BAB II

MATERI DASAR

2.1. Derivatif Biasa dan Parsiil

Difinisi 3

Fungsi $f(x)$ relatif maximum pada titik $x = x_0$,jika $f(x_0) \geqslant f(x)$, dan relatif mimimum pada titik $x = x_0$, jika $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Difinisi 4

Fungsi $f(x)$ diferentiabel pada x jika :

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada dan merupakan dirivatif f pada x

$\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$.

Difinisi 5

Fungsi $f(x,y)$ diferentiabel pada x jika :

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$ ada dan $= \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Juga diferentiabel di y jika :

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ ada dan $= \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Theorema 1

Fungsi $f(x)$pada interval $a \leqslant x \leqslant b$ mempunyai relatif minimum atau maximum pada titik x_0 dalam interval $a < x < b$ .Jika $f(x)$ diferentiabel pada x_0 maka $f'(x_0) = 0$.

B u k t i :

Misal $f(x)$ mempunyai titik minimum pada $x = x_0$ maka dari difinisi 3 diperoleh $f(x_0) \leqslant f(x)$ ....(1)

Untuk semua x dalam persekitaran x_0 maka

$f(x_0) \leqslant f(x_0 + \Delta x)$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) dan untuk semua $\Delta x \to 0$, dan menurut difinisi4 diperoleh

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ ada dan terbatas .

Jika Δx cukup kecil maka :

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad , \text{ jika } \Delta x > 0$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad , \text{ jika } \Delta x < 0$$

sehingga untuk $\Delta x > 0$ dan $\Delta x \to 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

dan untuk $\Delta x < 0$, $\Delta x \to 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad \ldots\ldots(4)$$

$0 \leq f'(x_0) \leq 0$ (dari persamaan 3 dan 4)

maka teorema 1 terbukti $f'(x_0) = 0$

Theorema 1 ini disebut sebagai syarat perlu dari titik ekstrim .

2.2. D U A L I T A S

Dualitas adalah suatu konsep dasar yang penting dalam optimasi program matematika .

Theori dual menunjukan bahwa suatu tingkat tertentu untuk masalah meminimumkan berhubungan dengan suatu tingkat dari masalah memaximumkan .

Difinisi 6

Titik (x_0,y_0) dinamakan titik sadle (sadle point) dari suatu fungsi $f(x,y)$,jika ada $e > 0$, dan untuk semua x dan y dalam persekitaran dari x_0,y_0 dengan $|x-x_0| < e$ dan $|y-y_0| < e$,berlaku :

$$f(x_o,y) \leqslant f(x_o,y_o) \leqslant f(x,y_o) \quad .$$

Theorema 2

Suatu fungsi dengan titik sadle (x_o,y_o)

$$K(x_o,y) \leqslant K(x_o,y_o) \leqslant K f(x,y_o) \quad ,$$

dapat ditulis menjadi

$$\max_y K(x_o,y) = K(x_o,y_o) = \min_x K(x,y_o) \quad .$$

B u k t i :

$$K(x_o,y) \leqslant K(x_o,y_o) \leqslant K(x,y_o)$$

$$K(x_o,y) \leqslant K(x_o,y_o)$$

$$K(x_o,y) \leqslant \max_y K(x_o,y) = K(x_o,y_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$K(x_o,y_o) \leqslant K(x,y_o)$$

$$K(x_o,y_o) = \min_x K(x,y_o) \leqslant K(x,y_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

maka dari persamaan (5) dan (6) diperoleh

$$\operatorname*{Max}_y K(x_o,y) = K(x_o,y_o) = \min_x K(x,y_o)$$

terbukti theorema 2 .

Dari bentuk $\max_y K(x_o,y) = K(x_o,y_o) = \min_x K(x,y_o)$.

Jika masalah $\max_y K(x_o,y)$ dianggap masalah primal , maka dualnya adalah me-$\min_x K(x,y_o)$, atau sebaliknya .

Masalah dual dari masalah program geometri posinomial didapatkan dari perkembangan pertidaksamaan Aritmatika Geometri .

Theorema 3

Jika $v_1,v_2,\ldots,v_T$ adalah variabel riel positif , $v_1=v_2=\ldots=v_T$, dan $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_T$ variabel riel positif dengan $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_T = 1$ maka berlaku :

$$\omega_1 v_1+\omega_2 v_2+\ldots+\omega_T v_T \geqslant v_1^{\omega_1} v_2^{\omega_2}\ldots v_T^{\omega_T}$$

B u k t i :

Pandang masalah program dinamik

$$\text{Max } p = \prod_{i=1}^{T} v_i$$

dengan syarat $\sum_{i=1}^{T} v_i = q$

$$v_i \geqslant 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,T$$

Untuk menentukan sub bagian optimal dari q , yang mana akan memaximalkan T bagian , ditandai :

$0 \leqslant x_i \leqslant q$, $i=1,2,\ldots,T$, maka

$x_1 = v_1 \dashrightarrow f_1(x_1) = \max v_1$

$x_2 = v_1+v_2 \dashrightarrow f_2(x_2) = \max v_1 v_2 = \max v_2 f_1(x_1)$

$\qquad = \max v_2 \; f_{2-1}(x_2 - v_2)$

$x_3 = v_1+v_2+v_3 \dashrightarrow f_3(x_3) = \max v_1 v_2 v_3 = \max v_3 f_2(x_2)$

$\qquad = \max v_3 f_{3-1}(x_3 - v_3)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x_T = v_1+v_2+\ldots+v_T \dashrightarrow f_T(x_T) = \max v_1 v_2 \ldots v_T = \max \prod_{i=1}^{T} v_i$

$\qquad = \max v_T f_{T-1}(x_T - v_T)$

Atau bisa ditulis

$$f_1(x_1) = \max_{v_1 = x_1} v_1 \quad , i=1$$

$$f_i(x_i) = \max_{0 \leqslant v_i \leqslant x_i} v_i f_{i-1}(x_i - v_i) \quad , \; i=1,2,\ldots,T$$

Menurut theorema 1 syarat perlu suatu titik mencapai harga optimal derifatif pertama=0 . Maka $f_i(x_i)$ mencapai maximal pada titik v_i ,jika

$$\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial v_i} = 0 \; .$$

Maka untuk $i=1$, $f_1(x_1) = x_1 = \left[\frac{x_1}{1}\right]^1$, $v_1 = x_1$

$i=2 \quad , \quad f_2(x_2)=v_2\cdot(x_2-v_2) = v_2x_2-v_2^2$

$$\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial v_2} = x_2-2v_2=0 \quad , \quad v_2=\frac{x_2}{2}$$

$$f_2(x_2)=\frac{x_2}{2}\,x_2-\left[\frac{x_2}{2}\right]^2 = \left[\frac{x_2}{2}\right]^2$$

untuk $i=3$

$$f_3(x_3)=v_3f_2(x_3-v_3)=v_3f_2(x_2)= v_3\left[\frac{x_3-v_3}{2}\right]^2$$

$$= \frac{x_3^2v_3-2v_3^2x_3+v_3^2}{4}$$

$$\frac{\partial f_3(x_3)}{\partial v_3} = \tfrac{1}{4}\,x_3^2 - \tfrac{1}{2}\,2\,v_3x_3+\tfrac{3}{4}\,v_3^2 = 0$$

$v_3=x_3$ atau $v_3=\frac{x_3}{3}$

$$f_3(x_3)= v_3\left[\frac{x_3-v_3}{2}\right]^2 = \frac{x_3}{3}\left[\frac{x_3-\frac{x_3}{3}}{2}\right]^2 = \left[\frac{x_3}{3}\right]^3$$

$$x_2=x_3-v_3=x_3-\frac{x_3}{3} = \frac{2}{3}\,x_3$$

$$v_2=\frac{x_2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,x_3=\frac{x_3}{3}$$

$$v_1=x_1=x_2-v_2=\frac{2}{3}\,x_3-\frac{x_3}{3} = \frac{x_3}{3}$$

Jadi $v_1=\frac{x_1}{1} = \frac{x_3}{3} \dashrightarrow f_1(x_1)=\left[\frac{x_1}{1}\right]^1$

$v_2=\frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} \dashrightarrow f_2(x_2)=\left[\frac{x_2}{2}\right]^2$

$v_3=\frac{x_3}{3} = \frac{x_3}{3} \dashrightarrow f_3(x_3)=\left[\frac{x_3}{3}\right]^3$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$v_i=\frac{x_i}{i} \dashrightarrow f_i(x_i)=\left[\frac{x_i}{i}\right]^i$

maka $v_1=v_2=\ldots=v_T=\frac{x_T}{T}$; $f_T(x_T)=\left[\frac{x_T}{T}\right]^T = \left[\frac{\sum_{i=1}^{T} v_i}{T}\right]^T$

$$f_T(x_T)=\max \prod_{i=1}^{T} v_i \geq \prod_{i=1}^{T} v_i$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{T} v_i}{T}\right]^T \geq \prod_{i=1}^{T} v_i$$

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{1}{T} v_i \geq \left[\prod_{i=1}^{T} v_i\right]^{1/T}$$

$$\frac{1}{T} v_1 + \frac{1}{T} v_2 + \ldots + \frac{1}{T} v_T \geq v_1^{1/T} v_2^{1/T} \ldots v_T^{1/T} = v_i^{1}$$

jadi $1/T + 1/T + \ldots + 1/T = 1$, dan karena

$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_T = 1$, maka terbukti theorema 3

$$\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \ldots + \omega_T v_T \geq v_1^{\omega 1} \; v_2^{\omega 2} \; \ldots \; v_T^{\omega T}$$ dengan

$v_1 = v_2 = \ldots = v_T$, dan $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_T = 1$

Theorema 3 ini disebut dengan Pertidaksamaan Aritmatika - Geometri .

2.3. Penylesaian Persamaan Simultan

2.3.1 Matrik dan Determinan

Difinisi 7

Matriks adalah tabel bilangan berbentuk empat persegi panjang, disusun menurut baris-baris dan kolom.

Maka secara umum dapat ditulis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Untuk matrik $A = (a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$

banyaknya baris $=m$

banyak nya kolom$=n$

$m=n$ disebut matrik bujur sangkar

Difinisi 8

Matriks diagonal adalah matrik bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utama sama dengan nul.

Difinisi 9

Matriks satuan I_n adalah matrik diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya = satu (1)

Difinisi 10

Matrik skalar adalah matrik diagonal dengan semua elemen diagonal utamanya = k .

Matrik satuan I_n adalah bentuk khusus dari matrik skalar , dengan k=1

misal :

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$ adalah matrik skalar ordo 3 ,

dapat ditulis pula sebagai berikut :

$$k\, I_3 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Difinisi 11

Jika A matriks berukuran mxn , dan Bmatrik berukuran qxp ,maka perkalian matrik AB ,dapat dilakukn jika dan hanya jika n=q .

Pandang matrik A dan B dibawah ini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A\,B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdot+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+\cdot+a_{2n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdot+a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa hasil perkalian AB dapat ditentukan - jika baris A dan kolom B sama panjang . Unsur pa - da baris ke-i dan kolom ke-j dari AB adalah adalah produk baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B .

Difinisi 12

Determinan adalah tabel bilangan yang berbentuk bu jur - sangkar , disusun menurut baris-baris dan ko lom - kolom dan mempunyai harga numerik .

Difinisi 13

Determinan Minor $|M_{ij}|$ dari elemen a_{ij} adalah de - terminan mula-mula , yang dihilangkan baris ke-i - dan kolom ke-j .

Kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$

Difinisi 14

Harga determinan dari matriks bujur sangkar A ada - lah :

$$\det. A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij} \quad , j=\text{tetap}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ (-1)^{i+j}\ |M_{ij}| , \ j=\text{tetap}$$

atau

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij} \quad ,i=\text{tetap}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (-1)^{i+j} \quad |M_{ij}| \quad , \; i = \text{tetap}$$

Difinisi 15

Matrik $A=(a_{ij})$ berukuran m x n .

Transportse matrik A adalah $A^T = (a_{ji})$ berukuran -

n x m .

Difinisi 16

Matrik $A = (a_{ij})$

Transport dari matrik kofaktor A_{ij} disebut matrik

ajoin A .

Difinisi 17

Matrik bujur sangkar A berordo n .

Jika ada matrik B dengan $AB = BA = I_n$.

Maka B disebut matrik invers dari A ditulis A^{-1} ,

merupakan matrik bujur sangkar berordo n .

Theorema 4

Jika A adalah matrik bujur sangkar dengan $|A| \neq 0$,

sebagai determinannya , maka matrik invers :

$$A^{-1} = \frac{\text{ajoin } A}{|A|} \quad .$$

Bukti :

Padang matrik A dan (ajoin A)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ajoin } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (\text{ajoin} A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Menurut difinisi 11

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}\cdots a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n} & \cdots & a_{2n}A_{n1}+a_{22}A_{n2}\cdots a_{2n}A_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}\cdots a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

Menurut difinisi 14

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad , j = \text{tetap}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad , i = \text{tetap}$$

dan karena

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \quad , \quad i \neq k \quad ; \quad j = \text{tetap}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \quad , \quad j \neq k \quad ; \quad i = \text{tetap}$$

Maka A (ajoin A) $= \begin{pmatrix} |A| & 0 \cdots & 0 \\ 0 & |A| \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$

menurut difinisi 10 maka

A (ajoin A) $= |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

jadi A (ajoin A) $= |A| \; I_n$

Dengan cara yang sama diperoleh

(ajoin A) . $A = |A| \; I_n$, maka

$$\frac{A \,.\, (\text{ajoin } A)}{|A|} = \frac{(\text{ajoin } A) \,.\, A}{|A|}$$

menurut difinisi 17 terbukti teorema 4 yaitu

$$A^{-1} = \frac{\text{ajoin } A}{|A|} \quad , |A| \neq 0$$

2.3.2. Aturan Cramer

Aturan Cramer adalah salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan simultan . Yang di kerjakan menurut metode determinan .

Pandang persamaan simultan , n persamaan linier dan n variabel yang tidak diketahui , n=1,2,...,n .

$$a_{11}\ x_1+a_{12}\ x_2+\dots+a_{1n}\ x_n=b_1$$

$$a_{21}\ x_2+a_{22}\ x_2+\dots+a_{2n}\ x_n=b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}\ x_1+a_{n2}\ x_2+\dots+a_{nn}\ x_n=b_n$$

Dengan perkalian matrik bisa ditilis A X = B

dimana :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Theorema 5

Jika AX = B maka $x_k = \frac{D_k}{D}$

D=det A = $|A|$

D = det A dengan mengganti elemen kolom ke-k dengan harga persamaan $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

x_k= variabel dengan urutan ke-k

B u k t i :

$$A\ X = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

menurut difinisi 17 $A^{-1}A = I_n$, maka

$I_n X = A^{-1}B$

menurut theorema 4 $A^{-1} = \frac{(\text{ajoin } A)}{|A|}$,maka

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$x_k = (A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n)$

$k = 1, 2, \dots, n$

menurut difinisi 14 , $|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$

Maka $(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}) = |A|$ dengan mengganti elemen kolom ke-k $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ dengan matrik B yaitu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$,dan diberi simbul D_k .

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_1 & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_2 & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_n & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1k} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2k} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nk} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$x_k = \frac{D_k}{|A|}$,terbukti teorema 5

Theorema 5 ini disebut dengan Aturan Cramer .

Contoh soal

Selesaikan dengan aturan cramer

$x_1 = 1$

$x_1 + x_2 = 0$

Penyelesaian menurut aturan cramer pada teorema 5

$$x_k = \frac{D_k}{|A|} \quad , \quad |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$$

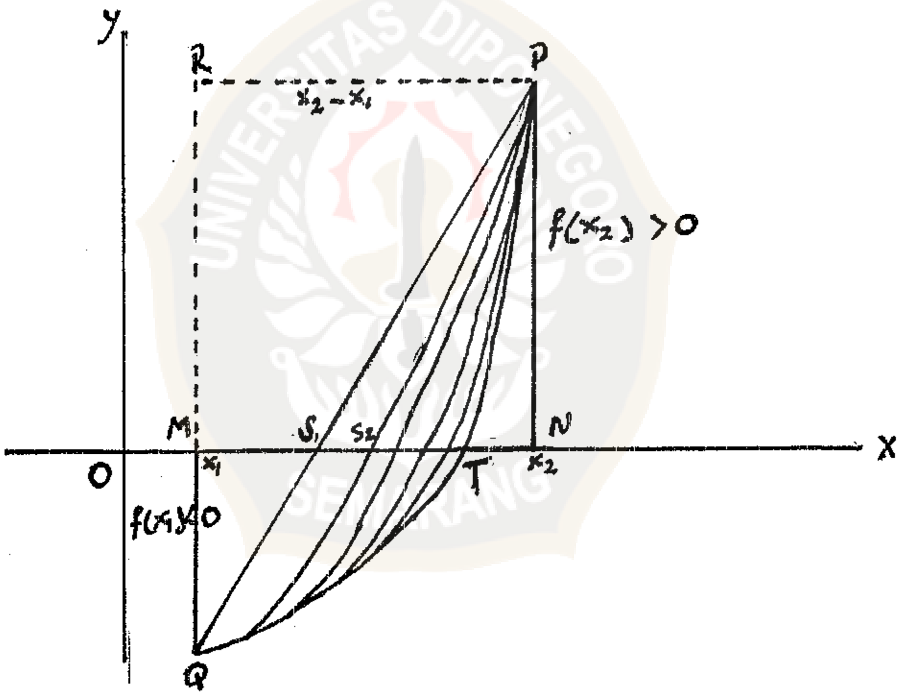
2.4. Metode Regula Falsi

Salah satu cara untuk menentukan akar riel suatu fungsi adalah dengan metode regula falsi .

Metode tersebut adalah sebagai berikut :

Kurva f(x) kontinyu dari $x=x_1$ sampai $x=x_2$.

Jika $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ berlawanan tanda , maka paling sedikit f(x) mempunyai satu titik potong diantara x_1 dan x_2 dengan sumbu x , sehingga paling sedikit ada satu akar .



Perhatikan gambar

Harga yang dicari adalah absis titik T .

Titik T didekati titik $s_1, s_2, \ldots,$.

Mencari pendekatan I (absis s_1)

$OM = x_1 \qquad RP = x_2 - x_1$

$ON = x_2 \qquad MQ = |f(x_1)|$

$MS = h \qquad NP = |f(x_2)|$

Segi tiga QMS sebangun dengan segi tiga QRP

$$\frac{MS}{MQ} = \frac{RP}{RQ} \quad \text{maka} \quad \frac{h}{|f(x_1)|} = \frac{x_2 - x_1}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$$h = \frac{(x_2-x_1)|f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$x = x_1 + h$

$$x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$, merupakan rumus -

pendekatan I . Pendekatan ke-II dengan cara yang - sama

Misal harga pendekatan I

$$x' = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

pendekatan ke-II

$$x'' = x' + \frac{(x_2 - x')\ |f(x')|}{|f(x')| + |f(x_2)|}$$

pendekatan ke-III

$$x''' = x'' + \frac{(x_2 - x'')\ |f(x'')|}{|f(x'')| + |f(x_2)|}$$

dan seterusnya sampai didapatkan harga yang sama $x^{n} = x^{n-1}$

contoh soal

Tentukan akar riel positif dari $f(x) = x\,e^{x} - 2$, dengan metode Regula Falsi .

Penyelesainnya

misal : $x_1 = 0,8 \dashrightarrow f(0,8) = -0,2196$

$x_2 = 0,9 \dashrightarrow f(0,9) = 0,2136$

Rumus pendekatan

$$x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$$x' = 0,8 + \frac{(0,9-0,8)\ (0,2196)}{(0,2196) + (0,2136)} = 0,851$$

$f(0,851) = -0,00697$

$f(0,9) = 0,2136$

$$x'' = 0,851 + \frac{(0,9-0,851)\ (0,00697)}{0,00697 + 0,2136}$$

$$= 0,8526$$

$f(0,8526) = -0,00002396$

$f(0,9) = 0,2136$

$$x''' = 0,8526 + \frac{(0,9-0,8526)(0,00002396)}{0,2136 + 0,00002396}$$

$$= 0,8526$$

karena $x''' = x'' = 0,8526$

maka $x = 0,8526$.