BAB II

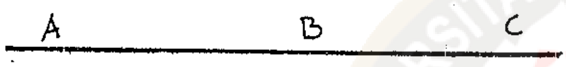
TEORI PENDUKUNG

1. KONGRUENSI

Teori mengenai bidang yang kongruen akan dibicarakan pada bab ini, namun hanya terbatas pada bidang segitiga.

Definisi 2.1.1 : Beberapa buah titik dikatakan Kolinier apabila titik-titik tersebut terletak pada satu garis lurus.

Contoh :

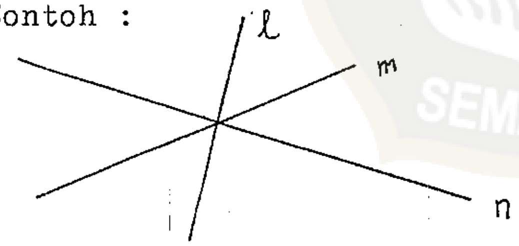


A,B,C merupakan Kolinier

Gb.2.1.a

Definisi 2.1.2 : Beberapa buah garis dikatakan Konkuren apabila garis-garis tersebut melalui satu titik.

Contoh :

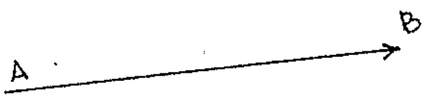


l,m,n merupakan Konkuren

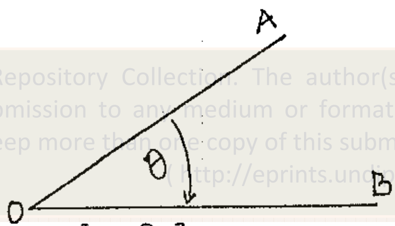
Gb.2.1.b

Definisi 2.1.3 : Untuk menentukan **arah** AB yang positip atau negatip maka digunakan notasi $\overline{AB}$ (selanjutnya disebut dengan Ruas garis AB). Sedang untuk arah sudut digunakan notasi $\angle \overline{ABC}$.

Contoh :

(i). 

$\overline{AB} = -\overline{BA}$

(ii). 

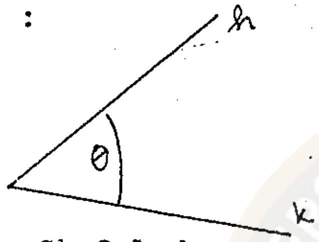
$\angle\overline{AOB} = -\angle\overline{BOA}$

gb. 2.1.c

Axioma 2.1.1.: Diberikan ruas garis $\overline{AB}$ dan suatu titik A' pada garis a, maka pada garis a tersebut terdapatlah dengan tunggal ruas garis dengan titik pangkal A' dan titik ujung B' sehingga $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Definisi 2.1.4 : (h,k) adalah notasi suatu sudut yang dibentuk oleh garis hdan k.

Contoh :

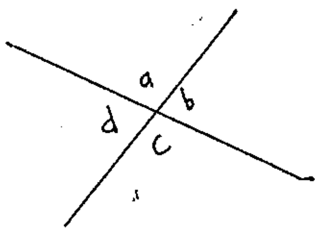


$(h,k) = \theta$

Gb,2.1.d

Axioma 2.1.2 : Diberikan suatu sudut (h,k), bukan suatu sudut lurus (180°), dan diberikan suatu ruas garis h' pada garis a, maka terdapatlah dengan tunggal ruas garis k' sehingga (h,k) = (h',k').

Definisi 2.1.5 : Jika dua garis lurus berpotongan maka berlaku (lihat gb.2.1.e) :



*) $\angle a + \angle b = \angle b + \angle c = \angle c + \angle d = \angle d + \angle a = 180^\circ$

*) $\angle a = \angle c$ dan $\angle b = \angle d$

Gb.2.1.e

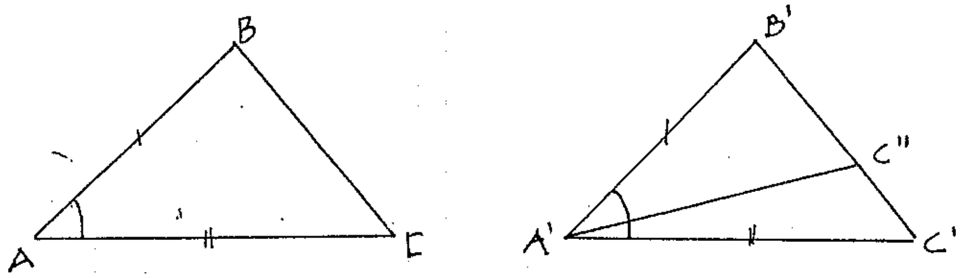
Axioma 2.1.3 : Diketahui dua segitiga ABC dan A'B'C'. Jika $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ dan $\angle A = \angle A'$ maka $\angle B = \angle B'$.

Definisi 2.1.6 : $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ($\triangle ABC$ kongruen dengan $\triangle A'B'C'$) jika $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ dan $\angle C=\angle C'$.

Teorema 2.1.1 : Jika diketahui dua segitiga ABC dan A'B'C' dengan $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ dan $\angle A=\angle A'$ maka

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Bukti :



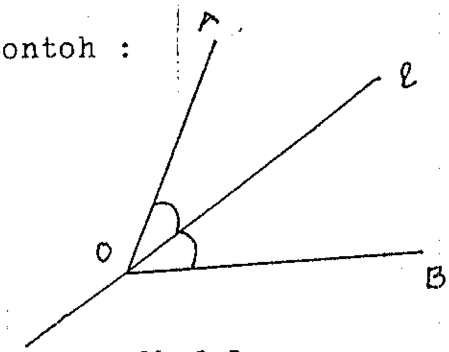
Gb.2.1.f

Dari axioma 2.1.3 maka didapat $\angle B = \angle B'$, demikian juga $\angle C = \angle C'$. Sekarang tinggal membuktikan bahwa $\overline{BC} \doteq \overline{B'C'}$.

Ambil titik C" pada $\overline{B'C'}$ sehingga $\overline{BC} = \overline{B'C''}$ dengan menggunakan axioma 2.1.1 . Diandaikan $\overline{BC} \neq \overline{B'C'}$ maka $C'' \neq C'$. Dari ΔABC dan $\Delta A'B'C''$ dengan axioma 2.1.3 maka didapat $\angle BAC = \angle B'A'C''$, padahal diketahui $\angle BAC = \angle A = \angle A' \doteq \angle B'A'C'$. Hal ini bertentangan dengan axioma 2.1.2. Jadi haruslah $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

Definisi 2.1.7 : Garis Bagi dari suatu sudut adalah garis yang melalui titik sudutnya dan membagi sudut tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.

Contoh :

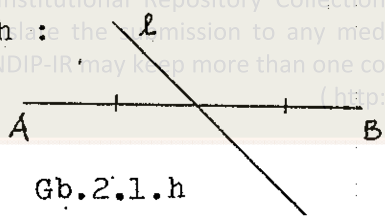


l merupakan Garis bagi dari $\angle AOB$

Gb,2.1.g

Definisi 2.1.8 : Garis bagi dari suatu garis lurus adalah garis yang membagi garis tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang.

Contoh :

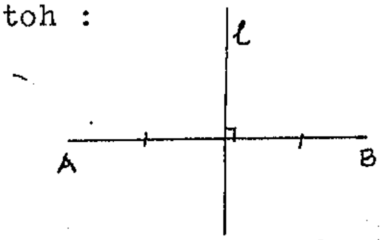


l merupakan garis bagi dari AB

Gb.2.1.h

Definisi 2.1.9 : Garis bagi tegak lurus dari suatu garis adalah garis bagi yang tegak lurus terhadap garis yang dibagi tersebut.

Contoh :

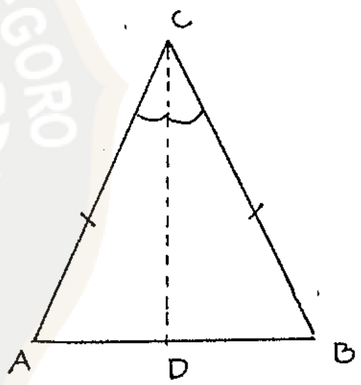


Gb.2.1.i

l merupakan Garis Bagi Tegak Lurus dari AB

Teorema 2.1.2 : Sudut-sudut yang menghadap sisi-sisi yang sama panjang dari suatu segitiga samakaki adalah sama besar.

Bukti :



Gb.2.1.j

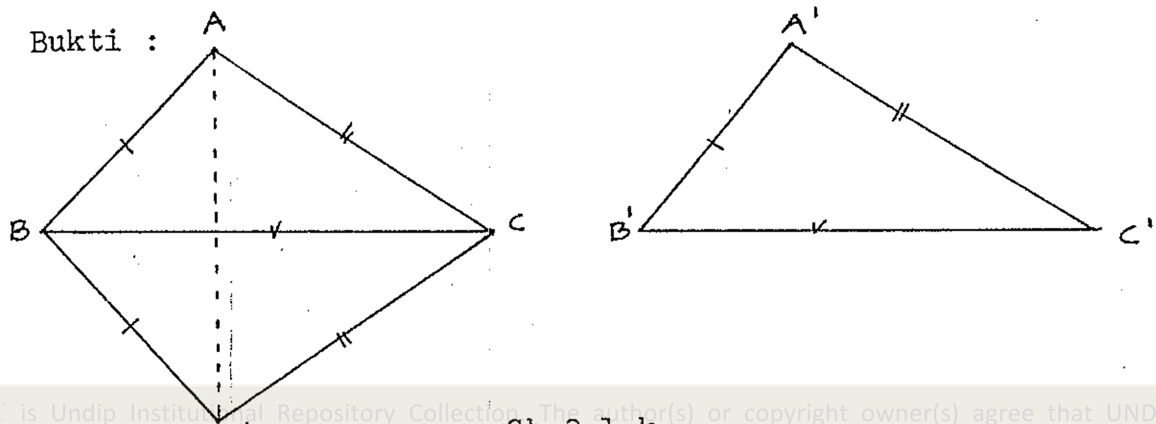
Diketahui $\triangle ABC$ dengan $AC = BC$

Akan dibuktikan bahwa $\angle A = \angle B$.

Dibuat garis bagi dari $\angle ACB$ sehingga garis bagi tersebut akan memotong AB di titik D. Maka dari teorema 2.1.1 didapat $\triangle ADC \cong \triangle BDC$. Akibatnya $\angle A = \angle B$.

Teorema 2.1.3 : Dua segitiga ABC dan A'B'C' dengan $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ dan $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ maka $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bukti :



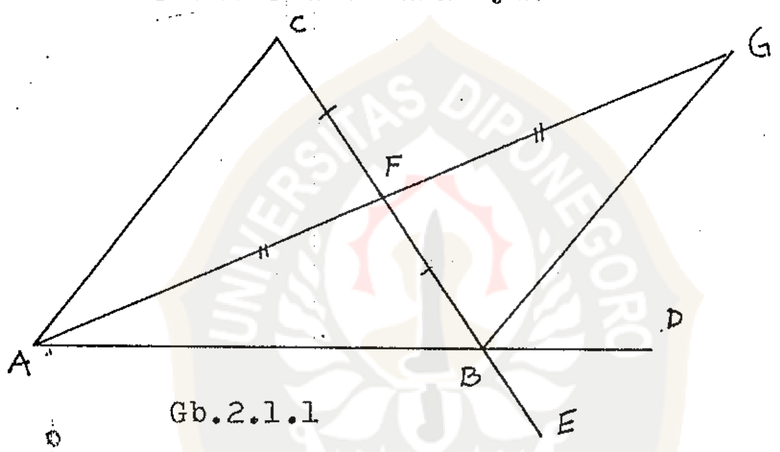
Gb.2.1.k

Diketahui $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B'C'$.

Dibuat $\triangle A''BC \cong \triangle A'B'C'$ maka $\triangle ABA''$ merupakan segitiga samakaki. De ngan teorema 2.1.2 berlaku $\angle BAA'' = \angle BA''A$ dan $\angle CAA'' = \angle CA''A$ dari $\triangle ACA''$. Akibatnya $\angle BAC = \angle BAA'' + \angle A''AC = \angle BA''A + \angle AA''C = \angle BA''C$. Dari teorema 2.1.1 maka terbukti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Teorema 2.1.4 : Dalam suatu segitiga sembarang, jika salah satu sisinya diperpanjang maka sudut luar yang terbentuk akan lebih besar dari pada sudut-sudut dalamnya.

Bukti :



Gb.2.1.1

Dalam $\triangle ABC$ diambil sisi AB diperpanjang sampai dengan titik D, maka akan dibuktikan :

(i) $\angle ACB < \angle CBD$

(ii) $\angle CAB < \angle CBD$

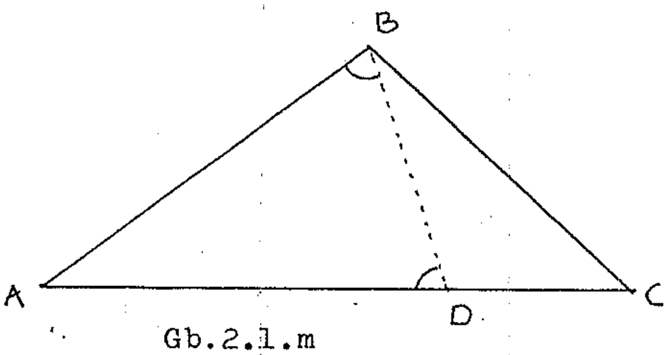
Ambil titik F yang merupakan titik tengah dari BC. Dibuat AG sehingga melalui F dan AF = FG. Karena $\triangle AFC \cong \triangle BFG$ (menurut teorema 2.1.1) maka $\angle ACF = \angle GBF$. Padahal $\angle GBF < \angle CBD$ maka $\angle ACB = \angle ACF = \angle GBF < \angle CBD$.

Jadi (i) terbukti.

Misal CB diperpanjang sampai dengan titik E . Dengan cara yang sama pada (i) didapat $\angle CAB < \angle ABE$. Menurut definisi 2.1.5 $\angle ABE = \angle CBD$. Jadi terbukti (ii).

Teorema 2.1.5 : Dalam segitiga sembarang , sisi yang lebih panjang terletak dihadapan sudut yang lebih besar.

Bukti :

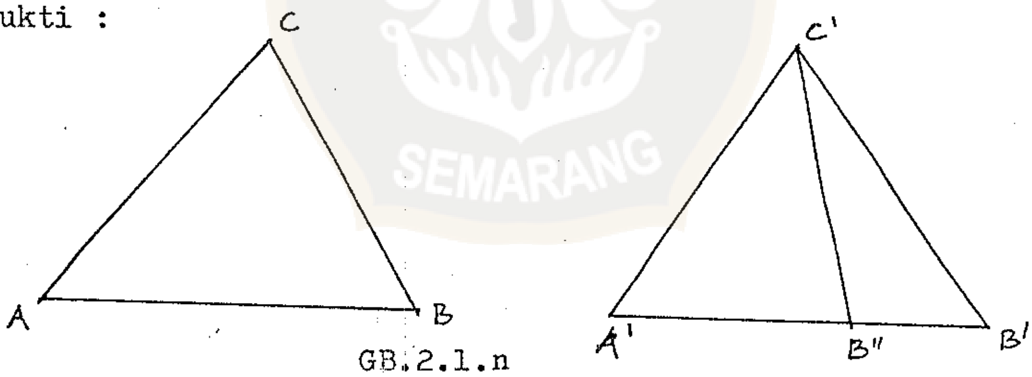


Gb.2.1.m

Misal sisi $AC > AB$ maka harus dibuktikan $\angle ABC > \angle ACB$.
Ditentukan suatu titik D pada sisi AC sedemikian sehingga $AD = AB$ dan $\triangle ABD$ merupan segitiga samakaki.
Dari teorema 2.1.2 didapat $\angle ABD = \angle ADB$ dan dari teorema 2.1.4 akan didapat $\angle ADB > \angle DCB$. Akibatnya $\angle ACB = \angle DCB < \angle ABC$. Jadi teorema terbukti.

Teorema 2.1.6 : Jika diketahui dua segitiga ABC dan A'B'C' dengan $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\angle A = \angle A'$ dan $\angle B = \angle B'$ maka $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bukti :

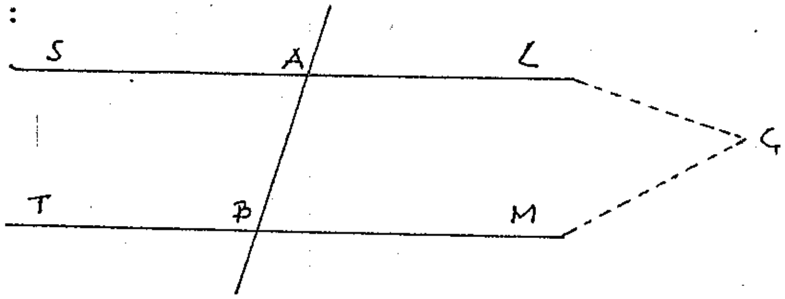


GB.2.1.n

Ditentukan titik B" pada A'B' sehingga $AB = A'B''$.
Diandaikan $B' \neq B''$. Pada $\triangle ABC$ dan $\triangle A'B''C'$ berlaku teorema 2.1.3 sehingga $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C'$. Ini berarti $\angle CBA = \angle C'B''A'$. Padahal diketahui $\angle CBA = \angle B = \angle B' = \angle C'B'A'$.
Hal ini bertentangan dengan teorema 2.1.4 dimana $\angle C'B''A'$ merupakan sudut luar dari $\triangle C'B'B''$. Jadi haruslah $B' = B''$.
Maka menurut teorema 2.1.1 terbukti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Teorema 2.1.7 : Suatu garis lurus memotong dua buah garis lurus yang lain sehingga membentuk sudut-sudut dalam pada pihak yang sama berjumlah 180°, maka kedua garis lurusyang dipotong tersebut tidak akan berpotongan.

Bukti :



Gb.2.1.o

Misal $\angle BAL + \angle ABM = 180^{\circ}$ ....(1)

Dari definisi 2.1.5 maka berlaku $\angle TBA + \angle AMB = 180^{\circ}$ .. ... (2). Dari (1) dan (2) maka didapatkan $\angle BAL = \angle ABT$. Akan dibuktikan bahwa garis SL dan TM tidak berpotongan. Diandaikan kedua garis tersebut berpotongan pada suatu titik C. Maka akan terbentuk segitiga ABC dengan $\angle ABT$ merupakan sudut luar nya. Karena $\angle ABT = \angle CAB$ maka hal ini bertentangan dengan teorema 2.1.4. Jadi pengandaian salah yang benar kedua garis tersebut tidak berpotongan .

2. TRANSFORMASI

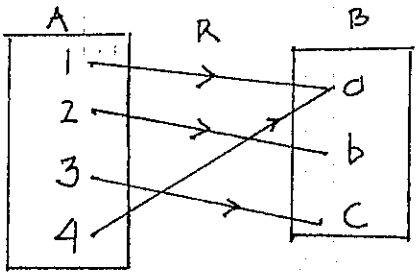
Transformasi yang digunakan dalam ilmu ukur non Euclides yakni transformasi yang berlaku pada bidang datar. Sehingga merupakan transformasi yang memetakan himpunan beranggota titik-titik.

Definisi 2.2.1 : Jika A dan B himpunan sembarang. Pemetaan (mapping) dari A ke B adalah suatu aturan yang pada setiap anggota dari A menentukan dengan tunggal satu anggota dalam B.

Contoh :

a).

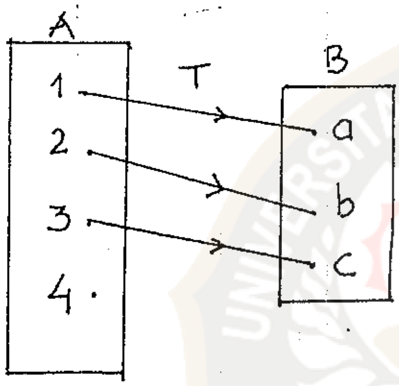
a).



R merupakan suatu Pemeta an

Gb.2.2.a

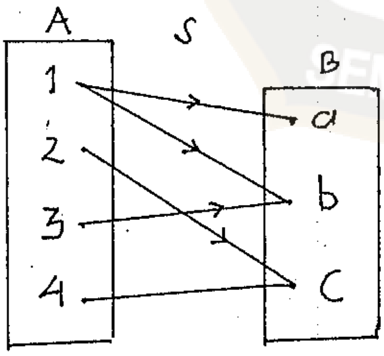
b).



T bukan merupakan Pemeta an sebab ada anggota A yang tidak mempunyai kawan dalam B

Gb.2.2.b

c).



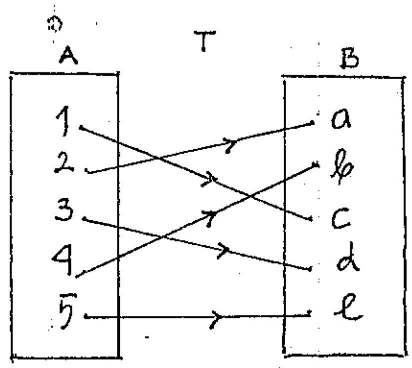
S bukan merupakan Pemeta an sebab ada anggota A yang mempunyai kawan lebih dari satu dalam B

Gb.2.2.c

Definisi 2.2.2 : Transformasi (pemetaan one to one) adalah suatu Pemetaan dari A ke B sedemikian sehingga anggota A mempunyai kawan dengan tunggal anggota B dan sebaliknya.

Contoh :

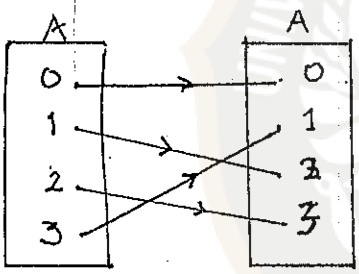
T merupakan Transformasi



Gb.2.2.d

Definisi 2.2.3 : Jika A dipetakan ke himpunan A sendiri maka disebut pemetaan ke dirinya sendiri. Suatu anggota yang dipetakan ke dirinya sendiri maka anggota tersebut disebut Invariant (double element).

Contoh :

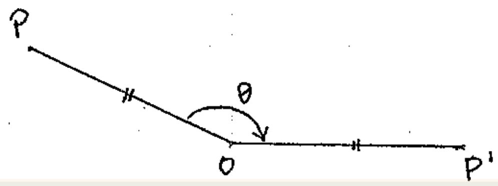


"0" merupakan invariant
"1" bukan merupakan invariant.

Gb.2.2.e

Definisi 2.2.4 : Transformasi yang memetakan suatu titik P pada bidang ke P' sedemikian sehingga OP = OP' dan $\angle \overline{POP'} = \theta$,dimana O merupakan suatu titik pada bidang tersebut dinamakan Rotasi R(O,θ). O disebut pusat rotasi dan θ sudut rotasi.

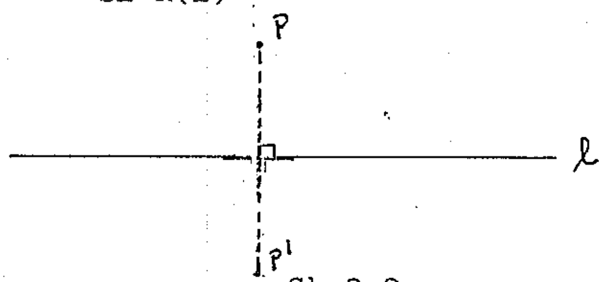
Contoh :



Gb.2.2.f

Definisi 2.2.5 : Garis l terletak pada bidang . Transformasi yang memetakan titik P ke P' sedemikian sehingga l merupakan garis ba gi tegak lurus dari PP' dinamakan Refleksi R(l)

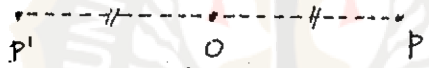
Contoh :



Gb.2.2.g

Definisi 2.2.6 : Ditentukan titik sembarang O pada bidang. Transformasi yang memetakan titik P ke P' sedemikian sehingga titik O merupakan titik tengah dari PP' disebut Refleksi R(O).

Contoh :

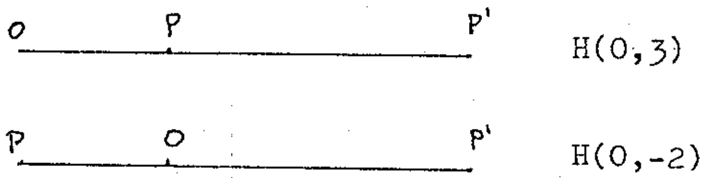


Gb.2.2.h

Definisi 2.2.7 : Ditentukan titik O pada bidang dan k suatu bilangan riil bukan nol. Transformasi yang memetakan P ke P' sehingga $\overline{OP'} = k\,\overline{OP}$ dinamakan Homothety H(O,k).

O disebut pusat Homothety dan k disebut rasio Homothety. Homothety juga disebut Dilatasi atau Expansi.

Contoh :



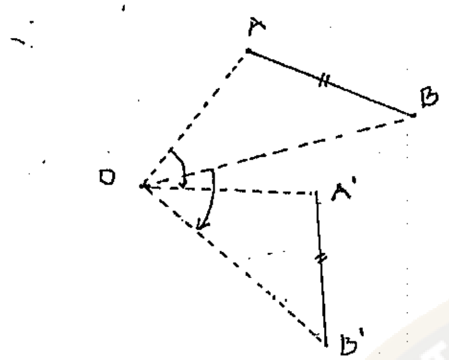
GB.2.2.i

Definisi 2.2.8 : Isometry ialah suatu transformasi yang memetakan titik-titik A,B ke A',B' sedemikian sehingga A'B' = AB.

Isometry disebut juga Transformasi Kongru

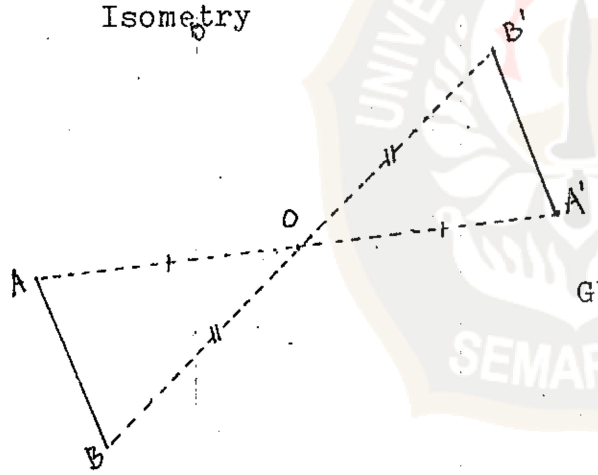
Contoh :

R(O,θ) merupakan transformasi Isometry



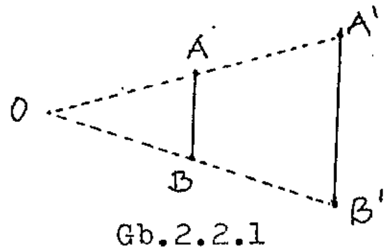
Gb.2.2.j

R(O) merupakan transformasi Isometry



Gb.2.2.k

H(O,2) bukan merupakan transformasi Isometry



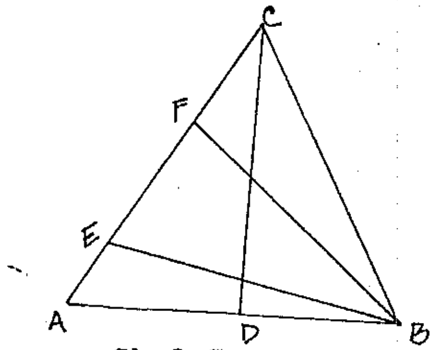
Gb.2.2.1

3. TEORI PEMBAGIAN

Yang dimaksud teori pembagian disini adalah tori yang membicarakan tentang pembagian suatu bidang datar menjadi beberapa bidang yang lebih kecil.

Definisi 2.3.1 : Garis Cevian adalah suatu garis yang melalui titik sudut segitiga tetapi tidak berhimpit dengan sisi segitiga tersebut.

Contoh :



Gb.2.3.a

BF , BE ,CD merupakan garis Cevian dari $\triangle$ ABC

Definisi 2.3.2 : Jika diketahui

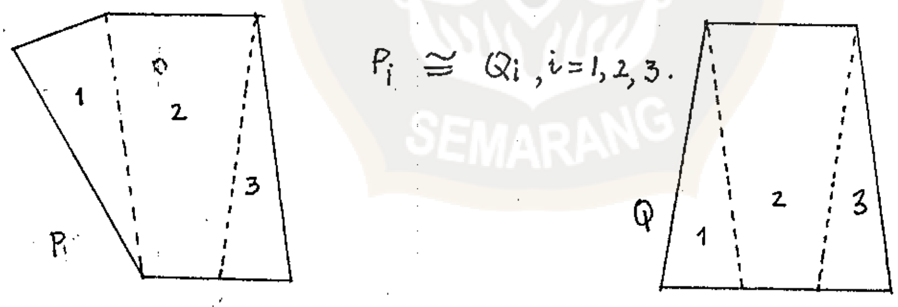
$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n \;,$$
$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n \;,$$

dan

$$P_i \cong Q_i \;,\; i = 1,2,\ldots,n$$

maka Pdan Q disebut dengan Kongruen secara Addisi dan diberi notasi $P \cong Q\ (+)$.

Contoh :



Gb. 2.3.b

Teorema 2.3.1 : Jika $P \cong R\ (+)$ dan $R \cong Q\ (+)$ maka $P \cong Q\ (+)$

Bukti :

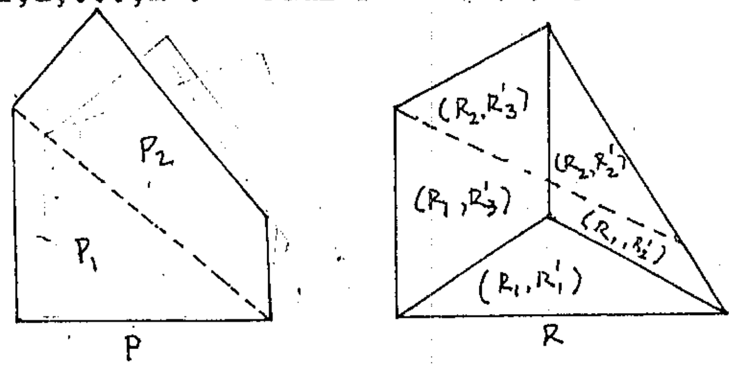
Diketahui $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$, $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$, $P_i \cong R_i$, $i = 1,2,..n$

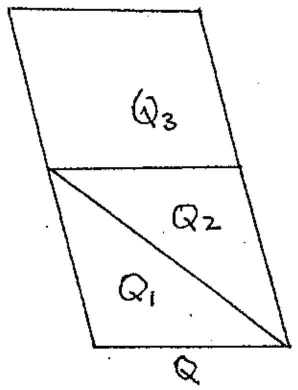
$Q = \sum_{j=1}^{m} Q_j$, $R = \sum_{j=1}^{m} R'_j$, $Q_j \cong R'_j$, $j = 1,2,..m$

$(R_i R'_j)$ adalah daerah yang termasuk dalam R_i dan R_j.

Oleh karena itu kita dapat membagi P_i menjadi potongan yang kongruen dengan $(R_i R'_j)$, $j = 1,2,\ldots,m$ dan demikian juga Q_j dapat dibagi menjadi potongan-potongan yang kongruen dengan $(R_i R'_j)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Akibatnya P dan Q dapat dibagi menjadi bagian yang kongruen $(R_i R'_j)$, $i = 1,2,\ldots,n$; $j =$

1,2,...,m . Jadi P $\cong$ Q (+) .

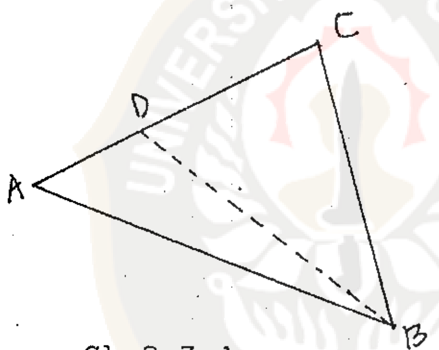




Gb.2.3.c

Definisi 2.3.3 : Membagi suatu segitiga menjadi dua segitiga dengan menggambarkan suatu garis Cevian disebut Oprasi Cevian.

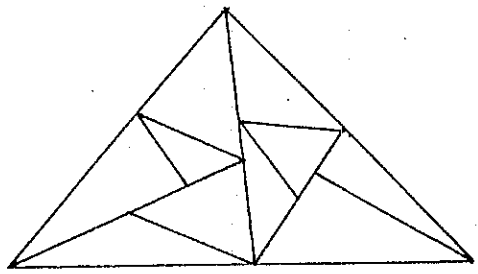
Contoh :



Gb.2.3.d

Definisi 2.3.4 : Suatu pembagian segitiga menjadi beberapa segitiga dengan operasi Cevian yang berhingga disebut Pembagian Cevian pada segitiga tersebut.

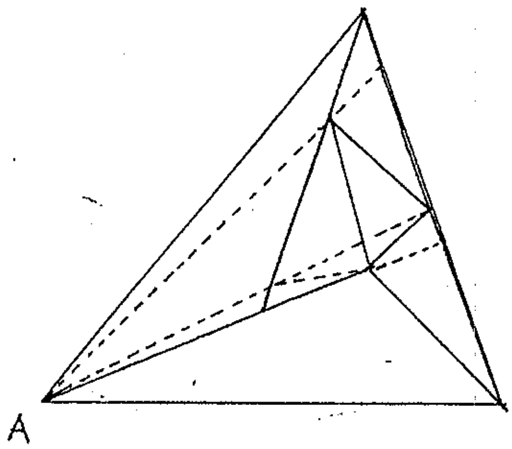
Contoh :



Gb.2.3.e

Teorema 2.3.2 : Pembagian sembarang terhadap suatu segitiga menjadi beberapa segitiga, dengan pemotongan tambahan dapat dirubah menjadi suatu pembagian Cevian.

Bukti :



Gb.2.3.f

Diberikan suatu segitiga T yang dibagi menjadi be-berapa segitiga T_k. Dari salah satu titik sudutnya misal A dibuat garis-garis Cevian dari T yang melalui semua titik sudut dari se gitiga-segitiga yang ter-bentuk tadi (T_k). Garis-ga ris ini akan membagi segitiga T menjadi T_t . T_t ini oleh pembagian yang pertama akan terbagi menjadi segitiga atau segiempat. Jika pada masing-masing segiempat yang terjadi digambarkan sebuah diagonal maka segitiga T_t terbagi lagi menjadi segitiga yang lebih kecil T_{tk}. Maka dari definisi 2.3.4 T_t dibagi menjadi T_{tk} oleh pembagian Cevian. Aki-batnya T terbagi menjadi T_{tk} oleh pembagian Cevian.