B A B II

MATERI PENDUKUNG

Dalam bab ini hanya diberikan pengertian-pengertian dari bab inti, sedang untuk pengertian-pengertian dasar, misalnya: Himpunan saling asing, irisan himpunan, gabungan himpunan dan lain-lain pembaca dianggap sudah tahu.

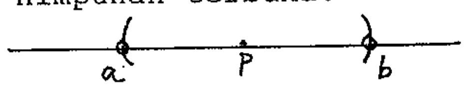
2.1 H I M P U N A N

Definisi 2.1 : HIMPUNAN TERBUKA

A merupakan HIMPUNAN TERBUKA (OPEN SET) bhb setiap titik dari A merupakan titik dalam (interior point). Sedang yang dimaksud titik dalam, bila titik $p \in A$ disebut titik dalam dari himpunan A, bhb p termasuk di dalam interval terbuka $S_p \subset A$.

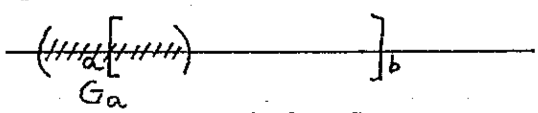
C o n t o h 2.1 :

(a). A = (a,b) adalah himpunan terbuka.



Sebab : untuk setiap $p \in A$ ada interval terbuka S_p sedemikian sehingga $p \in S_p \subset A$.

(b). $B = [a,b]$ bukan himpunan terbuka.



Sebab : $a \in B$, ternyata interval terbuka G_a yang memuat a bukan himpunan bagian dari B , karena G_a memuat titik - titik yang bukan anggota B.

Sifat - sifat himpunan terbuka :

* Gabungan dari sejumlah himpunan terbuka dalam R adalah terbuka.
* Irisan dari sejumlah terhingga himpunan terbuka dalam R adalah terbuka.

Definisi 2.2 : HIMPUNAN TERTUTUP

$A \subset R$ merupakan HIMPUNAN TERTUTUP, bhb $A^c \subset R$ adalah terbuka. Atau bisa kita katakan, $A \subset R$ adalah HIMPUNAN TERTUTUP , bhb A mengandung semua titik limitnya.

C o n t o h 2.2 :

(a). Interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan tertutup karena komplemen $(-\infty, a)$ (b, ∞), yaitu gabungan dari 2 himpunan tak hingga dan terbuka adalah terbuka.

(b). $A = \{1 , 1/2 , 1/3 , \ldots\ldots\}$ adalah bukan himpunan karena titik limit dari A yaitu $0 \notin A$.

Definisi 2.3 : TITIK - TITIK LIMIT

Misal $A \subset R$, R adalah himpunan bilangan riil. $p \in R$ merupakan TITIK LIMIT dari A , bhb setiap interval terbuka G mengandung p, memuat juga titiklain dari A yang bukan p.

C o n t o h 2.3 :

Misal $A = \{1 , 1/2 , 1/3 , \ldots\ldots\}$ titik 0 adalah titik limit dari A. Karena setiap interval terbuka yang memuat 0 memuat juga titik lain anggota A. Tetapi $0 \notin A$. Jadi titik limit suatu himpunan tidak harus menjadi anggota himpunan itu.

Definisi 2.4 :

1. HIMPUNAN TERHINGGA (finite) adalah suatu himpunan yang dapat dikorespodensi satu -satu dengan $\{1,2,3,\ldots,n\}$.
2. HIMPUNAN TAK HINGGA (infinite) adalah himpunan yang tidak finite.
3. HIMPUNAN DENUMERABEL adalah himpunan yang dapat diko - respodensi satu satu dengan $\{1,2,3,\ldots\ldots\}$.
4. HIMPUNAN KONTABEL adalah dapat berupa himpunan finite atau himpunan denumerabel.
5. HIMPUNAN NONDENUMERABEL adalah bila bukan finite dan bukan denumerabel.

Definisi 2.5 : HIMPUNAN TERBATAS (bounded)

Himpunan A disebut TERBATAS (mempunyai daerah terbatas) , jika A merupakan himpunan bagian dari suatu selang terbatas (finite interval). Atau himpunan A disebut TERBATAS , jika terdapat bilangan positip M, sedemikian sehingga , untuk semua x yang berada dalam A berlaku $|x| \leqslant M$.

C o n t o h 2.4 :

$A = \{1 , 1/2 , 1/3 , \ldots\ldots\}$ Karena A merupakan himpunan bagian dari selang $[0,1]$, maka A terbatas.

contoh yang tidak terbatas :

Misal $B = \{2 , 4 , 6 , \ldots\ldots\}$ adalah tidak terbatas. sebab B tidak dapat menjadi himpunan bagian interval terbatas , sedang B merupakan himpunan tak hingga.

Sehingga dapat disimpulkan :

1. Himpunan terhingga adalah terbatas.
2. Himpunan yang tak hingga mungkin terbatas dan mungkin juga tak terbatas (unbounded).

Selanjutnya untuk lebih memahami tentang himpunan maka akan didefinisikan himpunan terpisah (separated set) dan himpunan tak terhubung (disconnected set).

Definisi 2.6 : HIMPUNAN TERPISAH

Dalam suatu ruang topologi $\langle S, \tau \rangle$ terdapat dua himpunan misal $A \subset S$ dan $B \subset S$. Himpunan A dan B disebut dua himpunan yang TERPISAH , bhb A dan B saling asing , A tidak memuat titik limit dari B dan juga B tidak memuat titik limit dari A.

Contoh 2.5 :

Dalam ruang topologi $\langle R^1, \tau \rangle$ Misal ada himpunan - himpunan :

$A = \{ x \in R^1 / 1 < x < 2 \}$

$B = \{ x \in R^1 / 2 < x < 5 \}$

$C = \{ x \in R^1 / 5 \leqslant x < 6 \}$

Maka A dan B adalah terpisah. Karena saling asing , titik limit A bukan anggota dari B dan juga titik limit B tidak merupakan anggota dari A.

Sedang B dan C adalah tidak terpisah. Karena titik limit B dan C yaitu 5 yang menjadi anggota B dan C.

Definisi 2.7 : HIMPUNAN TAK TERHUBUNG

Dalam suatu ruang topologi $\langle S, \tau \rangle$ terdapat sebuah himpunan $A \subset S$. Maka himpunan A disebut TAK TERHUBUNG , bhb ada himpunan terbuka G dan H sedemikian sehingga irisan masing masing dengan A tidak kosong , irisan-irisan itu saling asing dan gabungan dari dua irisan itu merupakan A sendiri. Atau :

A adalah TAK TERHUBUNG , bhb ($\exists G,H \in \tau$). $G \cap A \neq \emptyset$, $H \cap A \neq \emptyset$; $G \cap A \,//\, H \cap A$, $(G \cap A) \cup (H \cap A) = A$

C o n t o h 2.6 :

Dalam ruang topologi $\langle R^1, \tau \rangle$ terdapat himpunan :

$A = \{ x \in R^1 \,/\, 1 < x < 3 \,;\, x \neq 2$

Maka jelas dalam himpunan A tidak terhubung. Karena :

Misal diambil dua himpunan terbuka :

$G = \{ x \in R^1 \,/\, x < 2 \}$ dan $H = \{ x \in R^1 \,/\, 2 < x < 5$

Sehingga $G \cap A \neq \emptyset$ dan $H \cap A \neq \emptyset$ juga

$G \cap A$ saling asing dengan $H \cap A$ dan

$(G \cap A) \cup (H \cap A) = A$

Jadi jelas A adalah himpunan tak terhubung.

Kemudian dalam suatu ruang topologi $\langle S, \tau \rangle$, $A \subset S$ disebut bahwa A terhubung , bhb A tidak dapat ditulis sebagai Gabungan dari duabuah himpunan yang tidak kosong dan keduanya terpisah.Sehingga disini dibedakan antara himpunan tidak tak terhubung dengan himpunan terhubung.

Definisi 2.8 : HIMPUNAN BERINDEK

Suatu keluarga dari HIMPUNAN - HIMPUNAN BERINDEK yang dinotasikan $\{ A_i : i \in I \}$ yaitu yang memasangkan suatu himpunan A_i dengan tiap - tiap $i \in I$, adalah sua tu fungsi dari I kedalam suatu keluarga dari himpunan himpunan. Himpunan I disebut himpunan dari indek-indek sedang himpunan- himpunan A disebut himpunan-himpunan berindek , dan tiap $i \in I$ disebut indek. Himpunan indek I adalah himpunan bilangan bulat positip , Keluarga berindek $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\}$ disebut barisan.

C o n t o h 2.7 :

Untuk setiap $n \in N$ (himpunan bilangan bulat positip), misalkan : $D_n = \{ x : x \in N,\ x \text{ adalah kelipatan dari } n \}$
Maka $D_1 = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ $D_2 = \{2,4,6,\ldots\ldots\}$ $D_3 = \{3,6,9,\ldots\ldots\}$ dan seterusnya.

Definisi 2.9 : BARISAN

Suatu barisan dinotasikan :
$\langle S_1 , S_2 , S_3 , \ldots\ldots\ldots \rangle$ atau $\langle S_n / n \in N \rangle$
adalah range dari suatu fungsi yang domainnya bilangan asli $N = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ Dan bayangan S_n atau $S(n)$ dari $n \in N$ disebut suku ke dari barisan.

C o n t o h 2.8 :

Misalkan : $\left.\begin{array}{l} - \langle S_n \rangle = \langle 1,3,5,\ldots\ldots \rangle \\ - \langle t(n) \rangle = \langle 1,0,1,0,\ldots\ldots \rangle \end{array}\right\}$ ditentukan oleh fungsi : - $S_n = 2n-1$

$$- \quad t(n) = 1/2 \left[1 + (-1)^{n+1} \right] = \begin{cases} 1 & \text{jika } n \text{ genap} \\ 0 & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Definisi 2.10 : BARISAN KONVERGEN

Barisan $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots \rangle$ dari bilangan riil dikatakan KONVERGEN ke $b \in R$ atau $b \in R$ merupakan limit dari barisan $\langle a_n \,/\, n \in N \rangle$ dinotasikan :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positip n_0 sedemikian sehingga untuk $n > n_0$ maka $|a_n - b| < \varepsilon$.

Atau : definisi lain

$\langle a_n \,/\, n \in N \rangle$ konvergen di titik b, jika setiap himpunan terbuka memuat b, memuat hampir semua suku-suku dari barisan.

c o n t o h 2.9 :

Misal $\langle S_n \rangle = \langle 1 \;,\; 1/2 \;,\; 1/3 \;,\; 1/4 \;,\; \ldots\ldots \rangle$ konvergen ke 0.

Misal suatu barisan $\langle S_n \rangle$ yang didefinisikan oleh fungsi : $f : n \longrightarrow (-1)^n$ dimana $n \in N$, adalah tidak konvergen.

Sifat-sifat dari barisan :

-. Jika range dari barisan $\langle a_n \rangle$ adalah terhingga , maka barisan itu mempunyai barisan bagian yang konvergen.

-. Jika range $\{ a_n \}$ dari barisan $\langle a_n \rangle$ memuat limit point b, maka barisan $\langle a_n \rangle$ mempunyai barisan bagian $\langle a_{i_n} \rangle$ yang konvergen ke b.

-. Setiap barisan bilangan riil yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen.

2.2 F U N G S I

Definisi 2.11 : FUNGSI KONTINYU

$f : R \longrightarrow R$ merupakan fungsi yang KONTINYU pada suatu titik x_o , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ tentu terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|x - x_o| < \delta$ maka : $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Suatu fungsi f dikatakan kontinyu jika kontinyu di setiap titik.

Penjelasan definisi diatas :

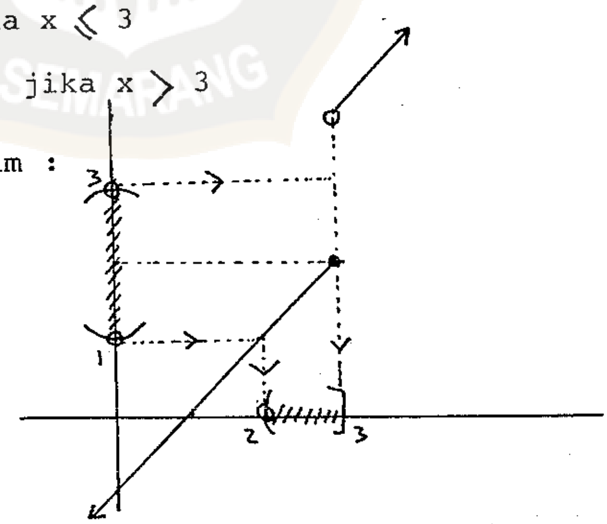
$|x - x_o| < \delta$ berarti $x_o - \delta < x < x_o + \delta$ atau x termasuk didalam interval terbuka ($x_o - \delta$, $x_o + \delta$). Juga $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ berarti f(x) termasuk didalam interval terbuka ($f(x_o) - \varepsilon$, $f(x_o) + \varepsilon$).

C o n t o h 2.10 :

Diketahui fungsi $f : R \longrightarrow R$ yang didefinisikan oleh :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 , & \text{jika } x \leq 3 \\ 1/2\ (x+5) , & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

dengan gambar diagram :



Maka dari gambar diatas terlihat f tidak kontinyu.

Sifat - sifat dari fungsi kontinyu :

1. Suatu fungsi kontinyu , bhb invers dari setiap himpunan terbuka adalah terbuka.

2. Bila $f : R \longrightarrow R$ adalah kontinyu dan $f(q) = 0$ untuk setiap

bilangan rasional $q \in Q$. maka $f(x) = 0$ untuk setiap bilangan riil $x \in R$.

3. Bila $f : R \longrightarrow R$ kontinyu untuk setiap titik dalam interval tertutup $[a,b]$, dan $f(a) < 0 < f(b)$. Maka terdapat titik $p \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(p) = 0$.
4. Bila $f : R \longrightarrow R$ adalah kontinyu pada interval tertutup $[a,b]$. Maka fungsi berharga diantara $f(a)$ dan $f(b)$.

Definisi 2.12 :

1. FUNGSI SURJEKTIF : Suatu fungsi yang mana kodomain (daerah kawan) semua mempunyai pasangan dengan domain (daerah asal).Atau disebut juga FUNGSI ONTO.
2. FUNGSI INJEKTIF : Suatu fungsi dimana range (daerah hasil) hanya memiliki tepat satu kawan dengan domain. Atau disebut FUNGSI SATU SATU.
3. FUNGSI BIJEKTIF : Suatu fungsi yang mana kodomain mempunyai kawan semua dengan domain dan bersifat satu satu. Jadi disebut juga FUNGSI ONTO DAN SATU SATU.

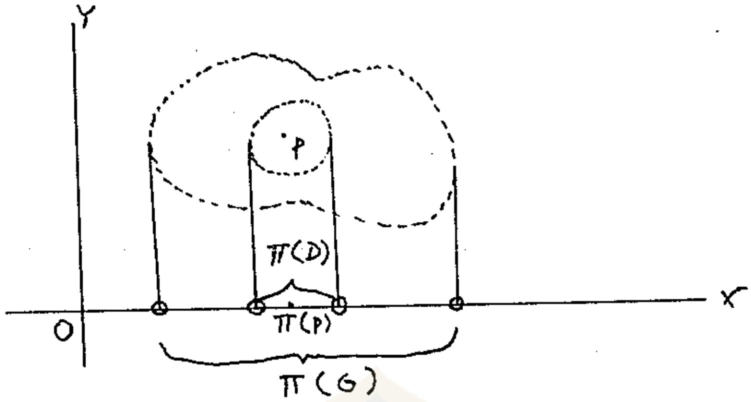
Definisi 2.13 : FUNGSI TERBUKA

Suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ disebut FUNGSI TERBUKA, jika bayangan (peta) dari setiap himpunan terbuka adalah terbuka.

C o n t o h 2.11 :

Ditentukan pemetaan proyeksi $\pi : R^2 \longrightarrow R$ dari bidang R^2 ke sumbu x. Yaitu $\pi(\ (x,y)\ ) = x$.

Lihat pada grafik.



(D) adalah proyeksi dari sebarang lingkaran terbuka $D \subset R^2$ merupakan interval terbuka. Sehingga setiap titik $\pi(p)$ berada dalam $\pi(G)$ adalah bayangan dari suatu himpunan terbuka $G \subset R^2$ termasuk dalam interval terbuka yang memuat $\pi[G]$, atau $\pi[G]$ terbuka. Jadi fungsi tersebut juga kontinyu.

Definisi 2.12 : HOMOMORPISMA

Jika X dan Y adalah ruang topologi dikatakan HOMOMORPISMA , jika terdapat fungsi $f : X \longrightarrow Y$ yang bijektif dan mempunyai sifat bahwa f dan f^{-1} adalah kontinyu. Sehingga f disebut homomorpisma. Atau fungsi : $f : X \longrightarrow Y$ adalah homomorpisma jika dan hanya jika f adalah kontinyu dan bijektif.

c o n t o h 2.12 :

Misal $X = (-1,1)$. Fungsi $f : X \longrightarrow R$ ditentukan oleh : $f(x) = tg\ 1/2\pi x$. Fungsi tersebut adalh 1-1 dan onto. Selanjutnya fungsi inversnya f^{-1} adalah kontinyu. Jadi garis bilangan riil R dan interval terbuka (-1,1) adalah homomorpisma. Karena f dan f^{-1} kontinyu dan f adalah fungsi bijektif.

2.3 RUANG TOPOLOGI DAN RUANG METRIK

Definisi 2.15 : TOPOLOGI

Suatu himpunan $S \neq \emptyset$. τ adalah keluarga himpunan - himpunan bagian dari S . τ disebut TOPOLOGI pada S, bhb memenuhi aksioma berikut :

T_1. S dan $\emptyset$ anggota .

T_2. Gabungan dari sejumlah anggota termasuk dalam τ.

T_3. Irisan dari tiap dua anggota termasuk τ termasuk dalam τ .

Anggota anggota τ adalah himpunan himpunan terbuka. Dan pasangan $\langle S, \tau \rangle$ disebut RUANG TOPOLOGI .

Contoh 2.13 :

Misal $S = \{x, y.z\}$. Diambil keluarga keluarga himpunan bagian yaitu :

$$\tau_1 = \{S, \emptyset, \{y\}, \{y, z\}\}$$
$$\tau_2 = \{S, \emptyset\}$$
$$\tau_3 = \{S, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$$

Jadi τ_1 , τ_2 , dan τ_3 merupakan topologi topologi pada S. Dan τ_2 disebut TOPOLOGI INDESKRET , sedang τ_3 disebut TOPOLOGI DISKRET.

Bahwa dalam suatu keluarga dari topologi topologi pada S yang dipilih yaitu $\{\sigma_i \ / \ i \in I\}$. Maka $\bigcap_i \sigma_i$ juga merupakan topologi pada S.

Definisi 2.16 : PENUTUP (CLOSURE) SUATU HIMPUNAN

Definisi 2.16 : PENUTUP (CLOSURE)

Jika $\langle S,\tau \rangle$ ruang topologi dan $A \subset S$.Maka PENUTUP DARI A dinotasikan $\overline{A}$ adalah merupakan irisan dari semua superset dari A yang tertutup.

C o n t o h 2.14 :

Ditentukan $S = \{a,b,c,d,e\}$.

$$\tau = \{S, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

tentukan closure dari $\{b\}$

Penyelesaian :

Himpunan himpunan bagian dari S yang tertutup adalah :

$\{\emptyset, S, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$

Maka himpunan tertutup yang memuat b adalah :

$F_1 = S$, $F_2 = \{b,c,d,e\}$ $F_3 = \{a,b,e\}$ $F_4 = \{b,e\}$. Jadi

$$\overline{\{b\}} = \bigcap_{i=1}^{4} F_i = \{b,e\}$$

Teorema 2.1 :

Jika $\langle S,\tau \rangle$ ruang topologi dan A adalah himpunan bagian dari S, maka $\overline{A} = A \cup A'$, dimana A' adalah himpunan titik limit dari A.

B u k t i :

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ \overline{A} \text{ tertutup} \end{array}\right\} \text{ Maka } \left.\begin{array}{l} A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A} \\ A \subset \overline{A} \end{array}\right\} \text{ maka } A \cup A' \subset \overline{A} \quad (*)$$

$A \cup A'$ adalah himpunan tertutup yang memuat A , sehingga:

$A \subset \overline{A} \subset A \cup A'$ (**)

dari (*) dan (**) :

$$\left.\begin{array}{l} A \cup A' \subset \overline{A} \\ \overline{A} \subset A \cup A' \end{array}\right\} \text{ jadi } \overline{A} = A \cup A'$$

Titik titik tertentu dalam ruang topologi yaitu INTERRIOR , EKSTERIOR , BOUNDARY .

Definisi 2.17 :

1. $\langle S, \mathcal{T} \rangle$ adalah ruang topologi . $p \in A \subset S$ merupakan INTERIOR POINT (titik dalam) dari A , jika p termasuk dalam himpunan terbuka G A sehingga $p \in G \subset A$.
2. Suatu titik eksterior (EKSTERIOR POINT) dari A adalah interior dari A^c (A^c = himpunan komplemen A)
3. BOUNDARY (batas) dari himpunan A adalah himpunan titik titik yang tidak termasuk interior atau ekterior dari A.

C o n t o h 2.15 :

Misal = $\{ S, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b.c,d,e\} \}$ adalah topologi pada $S = \{a,b,c,d,e\}$. Diambil $A = \{b,c,d\} \subset S$.

Tentukan : interior A atau int (A) , ekterior A atau ext(A) boundary A atau b(A).

Penyelesaian :

Untuk mencari int(A) , kita selidiki setiap titik anggota S. Misal $a \in S$, ternyata tidak terdapat himpunan terbuka G yang memuat a , jadi $a \notin$ int(A). Untuk titik b dan e juga bukan int(A). Karena tidak ada himpunan terbuka yang memuat titik b dan e. Untuk titik c dan d adalah int(A).

Untuk menentukan ext(A), kita cari $A^c = \{a,e\}$. Diselidiki setiap titik anggota S. Misal $a \in S$, maka ada himpunan terbuka $G = \{a\}$ memuat a , sedemikian sehingga :

$a \in \{a\} \subset \{a,e\}$. Jadi $a \in \text{Int}(A^c)$ atau $a \in \text{ext}(A)$

Titik titik b,c,d dan e bukan merupakan ext(A) , karena tidak ada himpunan terbuka yang memuat titik titik tersebut dan termuat dalam $A^c = \{a,e\}$.

Untuk menentukan b(A) yaitu :

$$b(A) = S - [\text{int}(A) \cup \text{ext}(A)]$$
$$= \{a,b,c,d,e\} - [\{c,d\} \cup \{a\}]$$
$$= \{a,b,c,d,e\} - \{a.c.d\}$$
$$= \{b,e\}$$

Dalam suatu ruang topologi $\langle S, \tau \rangle$. A adalah himpunan bagian dari S , maka dapat kita ambil hubungan :

$\overline{A} = \text{int}(A) \cup b(A)$.

Definisi 2.18 : PERSEKITARAN (NEIGHBORHOODS)

Misal $\langle S, \tau \rangle$ adalah ruang topologi. $p \in S$, N suatu himpunan bagian dari S merupakan PERSEKITARAN dari p bhb , N memuat himpunan terbuka G yang memuat p, yaitu $p \in G \subset N$.

Keluarga semua persekitaran dari $p \in S$ dinotasikan $\mathcal{N}_p$ disebut SISTIM PERSEKITARAN.

C o n t o h 2.16 :

Misal $\tau = \{S, \emptyset, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ merupakan topologi pada $S = \{a,b,c,d,e\}$. Tentukan : $\mathcal{N}_e$

Persekitaran dari titik e adalah superset dari setiap himpunan terbuka yang memuat e. Sehingga persekitaran dari e adalah : $\{a,b,e\}$, $\{a,b,c,d,e\}$. Jadi :

$\mathcal{N}_e = \{a,b,e\}$ dan S .

Akibat dari definisi persekitaran adalah :

Suatu himpunan G dikatakan terbuka , bhb , G merupakan persekitaran dari setiap titik titiknya.

Definisi 2.19 : RUANG METRIK

Jika S adalah himpunan tidak kosong. Suatu fungsi berharga riil d yang didefinisikan pada SXS adalah pasangan terurut dalam S disebut METRIK , bhb , memenuhi aksioma berikut :

1. $d(a,b) > 0$ untuk $a \neq b$

   $d(a,b) = 0$ untuk $a = b$
2. $d(a,b) = d(b,a)$
3. $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$

C o n t o h 2.17 :

Pada himpunan himpunan bilangan riil R^1 , fungsi $d(a,b) = |a-b|$ dengan a,b bilangan riil adalah metrik, karena memenuhi ketiga aksioma metrik.

Definisi 2.20 : SEMIMETRIK

Seperti pada definisi metrik , tetapi untuk aksioma yang ketiga tidak dipenuhi maka disebut SEMIMETRIK

C o n t o h 2.18 :

Misalkan R = bilangan riil. Funfsi d didefinisikan :

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{bila } x,y \text{ keduanya rasional atau keduanya irrasional.} \\ |x-y|^{-1} & \text{bila } x,y \text{ tidak keduanya rasional atau tidak keduanyairrasional.} \end{cases}$$

Untuk aksioma 1 mudah dipenuhi yaitu bila $x = y$ akan diperoleh $d(x,y) = 0$. Sedang bila $x \neq y$ maka akan diperoleh : $d(x,y)$ positip. Untuk aksioma 2 terpenuhi karena definisi menggunakan harga mutlak. Sedang untuk aksioma 3 tidak dipenuhi bila kita mengambil bilangan seperti pada ketentuan definisi dan dikerjakan menurut aksioma 3.

Definisi 2.21 : PSEDOMETRIK

Suatu ruang metrik yang memenuhi aksiomanya , kecuali aksioma $d(a,b) > 0$ untuk $a \neq b$, maka disebut suatu PSEDOMETRIK.

C o n t o h 2. 19 :

Dalam R^2. Suatu fungsi d didefinisikan :

$d(x,y) = \left| x_1 - x_2 \right|$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$.

Apakah merupakan psedometrik . Untuk aksioma :

$x = y$ berarti $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ maka $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$.

Jadi $d(x,y) = 0$ bila $x = y$.

Untuk aksioma : $d(x,y) > 0$ misal $x = (3,7)$ dan $y = (3,9)$

maka $d(x,y) = \left| x_1 - y_1 \right| = \left| 3-3 \right| = 0$. jadi tidak dipenuhi.

Untuk aksioma : $d(x,y) = \left| x_1 - y_1 \right| = \left| y_1 - x_1 \right| = d(y,x)$.

Untuk aksioma : $d(x,y) = \left| x_1 - y_1 \right| = \left| x_1 - z_1 + z_1 - y_1 \right|$

$$\leq \left| x_1 - z_1 \right| + \left| z_1 - y_1 \right|$$

Jadi $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dimana $z \in R^2$.

Definisi 2.22 : RUANG T_2 (RUANG HAUSDORFF)

Suatu ruang topologi S disebut RUANG HAUSDORFF , bhb , memenuhi aksioma berikut :

Setiap pasang titik yang berbeda $a,b \in S$ berturut-turut termasuk kedalam himpunan himpunan terbuka yang saling asing. Dengan kata lain :
ada himpunan himpunan terbuka G dan H sedemikian sehingga $a \in G$, $b \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$.

Suatu ruang hausdorff adalah juga ruang T_1.

C o n t o h 2.20 : RUANG HAUSDORFF

Ditunjukkan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang T_2 atau ruang Hausdorff :
Misal $a,b \in S$ adalah titik titik yang berbeda , sehingga $d(a,b) = \varepsilon > 0$. Bola bola terbuka misal $G = S(a,1/3\varepsilon)$ dan $H = S(b,1/3\varepsilon)$ yang berturut turut berpusat di a dan b. Disini G dan H saling asing , sebab jika $p \in G \cap H$ maka :
$d(a,p) < 1/3\ \varepsilon$ dan $d(p,b) < 1/3\ \varepsilon$, Sehingga dengan pertidaksamaan segitiga :

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,p) + d(p,b) \\ &< 1/3\ \varepsilon + 1/3\ \varepsilon \\ &= 2/3\ \varepsilon \end{aligned}$$

Hal yang tidak mungkin , karena $d(a,b) = \varepsilon$. Jadi G dan H saling asing yang mana a dan b berturut turut ada dalam bola bola terbuka G dan H. Sehingga S adalah ruang T_2.

L e m m a 2.1 :

Misal kan S himpunan metrik dengan metrik d , dan $K(p,r)$ adalah kitaran dalam S. Apabila titik q ada dalam $K(p,r)$ maka terdapat bilangan positip r' sedemikian sehingga :
$K(q,r') \subset K(p,r)$.

B u k t i :

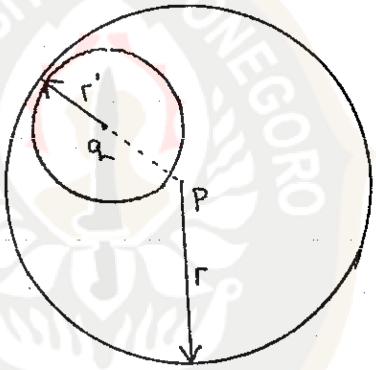
Karena $q \subset K(p,r)$, maka akibatnya $d(p,q) < r$ atau $r - d(p,q) > 0$. Misal $r' = r - d(p,q)$. Jadi $r' > 0$. Tinggal membuktikan bahwa $K(q,r') \subset K(p,r)$. Ambil titik $x \in K(q,r')$, berarti $d(q,x) < r'$. Karena d suatu metrik , maka :

$d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x)$

$< (r-r') + r'$, sebab $r' = r - d(p,q) = r$.

karena $d(p,r) < r$, berarti $x \in K(p,r)$. Jadi $K(q,r') \subset K(p,r)$

Diperlihatkan dengan gambar :



Teorema 2.2 :

Jika $\langle S, \tau \rangle$ adalah suatu ruang lindelof yang reguler maka $\langle S, \tau \rangle$ adalah normal.

B u k t i :

Misal F_1 dan F_2 himpunan bagian tertutup yang saling asing dari himpunan S. Maka $\langle F_1, \tau | F_1 \rangle$ dan $\langle F_2, \tau | F_2 \rangle$ adalah Lindelof , sebab jika $\langle S, \tau \rangle$ lindelof dan $A \subset S$ adalh tertu tup , maka ruang bagian $\langle A, \tau / A \rangle$ adalah lindelof.

Dengan sifat reguler : $\forall p \in F_1$, $\exists G_1(p)$ sedemikian sehingga $p \in G_1(p) \subset \overline{G_1(p)} \subset S - F_2$. Koleksi $\{ G_1(p) / p \in F_1 \}$ adalah suatu sampul terbuka untuk F_1 dan harus memuat sampul bagian kontabel $\{ G_1^n / n \in I^+ \}$. Sama seperti di atas, $\forall q \in F_2$, $\exists G_2(q) \in \tau$ sedemikian sehingga $q \in G_2(q) \subset \overline{G_2(q)} \subset$

$S - F_1$. Koleksi $\{G_2(q) \;/\; q \in F_2\}$ adalah suatu sampul terbuka untuk F_2 dan harus memuat sampul bagian kontabel $\{G_2^n \;/\; n \in I^+\}$. Misalkan $G_1 = \bigcup\{G_1^n - \bigcup\{\overline{G_2^i} \;/\; i = 1,\ldots,n\} \;/\; n \in I^+\}$ dan $G_2 = \bigcup\{G_2^n - \bigcup\{\overline{G_1^i} \;/\; i = 1,\ldots,n\} \;/\; n \in I^+\}$. Mudah diperlihatkan bahwa G_1 dan G_2 adalah terbuka dan salingasing. Sehingga $F_1 \subset G_1$ dan $F_2 \subset G_2$, sebagai syarat supaya normal.