BAB III

DISTRIBUSI NILAI EKSTRIM MULTIVARIASI

Jika ukuran karaktheristik diambil dari anggota-anggota yang sama dari suatu populasi, maka jumlah acak hasil pengamatan mempunyai bentuk distribusi multivariasi.

Misal bilangan karaktheristik adalah m dan jumlah acak yang berkorespondensi adalah $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots\ldots, X^{(m)}$, sedang hasil observasi pada X akan dinotasikan dengan $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_m$ dan komponen-komponen ke t dari X_j adalah X_{tj}, dengan :

$$X_j = (X_{1,j}, X_{2,j}, X_{3,j}, \ldots\ldots, X_{m,j})$$

Andaikan X_j dengan $1 \le j \le n$, adalah sebanyak n kali pengamatan, maka komponen-komponen dari statistik ke t dari anggota-anggotanya adalah $X_{t,1:n}, X_{t,2:n}, X_{t,3:n}, \ldots\ldots, X_{t,n:n}$.

Pada Bab II telah digunakan notasi-notasi $W_{t,n:n}$, $X_{t,n:n}$ dan $Z_{t,n:n}$, sedang pada Bab ini diselidiki adanya distribusi pendekatan ($W_{1,n}, W_{2,n}, W_{3,n}, \ldots\ldots, W_{m,n}$) dan ($Z_{1,n}, Z_{2,n}, Z_{3,n}, \ldots, Z_{m,n}$)

yang ditunjukkan oleh notasi vektor W_n dan Z_n.

Untuk akibat yang timbul yang diperoleh dari hasil observasi pada nilai ekstrim dari distribusi multivariasi akan dibahas pada Bab berikut .

Untuk vektor-vektor numerik $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ komponennya disignifikasikan dengan pencatatan, sedang untuk operasi aritmatikanya selalu menyelidiki komponen-komponen yang terpilih

Adapun operasi dasar pada aritmatika terdifinisi sebagai berikut :

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \text{ berarti } x_t < y_t \text{ , untuk } 1 \le t \le m.$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \ldots\ldots, x_m+y_m)$$

$$\mathbf{xy} = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots\ldots, x_my_m)$$

$$\mathbf{x/y} = (x_1/y_1, x_2/y_2, x_3/y_3, \ldots\ldots, x_m/y_m)$$

Untuk distribusi fungsi $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ dari vektor X , didefinisikan :

$$F(\mathbf{x}) = P(X < \mathbf{x}) = P(X^{(1)} < x_1, X^{(2)} < x_2, X^{(3)} < x_3, \ldots\ldots, X^{(m)} < x_m) \ldots\ldots i$$

dengan dicari kondisi dari $F(x)$, untuk a_n dan b_n dari vektor-vektor sedemikian hingga setiap komponen dari b_n positif dan,

$$P(Z_n < a_n + b_n z) = H_n(a_n + b_n z)$$

konvergen lemah menuju ke distribusi fungsi $H(z)$ berdemensi m .

3.1.SIFAT DASAR DISTRIBUSI MULTIVARIASI

Ambil $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots\ldots, X^{(m)})$ random vektor dan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ adalah titik bebas dari dimensi ruang Euclide, sehingga distribusi fungsi $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ didefinisikan :

$$F(\mathbf{x}) = P(X^{(1)} < x_1, X^{(2)} < x_2, X^{(3)} < x_3, \ldots\ldots, X^{(m)} < x_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ii}$$

dengan sifat dasar dari hasil probabilitas adalah $F(\mathbf{x})$ tidak turun di setiap variabel x_j ,untuk $1 \le j \le m$.

Jika $x_j \longrightarrow -\infty$,untuk salah satu j, maka $F(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$ dan di lain pihak , jika $x_j \longrightarrow +\infty$, maka $F(\mathbf{x})$ menuju ke distribusi berdimensi (m-1), dengan distribusi vektor diperoleh dari X oleh perpindahan komponen ke j .

Jika dimisalkan setiap x_t , dengan t = j menuju tak berhingga positif, maka limit $F(x) = F_j(x)$, dan konsekwensi terbaik hasil observasi diperoleh bahwa $F(x)$ adalah tetapan yang tunggal dari semua marginalnya .

THEOREMA 3.1.1

Ambil $F(x)$ distribusi fungsi berdimensi m dengan marginal $F_j(x)$, $1 \le j \le m$, dan untuk semua $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ berlaku :

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^{m} F_j(x_j) - m + 1\right) \le F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \le \min\left(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \ldots, F_m(x_m)\right).$$

Bukti :

Ambil $A_j = (X^{(j)} < x_j)$ dan ,

$B_j = (X^{(j)} \ge x^j)$ sehingga,

$$P(v_m = 0) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \ldots\ldots\ldots 1$$

Dengan theorema (2.3.1) diperoleh :

$$P(v_m = t) = \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^k \binom{k+t}{t} S_{k+t,m}$$

$$P(v_m = 0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{k}{0} S_{k,m}$$

$$P(v_m = 0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_{k,m}$$

$$P(v_m = 0) \geq (-1)^0 S_{0,m} - 1.S_{1,m}$$

jadi,

$$P(v_m = 0) \geq 1 - S_{1,m},$$

sehingga,

$$P(v_m = 0) \geq 1 - S_{1,m} = 1 - \sum P(B_j) =$$

$$1 - \sum_{j=1}^{m} (1 - F_j(x_j)).$$

Jika bentuk tersebut adalah negatif, maka harga $P(v_m = 0) = 0$, lengkaplah buktinya.

Untuk theorema-theorema berikut, dinotasikan bentuk-bentuk berikut :

$$G_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_k}) = P(B_{j_1}, B_{j_2}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_k})$$

dengan,

$B_j = (X^{(j)} \geq x_j$ dan j_k adalah signifikasi vektor-vektor $(j_1, j_2, j_3, \ldots\ldots, j_k)$, kemudian diambil

$S_0(x) = 1$ dengan $k \geq 1$, berlaku :

$$S_k(x) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \ldots\ldots \leq j_k \leq m} G_{j_{(k)}}(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_k)$$

sehingga dengan theorema (2.3.1) dan $P(v_m=0)=F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ akan diperoleh relasi-relasi sebagai berikut :

THEOREMA 3.1.2

Ambil $m \geq 2$, berlaku :

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \sum_{k}^{0} (-1)^k S_k(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m) \ldots\ldots 2$$

dan untuk bilangan bulat $0 \leq s \leq (m-1)/2$ berlaku :

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) \leq F(x) \leq \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x) \;..3$$

Bukti :

Dibuktikan dahulu :

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{m} (-1) S_k(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m).$$

Karena :

$$P(v_m = t) = \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^k \binom{k+t}{t} S_{k+t,m}$$

$$P(v_m = 0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k . 1 . S_{k,m}$$

$$P(v_m = 0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_{k,m} \quad \text{dan}$$

$$P(v_m = 0) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$$

sehingga,

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(x_1, x_2, \ldots, x_3, \ldots\ldots, x_m)$$

Jadi theorema terbukti.

Selanjutnya dibuktikan pertidaksamaan (3),

Jika integer s , dengan $0 \le s \le (m-1)/2$,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S_k(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(x) - (-1)^m S_m(x)$$

$$\sum_{k=0} (-1)^k S_k(x) \quad \ldots\ldots\ldots 3a$$

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) = \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x) + (-1)^{2s+1} S_{2s+1}(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3b$$

Dari pertidaksamaan 3a dan persamaan 3b, maka diperoleh :

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) \le F(x) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x) .$$

Jadi theorema terbukti .

Contoh :

Ambil (X,Y) vektor dimensi 2 pada distribusi fungsi eksponensial dengan X dan Y adalah satuan eksponen variasi .

Misalkan F(x,y) merupakan distribusi fungsi bivariasinya . Dan ambil ,

$$G(x,y) = P(X \geq x, Y \geq y)$$

$$x_1 = e^{-x} , x_2 = e^{-y}$$

sehingga diperoleh :

$$F(x,y) = (-1)^0 S_0 (x) + (-1).(e^{-x} + e^{-y}) + G(x,y)$$

$$= 1 - e^{-x} - e^{-y} + G(x,y)$$

Jika untuk distribusi eksponensial bivariasi, misal (X,Y) vektor pada demensi dua, dengan X dan Y satuan variasi eksponensial (dengan bukti di atas) maka ,

$$G(x,y) = P(X \geq x, Y \geq y) \quad ....4$$

Adapun beberapa distribusi eskponensial bivariasi, yang sering dipakai :

i. Distribusi Morgenstern

$$G(x,y) = e^{-y-x} ((1+(1-e^{-x})(1-e^{-y})))$$

ii. Distribusi Gumbel I

$$G(x,y) = \text{eksp} (-x-y + \theta xy)$$

iii. Distribusi Gumbel II

$$G(x,y) = \text{eksp}(-(x^m - y^m)^{1/m})$$

iv. Distribusi Maxshal dan Olkin

$$G(x,y) = \text{eksp} (-x-y- \lambda \max(x,y)), \lambda > 0$$

v. Distribusi Mardia

$$G(x,y) = (e^{x} + e^{y} - 1)^{-1}$$

Dari definisi (i) dan (ii) disimpulkan :

- merupakan penjabaran langsung univariasi dari konvergen lemah . Dapat dikatakan juga bahwa barisan $F_n(x)$ berdistribusi konvergen dimensi m ke fungsi F(x), jika untuk titik -titik x yang kontinyu pada F(x) berlaku $F_n(x) \longrightarrow F(x)$, untuk $n \longrightarrow +\infty$.

- F(x) dikatakan berdistribusi non degeneret berdimensi m , jika semua marginal univariasinya adalah non degeneret.

3.2. NILAI EKSTRIM KONVERGEN LEMAH UNTUK VEKTOR BEBAS INDEPENDEN AND IDENTICALLY DISTRIBUTED (IID).

Semua vektor pada permukaan bidang merupakan dimensi m dan pada permasalahan ini akan igunakan nootasi standar untuk semua vektor pada permukaan bidang , yait : $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_m$, yang merupakan vektor - vektor bebas dengan distribusi fungsi F(x). Jadi,

$$H_n(z) = P(Z_{1,n} < z_1, Z_{2,n} < z_2, Z_{3,n} < z_3 \ldots\ldots$$

$$\ldots, Z_{m,n} < z_m))$$

$$= F^n(Z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

dengan ,

$$H_n(x) = P(Z_n < x) = F^n(x)$$

dan

$$L^*_n(y) = P(W_{1,n} \geq y_1, W_{2,n} \geq y_2, W_{3,n} \geq y_3 \ldots W_{m,n} \geq y_m)$$

dengan persamaan tersebut diperoleh dari bentuk pada Bab terdahulu , yaitu :

$$L_n(x) = P(W_n \geq x) = 1-(1-F(x))^n$$

dan

$$G(y) = P(x^{(1)} \geq y_1, X^{(2)} \geq y_2, X^{(3)} \geq y_3, \ldots\ldots, X^{(m)} \geq y_m)$$

Persoalan $W_n = \min(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_m)$ merupakan bagian permasalahan $Z_n = \max(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_m)$, karena pertukaran vektor X ke (-X) sehingga Z_n dipakai sebagai pegangan untuk menyelesaikan permasalahan selanjutnya, dengan tujuan memberikan kondisi pada x dengan barisan - barisan a_n dan b_n yang positif (a_n dan b_n adalah vektor) sedemikian hingga :

$$H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

antesiden dari implikasi tersebut merupakan pengertian konvergen lemah dan H(x) adalah distribusi fungsi non degeneret.

THEOREMA 3.2.1.

Misal $F_n(x)$ merupakan barisan distribusi fungsi berdimensi m . Ambil marginal univariasi ke t dari $F_n(x)$ yaitu $F_{tn}(x_t)$. Jika $F_n(x)$ konvergen secara lemah ke distribusi F(x) yang kontinyu non degeneret , maka untuk setiap t dengan batasan $1 \leq t \leq m$,$F_{tn}(x_t)$ konvergen secara lemah ke marginal $F_t(x_t)$ dari F(x).

Bukti :

Ambil x_t dari suatu bilangan acak da X merupakan vektor dimensi m , dengan komponen ke t adalah x_t.

Andaikan untuk $\epsilon > 0$ dengan n_0 adalah integer , sedemikian hingga untuk $n \geq n_0$,

$$| F_n(x) - F(x) | < \epsilon \; .... 7$$

n_0 tidak bergantung pada ϵ dan x,limit F(x) kontinyu, dan konvergen lemahnya unifrom pada x, sehingga n_0 hanya merupakan fungsi dari ϵ . Jika diambil x_j besar dengan $j \neq t$, maka

$$| F(x) - F_t(x_t) | < \epsilon \; .... 8$$

Ambil $n \geq n_0$ dan pilih untuk setiap x_j, $j \neq t$ cukup besar , sehingga sesuai dengan ketidaksamaan (8),

$$| F_n(x) - F_t(x_t) | < \epsilon$$

Jadi untuk semua $n \geq n_0$ berlaku,

$$| F_{tn}(x_t) - F_t(x_t) | \leq |F_{tn}(x_t) - F_n(x) |$$

$$+ | F_n(x) - F(x)| + |F(x) - F_t(x_t) | < 3\epsilon$$

Karena $\epsilon > 0$, semabarang, maka

$$F_{tn}(x_t) \longrightarrow F_t(x_t).$$

Jadi theorema terbukti.

DIFINISI 3.2.1

Ambil F(x) berdistribusi fungsi demensi m , dengan marginal univariasinya $F_t(x_t)$ dengan $1 \leq t \leq m$. Ambil D(y) suatu fungsi berdemensi m yang lain pada selang $0 \leq y_t \leq 1$ dengan $1 \leq t \leq m$, sedemikian hingga pada setiap variabelnya berlaku,

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m) = D(F_1(x_1), F_2(x_2),$$

$$F_3(x_3), \ldots\ldots F_m(x_m)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

maka,

Fungsi D(y) disebut fungsi dependen terhadap F(x)yang disajikan :

$$D_F = D_F(y) = D(y).$$

dan didefinisikan pula :

$$D_F\, n(Y) = D_F^n \left(Y_1^{1/n}, Y_2^{1/n}, Y_3^{1/n}, ..., Y_m^{1/n}\right) ....10$$

dengan marginal ke t dari $F^n(x)$ adalah $F^n(x\ )$.

jadi,

$$F(x_1, x_2, x_3, ..., x_m) = D_F\, n\left(F_1^n(x_1), F_2^n(x_2), F_3^n(x_1) ...., F_m^n(x_m)\right)$$

Jika persamaan (9) berderajat n, maka didapat :

$$F(x_1, x_2, x_3, ..., x_m) = D_F^n\left(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3) ...., F_m(x_m)\right)$$

THEOREMA 3.2.2.

Jika F(x) sedemikian hingga, dengan a_n dan b_n barisan - barisan vektor - vektor, $H_n(a_n + b_n x_n)$ $\longrightarrow$ $H(\mathbf{x})$, maka fungsi dependen DH dari limit $H(\mathbf{x})$ adalah :

$$D_H^k\left(y_1^{1/k}, y_2^{1/k}, y_3^{1/k}, ..., y_m^{1/k}\right)$$

$$= D_H(y_1, y_2, y_3, ..., y_m)$$

Bukti :

Ambil k integer ≥ 1, sehingga dengan,

$$H_n(a_n + b_n x) = F^n(x) \quad \text{....(dari persamaan 5)}$$

dan

$$H_n(a_n + b_n x_n) \longrightarrow H(x)$$

Jadi $H_n(a_n + b_n x) = F^n(x) \longrightarrow H(x)$,

sehingga,

$$H_n k(a_{nk} + b_{nk} x) = F^{nk}(a_{nk} + b_{nk} x) \longrightarrow H(x),$$

untuk n menuju tak terhingga , dan dapat disajikan pula :

$$F^{nk}(a_{nk} + b_{nk} x) \longrightarrow H^{1/k}(x), \text{untuk } n$$

$$\longrightarrow +\infty \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11$$

Misalkan a_{nk} merupakan vektor - vektor dari A_k dan b_{nk} vektor - vektor dari B_k, dengan setiap komponen dari B_k positif, sedemikian hingga :

$$H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(x), \text{ dengan } n \longrightarrow +\infty$$

$$H_{nk}(a_{nk} + b_{nk} x) = F^{nk}(a_{nk} + b_{nk}) \longrightarrow H(x)$$

$$F^{nk}(a_{nk} + b_{nk} x) \longrightarrow H^{1/k}(x), \text{ untuk}$$

$n \longrightarrow +\infty$, sehingga diperoleh :

$$H^k(A_k + B_k x) \longrightarrow H(x) \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

Karena fungsi $H^{k}(A_k + B_k x)$ dependen sama dengan $H_k(x)$ sehingga ,

$$D^{k}_{F}(y^{1/k}, y^{1/k}, y^{1/k}, \ldots .y^{1/k}) = D_F\, k\, (y)$$

$$D^{k}_{H}(y) = D_H\, k\, (A_k + B_k x) = D_H(y_1, y_2, y_3, \ldots \ldots y_m)$$

$$D^{k}_{H}(y_1^{1/k}, y_2^{1/k}, y_3^{1/k}, \ldots .y_m^{1/k}) = DH(y_1, y_2, y_3, \ldots \ldots, y_m)$$

Jadi theorema terbukti.

Contoh : 3.2

Ambil $H_1(x), H_2(x), \ldots\ldots, H_m(x)$, yang bertipe sama dengan salah satu dari $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$, atau $H_{3,0}(x)$ sehingga $H(\mathbf{x}) = H_1(x)H_2(x)H_3(x)\ldots.H_m(x)$ memenuhi limit yang mungkin $H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(\mathbf{x})$.

THEOREMA 3.2.3.

Sembarang limit distribusi fungsi $H(\mathbf{x})$ dari $H_n(a_n + b_n x)$ menuju ke $H(\mathbf{x})$ adalah kontinyu dan marginal univariasinya berbentuk $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ atau $H_{3,0}(x)$

Bukti :

Persamaan (12) berlaku untuk semua x . Jika diambil setiap komponen x_j dari X kecuali x_t, menuju ke $+\infty$, maka diperoleh ,

$$H^k(A_k + B_k x) \longrightarrow H(\mathbf{x}) \text{ , untuk marginal}$$

ke t dari $H(\mathbf{x})$

Pada theorema 2.4 , solusi semua univariasinya merupakan bentuk dari,

$$H^n(A_k + B_k x) \longrightarrow H(\mathbf{x}), \text{ yang bentuk}$$

distribusinya telah dibuktikan .

Karena marginal adalah deferensiabel, maka $H(\mathbf{x})$ adalah kontinyu.

Jadi Theorema terbukti.

Contoh : 3.2.3

Ambil (X,Y) vektor dimensi dua dan ke duanya merupakan satuan variasi eksponensial

Misalkan $y_1 = e^{-x}$ dan $y_2 = e^{-y}$

$$G(x,y) = e^{-x-y} (1 + (1-e^{-x})(1-e^{-y})),$$

$$= e^{-x} e^{-y} (1 + (1-e^{-x})(1-e^{-y})),$$

$$D(y_1,y_2) = y_1 y_2 (1 + (1-y_1)(1-y_2)).$$

sedang untuk distribusi Mardia sebagai berikut:

$$G(x,y) = (e^{x} + e^{y} - 1)^{-1}$$

Ambil $y_1 = e^{-x}$ dan $y_2 = e^{-y}$,

$$G(x,y) = (\frac{1}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-y}} - 1)^{-1}$$

Jadi fungsi dependennya adalah :

$$D(y_1,y_2) = (1/y_1 + 1/y_2 - 1)^{-1}$$

$$D(y_1,y_2) = (\frac{y_1 y_2}{y_1 - y_1 y_2 + y_2})$$

THEOREMA 3.2.4

Ambil $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_m$ adalah iid vektor berdemensi m dari distribusi fungsi F(**x**) yang sederhana maka vektor-vektor a_n dan $b_n > 0$, sedemikian hingga $(Z_n - a_n)/b_n$ konvergen secara lemah menuju ke distribusi fungsi non degeneret H(**x**) jika dan hanya jika setiap marginal mempunyai domain dari salah satu distribnusi $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ dan $H_{3,0}(x)$ dengan $n \longrightarrow +\infty$, berlaku :

$$DF^{n}(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, y_3^{1/n}, \ldots\ldots\ldots, y_m^{1/n}) \longrightarrow$$

$$D_H(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots, y_m) \ldots\ldots\ldots 13$$

Bukti :

Andaikan a_n dan b_n adalah vektor-vektor yang lebih besar dari nol, dan $(Z_n - a_n)/b_n$ konvergen lemah ke distribusi fungsi $H(x)$ yang non degeneret, maka $H(x)$ kontinyu (theorema 3.2.3), kemudian oleh theorema (3.2.1) menghasilkan, bahwa marginal univariasi dari $F(x)$ mempunyai domain salah satu dari distribusi fungsi $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ dan $H_{3,0}(x)$, dan jika $H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(x)$ maka oleh :

$$H_n(Z) = P(Z_{1,n} < z_1, Z_{2,n} < z_2, Z_{3,n} < z_3, \ldots$$

$$\ldots, Z_{m,n} < z_m) = F^n(Z) \text{ , dan}$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = D(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_m(x_m))$$

$$D_F n(Y) = DF(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, y_3^{1/n}, \ldots\ldots, y_m^{1/n})$$

diperoleh,

$$F^n(z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_m) \longrightarrow D^n(F_1(x_1), F_2(x_2),$$

$$F_3(x_3), \ldots\ldots\ldots\ldots, F_m(x_m) .$$

$$F^n(z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_m) \longrightarrow H_n(Y)(y_1, y_2, y_3, \ldots$$

$$, y_m),$$

$$DF^n(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) \longrightarrow DH^n(Y)(y_1, y_2, y_3, \ldots$$

$$, y_m),$$

$$DF^n(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) \longrightarrow DH^n(Y)(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, y_3^{1/n}, \ldots\ldots, y_m^{1/n})$$

Oleh theorema (3.2.1),

$$D^n F(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) \longrightarrow D_H(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m),$$

dengan,

$z_t = F_t(a_{t,n} + b_{t,n} x_t)$ dan $y_t = H_t(x_t)$, adalah komponen ke t yang diperoleh dari distribusi marginalnya. Tetapi $z_t^n \longrightarrow y_t$ untuk setiap t dan $D_H(y)$ adalah kontinyu, jika H(x) juga kontinyu.

Oleh sebab itu, bentuk :

$$DF^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, y_3^{1/n}, \ldots\ldots\ldots, y_m^{1/m}) \longrightarrow$$

$$D_H(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots, y_m).$$

Jadi theorema terbukti .

THEOREMA 3.2.5

Distribusi fungsi H(x) dari m variasi adalah merupakan hasil limit dari distribusi fungsi $H(a_n + b_n x)$ dengan $n \longrightarrow +\infty$, jika dan hanya jika marginal univariasinya berbentuk salah satu dari fungsi $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ atau $H_{3,0}(x)$, dan fungsi dependennya (D_H) merupakan syarat cukup dari theorema 3.2.2.

Bukti :

Jika $H(\mathbf{x})$ hasil limit dari $H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(\mathbf{x})$, kemudian dengan theorema 3.2.2 dan 3.2.3, yang telah dibuktikan bahwa $H(\mathbf{x})$ kontinyu, karena marginalnya deferensiabel, sehingga $H(\mathbf{x})$ mempunyai bentuk salah satu dari $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ atau $H_{3,0}(x)$

, ...14a

kemudian ambil marginal univariasi dari $H(\mathbf{x})$ dengan D_H ditentukan.

Untuk semua $n \geq 1$ dan setiap $1 \leq t \leq m$, dengan bilangan $a_{t,n}$ dan $b_{t,n} > 0$ sedemikian hingga marginal ,

$$H_t^n(a_{t,n} + b_{t,n} x) = H_t(x) \quad \text{...............15}$$

Pilih $H(\mathbf{x})$ sebagai distribusi populasi dari $F(\mathbf{x})$ dan ,

$$a_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \ldots\ldots\ldots, a_{m,n})$$

$$b_n = (b_{1,n}, b_{2,n}, b_{3,n}, \ldots\ldots\ldots, b_{m,n})$$

dengan menggunakan relasi,

$$H_n(Z) = P(Z_{1,n} < z_1, Z_{2,n} < z_2, Z_{3,n} < z_3, \ldots$$

$$\ldots, Z_{m,n} < z_m) = F^n(Z).$$

kemudian,

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = D_H\, F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \ldots, F_m(x_m)$$

karena,

$$H_t^n(a_{t,n} + b_{t,n} x) = H(\mathbf{x}) \quad \text{dan} \quad D_F^n(\mathbf{y}) = D_F^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, y_3^{1/n}, \ldots\ldots, y_m^{1/n}).$$

dan dengan theorema 3.2.2, diperoleh :

$$P(Z_n < (a_n + b_n x)) = H^n(\mathbf{x}) =$$

$$= D_H^n(H_1^n(a_{1,n} + b_{1,n} x_1), \ldots, H_m^n(a_{m,n} + b_{m,n} x_m))$$

$$= D_H\, n(H_1(x_1), H_2(x_2), H_3(x_3), \ldots\ldots\ldots, H_m(x_m))$$

$$= D_H^n(H_1^{1/n}(x_1), H_2^{1/n}(x_2), H_3^{1/n}(x_3), \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots, H_m^{1/m}(x_m))$$

$$= D_H(H_1(x_1), H_2(x_2), H_3(x_3), \ldots\ldots, H_m(x_m)).$$

Jadi $(Z_n - a_n)/b_n$ konvergen lemah ke $H(\mathbf{x})$,

sedangkan $H(\mathbf{x})$ merupakan limit $H^n(a_n + b_n x)$,

dengan $n \longrightarrow +\infty$,.........................15a.

sehingga dari pernyataan (14a) dan (15a) , theorema terbukti.

Langkah untuk memeriksa bahwa fungsi $F(x)$ dari m variasi merupakan hasil limit dari fungsi $F(a_n + b_n x)$:

i. Diselidiki apakah marginal-marginalnya mempunyai domain salah satu dari bentuk $H_{1,\Gamma}(x), H_{2,\Gamma}(x), H_{3,0}(x)$. Jika benar, maka menentukan atau menerapkan komponen-komponen dari normalisasi pada a_n dan b_n.

ii. $DF(Y\ )$ ditetapkan dari definisi $F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m) = D(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \ldots\ldots, F_m(x_m))$, dan diperiksa, jika $D_F^n(y^{1/n})$ konvergen .

iii. Jika didapatkan fungsi yang dependen, maka diambil hasil limit yang aktual (sesungguhnya).

3.3. KRETERIA SELANJUTNYA UNTUK IID (Independent and identically distributed)

Misalkan $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots\ldots, X^{(m)})$ adalah vektor dengan distribusi F(x), dan misalkan $j_{(k)} = (j_1, j_2, j_3, \ldots\ldots, j_k)$ dengan $1 \le k \le m$ adalah komponen vektor dengan $1 \le j_1 \le j_2 \le j_3 \le \ldots \ldots \le j_k \le m$, sedangkan distribusi fungsi vektor $F_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\ldots, x_{j_k})$ dari vektor - $(X^{(j_1)}, X^{(j_2)}, X^{(j_3)}, \ldots\ldots, X^{(j_k)})$ disebut distribusi marginal berdemensi k , yang diperoleh dari $F(\mathbf{x})$ dengan $x_t \longrightarrow +\infty$, untuk semua $t \neq j_1, j_2, j_3, \ldots\ldots, j_k$; yang disajikan dengan notasi

$$G_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\ldots, x_{j_k}) =$$

$$P(X^{(j_1)}_{j_1} \geq x_{j_1}, X^{(j_2)}_{j_2} \geq x_{j_2}, \ldots\ldots, X^{(j_k)}_{j_k} \geq x_{j_k})$$

untuk $j(m) = (1,2,3,,\ldots\ldots,m)$, bentuk tersebut ditulis $G(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$, sedangkan $G(\mathbf{x})$ adalah fungsi umumnya dan $G_{\mathbf{j}_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_k})$ merupakan fungsi marginal dari $G(\mathbf{x})$.

Misalnya : pada distribusi limit $H_n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(\mathbf{x})$, dinotasikan oleh $H(x)$, artinya untuk $H_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\ldots, x_{j_k})$ menandakan korespondensi marginalnya ke komponen-komponen $\mathbf{j}_{(k)}$.

Ambil $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ dari vektor-vektor iid (independent and identically distributed) yang didistribusikan oleh X.

Andaikan $F(\mathbf{x})$ sedemikian hingga setiap marginal univariasinya mempunyai domain salah satu dari fungsi $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ atau $H_{3,0}(x)$, dengan konstanta-konstanta $a_{t,n}$ dan $b_{t,n} > 0$, maka untuk $n \longrightarrow +\infty$, didefinisikan :

$$\text{Limit } F^{n}_{t,n}(a_{t,n} + b_{t,n}\, x) = H_t(x) , \text{ dengan } 1 \le t \le m \quad \ldots\ldots 16$$

dengan $H_t(x)$ mempunyai bentuk yang sama salah satu dari fungsi $H_{1,\Gamma}(x)$, $H_{2,\Gamma}(x)$ atau $H_{3,0}(x)$, dengan $a_{t,n}$ dan $b_{t,n}$ adalah konstanta , dimana :

a_n diambil dari $(a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \ldots, a_{m,n})$

b_n diambil dari $(b_{1,n}, b_{2,n}, b_{3,n}, \ldots, b_{m,n})$

THEOREMA 3.3.1

$(z_n - a_n)/b_n$ adalah konvergen lemah ke distribusi $H(x)$ yang degeneret, jika dan hanya jika,untuk vektor tertentu $j(k)$ dan untuk setiap x dari $H_t(X_t)$ dengan interval tertutup $1 \le t \le m$, dari limit $F^{n}_{t,n}(a_{t,n} + b_{t,n}\, x) = H(x)$ adalah positif dengan $n \longrightarrow +\infty$, dan untuk $n \longrightarrow +\infty$,

$$\text{Limit } nG_{j_{(k)},n}(a_{j_{1,n}} + b_{j_{1,n}}\, x_{j_{1,n}}, a_{j_{2,n}} + b_{j_{2,n}}\, x_{j_{2,n}}, a_{j_{3,n}} + b_{j_{3,n}}\, x_{j_{3,n}}, \ldots, a_{j_{k,n}} + b_{j_{k,n}}\, x_{j_{k,n}}) =$$

$$h_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\ldots, x_{j_k}). \ldots\ldots 17$$

adalah finit (berhingga) serta fungsi,

$$H(\mathbf{x}) = \text{eksp}\,\Big(\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \sum_{1\le j_1<j_2<j_3<\ldots\ldots\ldots<j_k\le m} h_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_k})\Big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 18$$

adalah distribusi non degereret yang merupkan hasil limit distribusi dari $(Z_n - a_n)/b_n$. Kemudian jika limit distribusi $H(\mathbf{x})$ ada , maka pertidaksamaan berikut dapat digunakan, yaitu :

Jika $s \ge 0$ adalah integer, maka,

$$H(\mathbf{x}, 2s+1) \le H(\mathbf{x}, 2s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19$$

dengan ,

$$H(\mathbf{x}, r) = \text{eksp} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k} \sum_{1\le j_1<j_2<j_3<\ldots . j_k\le m} h_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_k})$$

Bukti :

Jika $\lim_{n \to +\infty} nG_{j_{(k)}}(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\ldots, x_{j_k})$ ada,maka

$(Z_n - a_n) / b_n$ konvergen lemah, dengan distribusi fungsi $H(\mathbf{x})$ pada persamaan (18) dan pertidaksamaan (19), kemudian dengan relasi persamaan $H_n(Z) = P(Z_{1,n} < z_1, z_{2,n} < z_2, z_{3,n} < z_3, \ldots\ldots\ldots z_{m,n} < z_m))$ dan $H_n(a_n + b_n x_n) \longrightarrow H(\mathbf{x})$, dibuktikan bahwa :

$$F^n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(\mathbf{x}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 21$$

Jika diambil x sedemikian hingga untuk salah satu t berlaku $H_t(x_t) = 0$ (pada persamaan 16) maka

$$F^n(a_n + b_n x) \longrightarrow 0,$$

yang artinya , jika x vektor dengan komponen vektor ke t, adalah x_t , maka :

$$F(a_n + b_n x) \le F(a_{t,n} + b_{t,n} x_t),$$

sehingga mengakibatkan hasil limit $F^n(a_n + b_n x) \longrightarrow H(\mathbf{x})$ sama dengan nol. Kemudian ambil x sedemikian untuk semua t, berlaku $H_t(x_t) > 0$,dengan persamaan (17) adalah finit , maka :

$$F(a_n + b_n x) \longrightarrow 1, \text{ untuk } n \longrightarrow +\infty,$$

Jadi untuk n besar, maka $F(a_n + b_n x) > 0$. Kemudian jika digunakan theorema logaritma maka,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log F(a_n + b_n x)}{1 - F(a_n + b_n x)} = -1 \quad \ldots\ldots 21a$$

sehingga, untuk $n \longrightarrow +\infty$,

$$F^{n}(a_{n} + b_{n}x) = \text{eksp}\,(\,n\log F(a_{n} + b_{n}x))$$

$$= \text{eksp}\,(\,-n\,(\,1 - F(a_{n} + b_{n}x)\,)\,) \quad \ldots\ldots.22$$

Selanjutnya, ambil $F(x_{1}, x_{2}, x_{3}, \ldots, x_{m})$ sama dengan

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k}\, S_{k}(x_{1}, x_{2}, x_{3}, \ldots\ldots\ldots, x_{k})$$

dan,

$$\text{Limit}_{n \longrightarrow +\infty}\; nG_{\mathbf{j}_{(k)},n}(a_{j_{1,n}} + b_{j_{1,n}} x_{j_{1,n}},\, a_{j_{2,n}} + b_{j_{2,n}} x_{j_{2,n}},$$

$$a_{j_{3,n}} + b_{j_{3,n}} x_{j_{3,n}}, \ldots\ldots\ldots, a_{j_{k,n}} + b_{j_{k,n}} x_{j_{k,n}})$$

$$= h_{\mathbf{j}_{(k)}}(x_{j_{1}}, x_{j_{2}}, x_{j_{3}}, \ldots\ldots, x_{j_{k}})$$

adalah finit, kemudian

$$F^{n}(\,a_{n} + b_{n}x\,) \longrightarrow H(\mathbf{x}),$$ dengan limit

$H(\mathbf{x})$ dimbil dari.

$$H(\mathbf{x}) = \text{eksp}\,\Big(\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \sum_{1 \le j_{1} < j_{2} < j_{3} < \ldots < j_{k} \le m} h_{\mathbf{j}_{(k)}}(x_{j_{1}}, x_{j_{2}}, x_{j_{3}}, \ldots, x_{j_{k}})\Big)$$

karena dimisalkan $0 \le s \le (m-1)/2$ integer, sehingga diperoleh,

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) \le F(x) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x) \quad ..22a$$

Dibuktikan dahulu pertidaksamaan (22a).

$$\text{Ambil } F(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(x)$$

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) = \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x) - 1$$

jadi

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x), \ldots\ldots\ldots i$$

substitusikan 2s+1 = m maka,

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(x) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x).$$

jadi

$$F(x) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(x), \ldots\ldots\ldots\ldots ii$$

kemudian disubtitusikan 2s = m , maka

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(x) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k S_k(x) \le \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots iii$$

Dari pertidaksamaan (i) ,(ii),(iii) diperoleh ,

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(\mathbf{x}) \le \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(\mathbf{x}) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(\mathbf{x})$$

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(\mathbf{x}) \le F(\mathbf{x}) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(\mathbf{x})$$

Jadi theorema terbukti .

Kemudian dibuktikan untuk syarat secukupnya

Ambil persamaan (17)

$$H(\mathbf{x}) = \text{eksp} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{j=0}^{m} \text{limit}_{n \longrightarrow +\infty}\, nG_{j_{(k)},n}(a_{j_1,n} + b_{j_1,n} x_{j_1,n}, a_{j_2,n} + b_{j_2,n} x_{j_2,n}, \ldots, a_{j_k,n} + b_{j_k,n} x_{j_k,n})$$

karena,

$$H(\mathbf{x}) = \text{eksp} \left(\sum_{k=1}^{2s+1} (-1)^k \sum_{j=0}^{m} \text{limit}_{n \longrightarrow +\infty}\, nG_{j_{(k)},n}(a_{j_1,n} + b_{j_1,n} x_{j_1,n}, a_{j_2,n} + b_{j_2,n} x_{j_2,n}, \ldots, a_{j_k,n} + b_{j_k,n} x_{j_k,n})\right)$$

$$= \text{eksp} \left(\sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \sum_{j=0}^{m} \text{limit}_{n \longrightarrow +\infty}\, nG_{j_{(k)},n}(a_{j_1,n} + b_{j_1,n} x_{j_1,n}, a_{j_2,n} + b_{j_2,n} x_{j_2,n}, \ldots, a_{j_k,n} + b_{j_k,n} x_{j_k,n})\right)$$