n=1}^{r} a_{in} x_n$$

dan

$$\frac{\delta \mathscr{Z}}{\delta \underset{\sim}{X}} = 2 A \underset{\sim}{X}$$

Sifat-sifat turunan fungsi skalar terhadap matriks.

1. Untuk $X \neq X'$

   $\frac{\delta |X|}{\delta X} = |X| (X^{-1})'$ , dimana ${}_pX_p$ , $|X| \neq 0$

   untuk $X = X'$

   $\frac{\delta |X|}{\delta X} = 2 |X|X^{-1} - \text{diag} [|X|X^{-1}]$, dimana ${}_pX_p$,

   $|X| \neq 0$

2. $\frac{\delta |X|^k}{\delta X} = k |X|^{k-1} \frac{\delta |X|}{\delta X}$ , untuk ${}_pX_p$.

3. $\frac{\delta}{\delta X} [f(x) . g(X)] = f(X) . \frac{\delta g(X)}{\delta X} + \frac{\delta g(X)}{\delta X}$ .

   $g(X)$ untuk fungsi skalar $f(.)$ dan $g(.)$.

4. $\frac{\delta}{\delta X} \text{tr} (A'X) = A$ , untuk ${}_pA_q$ , ${}_qX_p$

5. $\frac{\delta}{\delta X} \text{tr} (A X') = A$ , untuk ${}_pA_q$ , ${}_pX_q$

   Jika $A = A'$ dan $X = X'$ , $p = q$

   $\frac{\delta}{\delta X}$ tr $(AX) = 2A - \text{diag} [A]$.

6. $\frac{\delta}{\delta X}$ tr $(X^{-1}A) = -X^{-1}AX^{-1}$ , untuk $|X| \neq 0$

7. $\frac{\delta}{\delta X}$ $(\underset{\sim}{a}' X^{-1}\underset{\sim}{a}) = -X^{-1} \underset{\sim}{a}\, \underset{\sim}{a}' X^{-1}$ , untuk ${}_pX_p$,

   $|X| \neq 0$ , $\underset{p\times 1}{\underset{\sim}{a}}$ .

8. $\frac{\delta}{\delta \underset{\sim}{X}}$ $(\underset{\sim}{X}'A\underset{\sim}{X}) = 2A\underset{\sim}{X}$ , untuk $\underset{p\times 1}{\underset{\sim}{X}}$ , $\underset{p\times p}{A}$

9. $\frac{\delta}{\delta X} (\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{a}$ , untuk $\underset{p\times 1}{\underset{\sim}{X}}$ , $\underset{p\times 1}{\underset{\sim}{a}}$

10. $\frac{\delta}{\delta X}$ tr $X^2 = 2X$ , untuk ${}_pX_p$ , dan $X = X'$

11. Untuk $X = X'$

$$\frac{\delta}{\delta x}(\ln|X|) = 2\,X^{-1} - \text{Diag } X^{-1}\ ,\ \text{dimana } {}_{p\times p}X$$

Definisi 2.2.32 :

Bila $X = m\,(r,\theta)$ dan

$Y = n\,(r,\theta)$

fungsi-fungsi yang menghubungkan peubah lama X dan Y ke peubah baru r dan $\theta$, pergantian peubah dalam integral ganda didefinisikan :

$\iint f\,(X,Y)\,d\,x\,dy = \iint f\,[m\,(r,\theta),\ n\,(r,\theta)\,]$ $|J\,(r,\theta)|\,dr\,d\theta$, dengan :

$$|J(r,\theta)| = \begin{bmatrix} \frac{\delta X}{\delta r} & \frac{\delta X}{\delta \theta} \\ \frac{\delta Y}{\delta r} & \frac{\delta Y}{\delta \theta} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.33 :

Misal $A = [a_{ij}]$ berdimensi $p_1 x\ p_2$ dan $B = [b_{kl}]$ berdimensi $n_1 x\ n_2$. Maka matriks $C = A \otimes B$ berdimensi $p_1 n_1 x p_2 n_2$ disebut direct produck dari A dan B yaitu :

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p_2}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p_1 1}B & a_{p_1 2}B & \dots & a_{p_1 p_2}B \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.33 :

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = [1 \quad 2]$ maka :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1B & 2B \\ 3B & 4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Jika ${}_{n\times m}A = [a_{ij}]$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ maka :

$$I \otimes A = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.34 :

Misal, n persamaan simultan dalam m anu adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = y_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = y_n$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\underset{(n \times m)}{A} \; \underset{(m \times 1)}{\underset{\sim}{X}} = \underset{(n \times 1)}{\underset{\sim}{y}}$$

dimana vektor $\underset{\sim}{X}$ adalah vektor anu, vektor $\underset{\sim}{y}$ adalah vektor tidak nol yang diketahui sebagai skalar-skalar, dan R (A) = r.

Definisi 2.2.35 :

Apabila matriks A dalam Definisi. 2.2.34 adalah bujur sangkar berdimensi m dan mempunyai rank lengkap, maka jawab untuk Definisi 2.2.34 adalah $\underset{\sim}{X} = A^{-1} \underset{\sim}{y}$. Apabila matriks A berbentuk persegi empat (rèctangular) dari m rank kolom lengkap, maka jawab untuk Definisi. 2.2.34 adalah : $\underset{\sim}{X} = (A'A)^{-1}A'y$.

Catatan 2.2.35 :

Matriks $(A'A)^{-1}A'$ merupakan type matriks " invers " yang mana bahwa $[(A'A)^{-1}A']A = I_m$

$A[(A'A)^{-1}A'] \neq I_m$.

Definisi 2.2.36 :

Jawab umum untuk Definisi. 2.2.34 adalah :

$\underset{\sim}{X} = A^{-}\underset{\sim}{y} + (I - H)\underset{\sim}{z}$ , dimana $H = A^{-}A$ dan $\underset{\sim}{z}$ adalah vektor sebarang.

Definisi 2.2.37 :

Apabila sistem persamaannya merupakan persamaan homogen $\underset{(n\times m)}{A}\ \underset{(m\times 1)}{\underset{\sim}{X}} = \underset{(n\times 1)}{\underset{\sim}{0}}$ maka jawab umumnya adalah : $\underset{\sim}{X} = (I - H)\underset{\sim}{z}$ , untuk vektor sebarang $\underset{\sim}{z}$

Definisi 2.2.38 :

Jika $\underset{(n\times m)}{A} . \underset{(m\times 1)}{\underset{\sim}{X}} = \underset{(n\times 1)}{\underset{\sim}{y}}$ dimana $n>m$ dan $R(A) = r<n$ menyatakan sistem konsisten mula-mula, maka syarat lain dari bentuk : $\underset{(m-r)\times m}{R} . \underset{(m\times 1)}{\underset{\sim}{X}} = \underset{(m-r)\times 1}{\underset{\sim}{\theta}}$ adalah penjumlahan untuk $A . \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{y}$ sedemikian sehingga :

$R(R) = m - r$ dan $R[A' \ R'] = r + (m - r) = m$, dimana baris-baris dalam $R$ adalah tidak bergantung linear pada baris-baris dalam $A$. Sistem konsisten baru menjadi :

$$\begin{bmatrix} A \\ R \end{bmatrix} \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y} \\ \underset{\sim}{\theta} \end{bmatrix}$$

akan mempunyai jawab tunggal :

$$\underset{\sim}{X} = (A'A + R'R)^{-1}\ (A'\underset{\sim}{y} + R'\underset{\sim}{\theta}).$$

Definisi 2.2.39 :

Sebuah matriks bujur sangkar $A$ adalah idempoten apabila $A^2 = A$.

Definisi 2.2.40 :

Jika $(A'A)^{-}$ adalah suatu g-invers dari $A'A$ maka $(A'A)^{-}A'$ adalah g-invers dari $A$ dan matriks $A(A'A)^{-}A'$ adalah tunggal dan simetris.

Teorema 2.2.1 :

Misal $A^-$ adalah g-invers dari A, $AA^-A = A$ dan seandainya $H = A^-A$ maka $H = H^2$.

Bukti :

Diketahui bahwa $H = A^-A$ dan $A = AA^-A$ maka,

$H = A^-A = A^-AA^-A = H \cdot H = H^2$

Jadi terbukti bahwa $H = H^2$.

Definisi 2.2.41 :

Jika A adalah matriks bujur sangkar simetris berdimensi n dan mempunyai rank r, terdapatlah sebuah matriks nonsingular P berdimensi n sedemikian sehingga.

$$P\ A\ P' = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \wedge$$

dan A bisa dinyatakan sebagai : $A = P^{-1} \wedge (P')^{-1}$

Jika rank A merupakan rank lengkap, maka :

$P\ A\ P' = D_n$ atau $A = P^{-1}\ D_n\ (P')^{-1}$.

Definisi 2.2.42 :

Jika matriks A berdimensi nxm dan mempunyai rank r menurut Definisi 2.2.41, terdapatlah matriks nonsingular P dan Q berdimensi n dan m, maka : $A = P^{-1} \wedge Q^{-1}$. Misal $\wedge^-$ menyatakan transpose dari $\wedge$ dengan elemen-elemennya yang tidak nol diganti dengan kebalikannya. Karena $\wedge \wedge^- \wedge = \wedge$, $\wedge^-$ adalah g-invers dari $\wedge$. Dengan menentukan $A^- = Q \wedge^- P$ , maka :

$$A\ A^-A = P^{-1}\wedge Q^{-1}\ Q \wedge^-\ PP^{-1}\wedge Q^{-1} = P^{-1}\wedge \wedge^-\wedge Q^{-1}$$
$$= P^{-1} \wedge Q^{-1} = A$$

Sehingga g-invers dari A adalah $A^- = Q \wedge^- P$

Catatan 2.2.42 :

Karena P dan Q tidak tunggal, $A^-$ tidak perlu tunggal. Tetapi, apabila A adalah matriks bujur sangkar dan mempunyai rank lengkap, maka $A^{-1}$ ada dan tunggal.

Contoh 2.2.42 :

1. Misal , $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

   maka dengan memilih , $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \wedge$$

   $$\wedge' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \wedge^{-} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   maka didapat :

   $$A^{-} = Q\wedge^{-}P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   Pilih , $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   dan $Q = P' = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Lambda = PAQ = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \Lambda^- = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka didapat :

$$A^- = Q\Lambda^- P = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^- = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.36 :

Anggap sistem,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

Menurut Definisi 2.2.40 , $(A'A)^-A'$ adalah g-invers dari A jika $(A'A)^-$ adalah g-invers dari $A'A$.

$$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Menurut contoh 2.2.42. no 2 :

$$(A'A)^- = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^- \underset{\sim}{y} = (A'A)^- A' \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^- \underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (y_{21} + y_{22})/2 \\ (y_{11} + y_{12})/2 - (y_{21} + y_{22})/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2.} \\ y_{1.} - y_{2.} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena $H = A^- A = (A'A)^- A'A$, maka :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$I - H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Menurut Definisi 2.2.36 :

$$\underset{\sim}{X} = A^{-}\underset{\sim}{y} + (I - H)\underset{\sim}{z}$$

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2.} \\ y_{1.} - y_{2.} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_{2.} \\ y_{1.} - y_{2.} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z_3 \\ z_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Pilih $z_3 = y_{2.} - y_{..}$, maka :

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} - y_{..} \\ y_{2.} - y_{..} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.43 :

Misalnya A menyatakan matriks bujur sangkar berdimensi n. Persamaan karakteristik A diberikan oleh $|A - \lambda I| = 0$ dan merupakan polinominal derajat n dalam $\lambda$ dengan akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Contoh 2.2.43 :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ maka :

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \text{ maka } \lambda^2 - 2\lambda + \tfrac{3}{4} = 0$$

$$(\lambda - \tfrac{3}{2})(\lambda - \tfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda_1 = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{dan } \lambda_2 = \tfrac{1}{2}$$

Definisi 2.2.44 :

Vektor $p_i$ yang sesuai dengan persamaan homogen $(A - \lambda_i I) p_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ disebut vektor-vektor karaktersitik dari A dimana A adalah matriks bujur sangkar simetris.

Contoh 2.2.44 :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

untuk $\lambda_1 = 3/2$ maka menurut Definisi. 2.2.37 :

$$\hat{\underset{\sim}{X}} = (I - H)\, \underset{\sim}{x}, \text{ dimana } H = A^{-}A$$

$$= [I - (A - \lambda_1 I)^{-}(A - \lambda_1 I)]\, \underset{\sim}{x}$$

Karena : $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

untuk mencari $(A - \lambda_1 I)^{-}$, ambil

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = P(A - \lambda_1 I)\, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

maka didapat :

$$(A - \lambda_1 I)^{-} = Q\, \Lambda^{-} P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$\hat{\underset{\sim}{X}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \right\} \underset{\sim}{x}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

misal $x_1 = 1$, maka $\hat{X}'_1 = [1,\ 1]$

Untuk $\lambda_2 = 1/2$ dengan cara sama seperti di atas

untuk $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ di dapat , $\hat{X}'_2 = [1,\ -1]$.

Bentuk matriknya :

$$P_o = [\ \hat{X}_1,\ \hat{X}_2\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan menormalkan masing-masing vektor kolom dalam $P_o$, menjadi matriks orthogonal :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ dengan } P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.45 :

Persamaan karakteristik umum dari Definisi. 2.2.43 adalah suatu metrik sebarang B dimana B adalah matrik definite positip simetris (real) berdimensi nxn dan A adalah matriks simetris berdimensi n, adalah : $|A - \lambda B| = 0$ dan persamaan homogennya adalah :

$$(A - \lambda_i B)q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Definisi 2.2.46 :

Dari Definisi 2.2.45, persamaan karakteristiknya dapat ditulis sebagai $|AB^{-1} - \lambda I| = 0$, dimana $AB^{-1}$ tidak perlu simetris.



Teorema 2.2.2 :

Akar-akar $V_i$ dari persamaan karakteristik,

$|B - V(B + A)| = 0$ adalah :

$$\lambda_i = \frac{1 - V_i}{V_i} \quad \text{atau} \quad V_i = \frac{1}{1+\lambda_i}$$

Butki :

Misal $[B - V(B + A)]\,\tilde{X} = 0$

$$BX - V(B + A)\,\tilde{X} = 0$$

$$B\tilde{X} - VB\tilde{X} - VA\tilde{X} = 0$$

$$(1 - V)B\tilde{X} - VA\tilde{X} = 0$$

$$VA\tilde{X} - (1 - V)B\tilde{X} = 0$$

$$A\,\tilde{X} - \frac{(1 - V)}{V}\,B\tilde{X} = 0$$

$$\left[A - \frac{(1 - V)}{V}\,B\right]\tilde{X} = 0 \quad \text{atau}$$

$$\left|A - \left(\frac{1 - V}{V}\right) B\right| = 0$$

Menurut Definisi 2.2.45, $\lambda_i = \dfrac{1 - V_i}{V_i}$ atau,

$$V_i = \frac{1}{1+\lambda_i}$$

Teorema 2.2.3 :

Akar-akar $\theta_i$ dari persamaan karakteristik

$|A - \theta(A + B)| = 0$

adalah : $\lambda_i = \dfrac{\theta_i}{1 - \theta_i}$ atau $\theta_i = \dfrac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$

dan akar-akar karakteristik dari :

$|B - V(B + A)| = 0$ adalah $V_i = (1 - \theta_i)$.

Bukti :

Misal : $[A - \theta(A + B)]\,\tilde{X} = 0$

$$A\tilde{X} - \theta A\tilde{X} - \theta B\tilde{X} = 0$$

$$A\,(1 - \theta)\,\tilde{X} - \theta B\tilde{X} = 0$$

$$A\tilde{X} - \frac{\theta}{1-\theta}\,B\tilde{X} = 0$$

$\left[A - \dfrac{\theta}{1-\theta}\,B\right]\tilde{X} = 0$ atau $\left|A - \dfrac{\theta}{1-\theta}\,B\right| = 0$



Menurut Definisi 2.2.45 :

$$\lambda_i = \frac{\theta_i}{1-\theta_i} \quad \text{atau} \quad \theta_i = \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$$

sedangkan akar-akar karakteristik dari

$|B - V(B + A)| = 0$ adalah,

$$V_i = \frac{1}{1+\lambda_i} = \frac{1}{1+\frac{\theta_i}{1-\theta_i}} = \frac{1}{\frac{1-\theta_i+\theta_i}{1-\theta_i}} = 1 - \theta_i$$

Teorema 2.2.4 :

Suatu fungsi parameter $\underset{\sim}{C}'\beta$ dikatakan dapat terestimasi, jika terdapat sebuah vektor $\underset{\sim}{a}$ sedemikian sehingga $E[\underset{\sim}{a}'Y] = \underset{\sim}{C}'\beta$

Bukti :

$$\text{Jika } \underset{\sim}{C}' = \underset{\sim}{a}'X, \text{ maka } \underset{\sim}{C}'H = \underset{\sim}{a}' X H$$

$$= \underset{\sim}{a}' X (X'X)^- X'X$$

$$= \underset{\sim}{a}' X = \underset{\sim}{C}'$$

Jika $\underset{\sim}{C}'H = \underset{\sim}{C}'$ maka $\underset{\sim}{C}' = \underset{\sim}{C}' (X'X)^- X'X = \underset{\sim}{a}'X$ dengan mengambil $\underset{\sim}{a}' = \underset{\sim}{C}' (X'X)^- X'$.

syarat perlu dan cukup bahwa $\underset{\sim}{C}'\beta$ adalah dapat terestimasi secara tunggal ialah bahwa $\underset{\sim}{C}' = \underset{\sim}{C}'H$

$$\underset{\sim}{C}'\hat{\beta} = \underset{\sim}{C}' H\hat{\beta}$$

$$= \underset{\sim}{C}' H (X'X)^- X'y$$

$$= \underset{\sim}{a}' X (X'X)^- X'y$$

$= \underset{\sim}{a}^{*'} y$ adalah tunggal bilamana $\underset{\sim}{C}'\beta$ dapat terestimasi.

$\underset{\sim}{C}'\hat{\beta}$ adalah tak bias untuk $\underset{\sim}{C}'\beta$ karena :

$$E[\underset{\sim}{a}^{*'}y] = E[\underset{\sim}{C}'\hat{\beta}] = E[\underset{\sim}{C}'\{(X'X)^- X'Y + (I-H)\underset{\sim}{z}\}]$$

$$= E[\underset{\sim}{C}'\{(X'X)^- X'Y] + [\underset{\sim}{C}'(I-H)\underset{\sim}{z}]$$

$$= \underset{\sim}{C}'\{(X'X)^- X' E[Y]$$

$$= \underset{\sim}{C}'\{(X'X)^- X'X\beta$$

$= \underset{\sim}{C}'\beta$

Terbukti E $[\underset{\sim}{a}'Y] = C'\beta$ bhb $c' = C'H$.

Definisi 2.2.47 :

Fungsi parameter $C'\beta$, dimana $\beta$ adalah sedemikian sehingga $(X'X)\beta = X'y$, mempunyai penaksir tak bias linear tunggal $C'\hat{\beta} = C'(X'X)^{-}X'y$ dengan syarat $C' = C'H$ , dimana secara umum, untuk vektor sebarang. $\underset{\sim}{t}'$ sedemikian sehingga,

$C' = t'H$, $C'\hat{\beta} = t'(X'X)^{-}X'X(X'X)^{-}X'y = t'H\hat{\beta}$

Teorema 2.2.5 :

Berdasarkan pendapat Gauss-Markoff, $Y = X\beta + \varepsilon$, dimana $\theta = X\beta \varepsilon \Omega$, misalkan,

$$Y \sim N_n(X\beta, \sigma^2 I).$$

Misal C adalah matriks berdimensi gxq dari rank $g \leq r$, dimana r adalah rank dari X sedemikian sehingga g fungsi linear bebas linear $C\beta$ adalah masing-masing dapat terestimasi dan,

Qt = min $(y - X\beta)'(y - X\beta)$, dengan syarat pokok $C\beta = \xi$ , maka :

$Q_\omega = \min_\beta (y-X\beta)'(y-X\beta) = y'[I-X(X'X)^{-}X']y$ dan

$Qt - Q_\omega = (C\hat{\beta} - \xi)' [C(X'X)^{-}C']^{-1} (C\hat{\beta} - \xi)$

Bukti :

Qt adalah minimum dimana :

$Qt = \min (y - X\beta)'(y - X\beta)$

Suatu vektor multipel lagrange diperkenalkan sedemikian sehingga :



$F = (y - X\beta)'(y - X\beta) + 2\lambda'(C\beta - \xi)$

$= (y' - \beta'X')(y - X\beta) + 2\lambda'(C\beta - \xi)$

$= y'y - y'X\beta - \beta'X'X\beta + \beta'X'X\beta + 2\lambda'(C\beta - \xi)$.

F kita turunkan parsial terhadap $\beta$ dan $\lambda$ dan disama dengankan nol, di peroleh :

$$\left.\frac{\delta F}{\delta \beta}\right|_{\hat{\beta}} = -y'X - X'y + X'X\hat{\beta}_{\omega} + \hat{\beta}'_{\omega} X'X + 2\lambda C = 0$$

Karena : $(y'X)' = X'y$ dan $(\hat{\beta}'_{\omega}X'X)' = X'X\hat{\beta}_{\omega}$ , maka

$$-2X'y + 2X'X\hat{\beta}_{\omega} + 2\lambda C = 0$$

$$X'X\hat{\beta}\omega + C'\lambda = X'y \text{.........(1).}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \lambda} = 2\ (C\hat{\beta}_{\omega} - \xi) = 0 \text{ maka } C\hat{\beta}_{\omega} = \xi \text{ .......(2).}$$

(1). $X'X\hat{\beta}_{\omega} + C'\lambda = X'y$

$$X'X\hat{\beta}_{\omega} = X'y - C'\lambda$$

$$\hat{\beta}_{\omega} = (X'X)^{-}X'y - (X'X)^{-}C'\lambda$$

$$= \hat{\beta} - (X'X)^{-}C'\lambda \text{ , dikalikan dengan C}$$

$$C\hat{\beta}_{\omega} = C\hat{\beta} - C(X'X)^{-}C'\lambda$$

$$\xi = C\hat{\beta} - C\ (X'X)^{-}C'\lambda$$

$$C\ (X'X)^{-}C'\lambda = (C\hat{\beta} - \xi)$$

$$\lambda = [C\ (X'X)^{-}C'\lambda]^{-1}(C\hat{\beta} - \xi)$$

Maka taksiran terbesar dari $\beta$ berdasar hipotesa adalah :

$$\hat{\beta}_{\omega} = \hat{\beta} - (X'X)^{-}C'[C\ (X'X)^{-}C'\lambda]^{-1}\ (C\hat{\beta} - \xi)$$

dan

$$Qt = (y - X\hat{\beta}_{\omega})'(y - X\hat{\beta}_{\omega}),$$

$$= y'y - y'\ X\hat{\beta}_{\omega} - \hat{\beta}'_{\omega}\ X'y + \hat{\beta}_{\omega}'X'X\hat{\beta}_{\omega}$$

$$= y'y - y'X\hat{\beta}_{\omega}$$

$$= y'y - \hat{\beta}_{\omega}\ X'X\hat{\beta}_{\omega}$$

$$= Q_{\omega} + \lambda'\ [C\ (X'X)^{-}\ C']\ \lambda$$

atau :

$$Qh = Q_{t} - Q_{\omega} = (C\hat{\beta} - \xi)'\ [C\ (X'X)^{-}C'\lambda]^{-1}.$$

$$[C\ (X'\ X)^{-}C'][C(X'X)^{-}C'\lambda\ ]^{-1}.$$

$$(C\ \hat{\beta} - \xi\ ).$$

$$= (C\hat{\beta} - \xi)'\ [C\ (X'X)^{-}C'\lambda]^{-1}$$

$$(C\ \hat{\beta} - \xi\ ).$$



terbukti .