BAB III

RUANG TOPOLOGI

3.1. Interval Buka & Tutup.

Definisi 3.

Himpunan A_1 disebut interval terbuka, jika himpunannya terdiri dari titik-titik pada garis riil dan tidak mengandung kedua titik ujung.

Dinyatakan oleh $A_1 = (a_1, b_1)$

Definisi 4.

Himpunan A_2 disebut interval tertutup, jika himpunannya terdiri dartititik-titik pada garis riil dan mengandung kedua titik ujung.

Dinyatakan oleh $A_2 = [a_2, b_2]$.

Definisi 5.

Himpunan A_3 disebut interval buka-tutup, jika tidak mengandung titik ujung kiri dan A_4 disebut interval tutup-buka ,jika tidak mengandung titik ujung kanan.

Dinyatakan oleh : $A_3 = (a_3, b_3]$.

$A_4 = [a_4, b_4)$

Contoh 3.

Diketahui : $A = \{ x \mid -2 \leq x < 5 \}$.

$B = \{ x \mid 3 < x < 5 \}$.

$C = \{ x \mid -4 \leq x \leq -1 \}$.

$D = \{ x \mid 2 < x \leq 10 \}$.

Ditanya : bentuk interval dari A, B, C dan D.

Penyelesaian :

Titik ujung dari A adalah -2 dan 5.

Sedangkan $-2 \in A$ dan $5 \notin A$,

berarti A merupakan interval tutup-buka = $[-2, 5)$.

Titik ujung dari B adalah 3 dan 5, $3 \notin B$ & $5 \notin B$.

Maka B merupakan interval terbuka = (3,5).

Titik ujung dari C adalah -4 dan -1, $-4 \in C$ & $-1 \in C$.

Maka C merupakan interval tertutup = [-4,-1] .

Titik ujung dari D adalah 2 dan 10, $2 \notin D$ & $10 \in D$.

Maka D merupakan interval buka-tutup = (2, 10] .

3.2. Topologi

Definisi 6.

$\mathcal{T}$ subset dari himpunan kuasa 2^X dikatakan topologi pada X jika memenuhi aksioma berikut :

o_1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$.

o_2. Jika $G_i \in \mathcal{T}$, i = 1,2,3, ...,n maka $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

o_3. Jika $\{G_i\}_{i \in I}$, dengan I = {1,2,3,....} maka $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

Himpunan kuasa 2^X = himpunan dari semua himpunan bagian dari X.

Selanjutnya jika $\mathcal{T}$ suatu topologi pada X, maka $(X, \mathcal{T})$ disebut ruang topologi dan elemen-elemen $\mathcal{T}$ disebut himpunan terbuka . Penulisan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ sering hanya ditulis ruang topologi X.

Definisi 7.

a). Topologi indiskrit adalah topologi terkecil, terdiri dari himpunan kosong $\emptyset$ dan X itu sendiri .

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$.

b). Topologi diskrit pada X adalah topologi yang memuat semua himpunan bagian dari X.

$\mathcal{T}_2 = 2^X$.

riil R adalah topologi yang elemennya terdiri dari himpunan kosong $\emptyset$ atau union interval terbuka.

$\mathcal{T}_3 = \{G \subset R \mid G = \emptyset$ atau $G =$ union interval terbuka$\}$.

Contoh 4.

Diketahui :

$X = \{1,2,3\}$.

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

Ditanya, apakah $\mathcal{T}$ merupakan topologi pada X.

Penyelesaian :

o_1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

o_2. $\forall\, G_i \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_i G_i \in \mathcal{T}$.

o_3. $\forall\, G_i \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_i G_i \in \mathcal{T}$.

Karena o_1, o_2, o_3 dipenuhi, maka $\mathcal{T}$ merupakan topologi pada X.

3.3. Sistim Sekitar Dan Sistim Fundamental.

Definisi 8.

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi dan $V \subset X$.

V dikatakan sebagai persekitaran dari x, jika terdapat suatu himpunan $U \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in U \subseteq V$.

Notasi "$\mathcal{N}(x)$" sebagai himpunan dari semua persekitaran dari x dalam ruang $(X, \mathcal{T})$ atau disebut : sistim sekitar.

Contoh 5.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\},$
$\{1,4\}, \{2,3\}\}$.

Ditanya, persekitaran dan sistim sekitar dari 1.

Penyelesaian :

Misal V persekitaran dari 1, maka :

$V = \{1,4\}$, sebab ada $U = \{1,4\} \subseteq V$, atau

$V = \{1,3,4\}$, atau $V = X$.

Jadi $\mathcal{N}(1) = \{ \{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, X \}$.

Teorema 4.

a). Jika $V \in \mathcal{N}(x)$ maka $x \in V$.

b). Jika $V_1 \in \mathcal{N}(x)$ dan $V_1 \subset V_2$ maka $V_2 \in \mathcal{N}(x)$.

c). Jika V_1 dan V_2 dalam $\mathcal{N}(x)$, maka $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(x)$.

d). Jika $V \in \mathcal{N}(x)$ maka terdapat $W \in \mathcal{N}(x)$ sedemikian sehingga $y \in W \Longrightarrow V \in \mathcal{N}(y)$.

Bukti :

a). Jika $V \in \mathcal{N}(x)$ maka V merupakan persekitaran dari x. Menurut definisi 8., maka terdapat $U \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in U \subseteq V$.

Jadi, jika $V \in \mathcal{N}(x)$ maka $x \in V$.

b). Menurut a). di atas, $V_1 \in \mathcal{N}(x) \Longrightarrow x \in V_1$.

Karena $V_1 \subset V_2$,maka terdapat $U_1 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in U_1 \subseteq V_1 \subset V_2$.

Jadi $V_2 \in \mathcal{N}(x)$.

c). $V_1 \in \mathcal{N}(x)$ maka terdapat $U_1 \in \mathcal{T}$ sedemikian hingga

$x \in U_1 \subseteq V_1$.........1)

$V_2 \in \mathcal{N}(x)$ maka terdapat $U_2 \in \mathcal{T}$ sedemikian hingga

$x \in U_2 \subseteq V_2$.........2)

Dari 1). dan 2). maka $U_1 \cap U_2 \in V_1 \cap V_2$.

$U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Menurut definisi 8, maka $V_1 \cap V_2$ adalah persekitaran dari x

Jadi $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(x)$.

d). Diberikan $V \in \mathcal{N}(x)$, maka terdapat $U \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in U \subseteq V$.

Jika diambil $W = U$ maka untuk $y \in W$, $y \in U \subseteq V$.

Dari sini $V \in \mathcal{N}(y)$.

Contoh 6

Diketahui :

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$

$X = \{1, 2, 3, 4\}$.

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\},$

$\{1,4\}, \{2,4\}\}$.

$\mathcal{N}(1) = \{\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, X\}$.

Tunjukkan :

a). $V \in \mathcal{N}(1) \Longrightarrow 1 \in V$.

b). $V_1 \in \mathcal{N}(1)$ dan $V_1 \subset V_2 \Longrightarrow V_2 \in \mathcal{N}(1)$.

c). V_1 dan V_2 dalam $\mathcal{N}(1) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(1)$

d). $V \in \mathcal{N}(1)$, maka ada $W \in \mathcal{N}(1)$ hingga $y \in W \Longrightarrow V \in \mathcal{N}(y)$.

Penyelesaian :

a). Diambil $V = \{1,4\} \Longrightarrow 1 \in V$.

b). Diambil $V_1 = \{1,4\}$ dan $V_2 = \{1,2,4\}$,maka :

$V_1 \subset V_2 \in \mathcal{N}(1)$.

c). $V_1 = \{1,4\}$ dan $V_2 = \{1,2,4\}$,maka :

$V_1 \cap V_2 = \{1,4\} \cap \{1,2,4\}$.

$= \{1,4\} \in \mathcal{N}(1)$.

d). Diambil $V = \{1,4\}$.

Maka ada $W = \{1,2,4\}$ atau $W = \{1,3,4\}$,dengan

$y = 4 \in W$.

Sedangkan $\mathcal{N}(4) = \{X, \{4\}, \{1,4\}, \{3,4\},$

$\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$.

Sebab $U = \{4\} \in \mathcal{T}$,menurut definisi 8. maka semua subset X yang memuat $\{4\}$ merupakan persekitaran dari 4.

$V = \{1,4\} \Longrightarrow V \in \mathcal{N}(4)$.

Definisi 9.

Suatu himpunan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}(t)$ disebut sistim fundamental sedemikian sehingga $W \subseteq V$.

Contoh 7.

Diketahui :

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$

$X = \{2, 3, 4\}$

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$.

$\mathcal{F} = \{\{2\}, \{2,4\}\}$.

$W = \{2\}$.

Ditanya, apakah $\mathcal{F}$ merupakan sistim fundamental dari 2.

Penyelesaian :

$\mathcal{N}(2) = \{X, \{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$.

Untuk: $V = X \Longrightarrow W = \{2\} \subset X$.

$V = \{2\} \Longrightarrow W = \{2\} \subseteq \{2\}$.

$V = \{2,3\} \Longrightarrow W = \{2\} \subset \{2,3\}$.

$V = \{2,4\} \Longrightarrow W = \{2\} \subset \{2,4\}$.

Karena $W \subseteq V$, $\forall\ V \in \mathcal{N}(2)$, maka $\mathcal{F}$ disebut sistim fundamental.

3.4. Himpunan Terbuka dan Tertutup.

Sebelum dibahas tentang himpunan terbuka dan tertutup, perlu diketahui dahulu apa yang disebut titik limit dan titik interior.

Definisi 10.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $A \subset X$.

Maka :

a). Titik p disebut titik limit dari A, jika setiap persekitaran V dari p, maka $V \cap A - \{p\} \neq \emptyset$.

$\cap$ = irisan (interseksi).

b). Titik p disebut titik interior dari A, jika terdapat persekitaran U dari p sedemikian sehingga

Contoh 8.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan :

$X = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Ditanya, apakah titik 1 dan 3 dalam X merupakan titik limit

$A = \{1\}$.

Penyelesaian :

Himpunan semua persekitaran dari $1 = \mathcal{N}(1)$.

$\mathcal{N}(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, X\}$, $\forall V \in \mathcal{N}(1)$.

$A = \{1\} \Longrightarrow \{1\} \cap \{1\} - \{1\} = \emptyset$.

Karena ada $V = \{1\} \in \mathcal{N}(1)$ sedemikian sehingga $A \cap V - \{1\} = \emptyset$ berarti 1 bukan titik limit dari $A = \{1\}$.

Himpunan semua persekitaran dari $3 = \mathcal{N}(3) = \{X\}$, sebab tidak ada elemen dari $\mathcal{T}$ yang memuat 3 selain X.

$A = \{1\} \Longrightarrow \{1\} \cap X - \{3\} = \{1\} \neq \emptyset$.

Karena memenuhi definisi 10. a). maka 3 titik limit dari $A = \{1\}$.

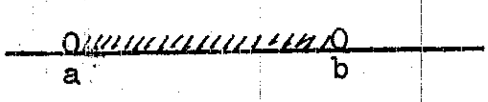
Contoh 9.

Diketahui interval terbuka $A = (a, b)$ dan $0 < \varepsilon \leq b-a$.

Ditanya, apakah tiap titik $p \in A$, merupakan titik interior dari A

Penyelesaian :

Diperlihatkan dengan gambar (garis riil) di bawah.



$\forall \varepsilon \Longrightarrow$ terdapat $(a+\varepsilon, b+\varepsilon)$ sebagai persekitaran dari setiap titik $p \in A$ dan $(a+\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq A$.

Jadi $\forall p \in A$, p titik interior .

Definisi 11.

Himpunan A disebut himpunan tertutup, jika semua ti-

Contoh 9.

Diketahui :

Interval terbuka $A = (-2, 3)$,

$B = \{-2\}$ dan $C = \{3\}$.

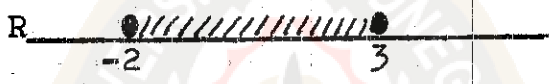
Ditanya, bentuk himpunan dari $A \cup B \cup C$.

Penyelesaian :

Misal $A \cup B \cup C = X$.

Maka $X = (-2, 3) \cup \{-2\} \cup \{3\}$.

$= [-2, 3]$ yaitu interval tertutup.



Semua titik yang diarsir merupakan titik limit,sebab misal p titik yang diarsir dan P persekitaran dari p maka $P \cap X - \{p\} \neq \emptyset$, $\forall p \in X$.

Untuk titik ujung -2 dan 3,

setiap persekitarannya selalu berpotongan dengan X , jadi tidak kosong.

Karena semua titik limit berada dalam X; menurut definisi 11., maka X merupakan himpunan tertutup.

Definisi 12.

Himpunan A disebut himpunan terbuka, jika setiap titiknya adalah titik interior.

Contoh 10.

Diketahui interval terbuka $A = (1, 5)$.

Ditanya (1, 5) merupakan himpunan terbuka atau bukan.

Jawab :

Ambil $0 < \varepsilon \leq 4$

$\forall \varepsilon \Longrightarrow$ terdapat interval terbuka $(1 + \varepsilon, 5 + \varepsilon) \subseteq A$.

Jadi $\forall p \in A$, terdapat persekitaran $(1 + \varepsilon, 5 + \varepsilon) \subseteq A$,

yang menunjukkan bahwa setiap p adalah titik interior.

Sedangkan p = 1 dan p = 5 bukan titik interior, sebab tidak mempunyai persekitaran yang berada dalam A dan $p = 1$, $p = 5$ bukan anggota A.

Karena setiap titik dalam A titik interior, menurut definisi 12. maka A disebut himpunan terbuka.

Definisi 13.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$.

$A \subset X$ disebut himpunan tertutup, jika komplemen A terbuka ; yaitu A^c

Contoh 11.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan :

$X = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$.

Ditanya, keluarga himpunan tertutup dari X.

Penyelesaian :

Misal A himpunan tertutup.

Menurut definisi 13. $A^c \in \mathcal{T}$.

Berarti $A \in \mathcal{T}^c$ dan $\mathcal{T}^c$ merupakan himpunan keluarga tertutup dari X.

Jadi $\mathcal{T}^c = \{X, \emptyset, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$.

Teorema 5.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$.

a). Irisan sebarang himpunan tertutup adalah tertutup.

b). Gabungan berhingga himpunan tertutup juga tertutup.

Bukti :

a). Misal $F_i \subset X$ tertutup, $\forall i$ I, $I = \{1,2,3,\ldots\}$.

Menurut definisi 13. ${F_i}^c$ terbuka.

Sedangkan $\bigcup_{i \in I} {F_i}^c = (\bigcap_{i \in I} F_i)^c$.

Karena ${F_i}^c$ terbuka ($\in \mathcal{T}$), menurut definisi topologi maka $\bigcup_{i \in I} {F_i}^c$ terbuka.

$\bigcap_{i \in I} F_i$ tertutup.

b). Jika F_i tertutup, $i \in I$, $I = \{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$

menurut definisi topologi, maka :

$\bigcap_{i \in I}^{n} F_i^{\,c} = (\bigcup_{i \in I}^{n} F_i)^c$ terbuka, komplemennya :

$\bigcup_{i \in I}^{n} F_i$ tertutup.

Jadi terbukti bahwa $\bigcap_{i \in I} F_i$ dan $\bigcup_{i \in I}^{n} F_i$ tertutup.

Tetapi gabungan tak berhingga himpunan-himpunan tertutup belum tentu tertutup.

Dibuktikan dengan contoh :

Jika diketahui $F_n = \{x \mid 1/_{n+1} \leq x \leq 1 - 1/_{n+1}\}$,

$n = 1,2,3, \ldots\ldots\ldots$, maka :

$\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/_{n+1}, 1 - 1/_{n+1}] = \{x \mid 0 < x < 1\}$.

$= (0, 1)$.

Jadi hasilnya tidak tertutup.

3.5. Penutup Suatu Himpunan.

Definisi 14.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $A \subset X$.

Himpunan penutup (closure) dari A adalah irisan dari semua himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A.

Diberi notasi $\bar{A}$.

Jadi $\bar{A} = \bigcap \{F \subset X \mid A \subset F$ dan F tertutup$\}$.

Contoh 12.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan :

$X = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$.

Ditanya : penutup $A = \{2\}$ dan $B = \{1,3\}$.

Penyelesaian :

Jadi $\mathcal{T}^c = \{X, \emptyset, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$.

Penutup himpunan $A = \{2\}$ adalah :

$\bar{A} = X \cap \{2,3\} \cap \{1,2\} \cap \{2\}$.

$= \{2\}$.

Penutup himpunan $B = \{1,3\}$ adalah :

$\bar{B} = X$,sebab tidak ada himpunan tertutup yang memuat $\{1,3\}$ selain X .

3.6. Basis Dan Subbasis

Definisi 15.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathcal{T})$.

Suatu koleksi $\mathcal{B} \in \mathcal{T}$ disebut basis untuk topologi $\mathcal{T}$, jika setiap anggota $\mathcal{T}$ merupakan gabungan dari sebarang anggota-anggota $\mathcal{B}$.

Jadi jika $\mathcal{B}$ basis untuk topologi $\mathcal{T}$ dan $G \in \mathcal{T}$, maka $\forall x \in G$ terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subset G$.

Contoh 13.

Diketahui :

$(X, \mathcal{T})$ ruang topologi

$X = \{2,3,4\}$.

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,4\}, \{2,3\}\}$.

$\mathcal{B}_1 = \{\{2\}, \{3\}, \{2,4\}\}$

$\mathcal{B}_2 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

Ditanya, apakah $\mathcal{B}_1$ dan $\mathcal{B}_2$ basis untuk topologi $\mathcal{T}$.

Penyelesaian :

Untuk $\mathcal{B}_1 \Longrightarrow \{2\} \cup \{3\} = \{2,3\}$

$\{2\} \cup \{2,4\} = \{2,4\}$

$\{3\} \cup \{2,4\} = \{2,3,4\} = X$

Menurut definisi 15. maka $\mathcal{B}_1$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$.

Untuk $\mathcal{B}_2 \implies \{3\} \cup \{4\} = \{3,4\} \notin \mathcal{T}$

Jadi $\mathcal{B}_2$ bukan basis untuk topologi $\mathcal{T}$.

Definisi 16.

Koleksi $\mathcal{S} \in \mathcal{T}$ disebut subbasis untuk topologi $\mathcal{T}$, jika setiap anggota $\mathcal{T}$ adalah gabungan dari irisan berhingga dari anggota $\mathcal{S}$

Dengan kata lain $\mathcal{S}$ merupakan subbasis untuk topologi $\mathcal{T}$, jika koleksi irisan berhingga dari anggota-anggota $\mathcal{S}$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$.

Contoh 14.

Diketahui :

$X = \{2, 3, 4\}$

Subbasis $\mathcal{S} = \{\{2\}, \{3\}, \{2,4\}\}$.

Ditanya : topologi $\mathcal{T}$ untuk X yang dibentuk oleh $\mathcal{S}$.

Penyelesaian :

Irisan berhingga anggota-anggota $\mathcal{S}$ = basis $\mathcal{B}$.

Jadi : $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset \in \mathcal{B}$

$\{3\} \cap \{2,4\} = \emptyset \in \mathcal{B}$

$\{2\} \cap \{2,4\} = \{2\} \in \mathcal{B}$

$\{3\} \cap \{3\} = \{3\} \in \mathcal{B}$

$\{2,4\} \cap \{2,4\} = \{2,4\} \in \mathcal{B}$

$\bigcap \{A_i \in \mathcal{S} \mid i \in \emptyset\} = X \in \mathcal{B}$, sebab :

jika $i \in I = \emptyset$; $x \in \bigcap_i A_i$ bhb $\forall i \in I = \emptyset \implies x \in A_i$

Kalimat sebelah kanan tanda "$\implies$" pasti bernilai benar $\forall x \in X$, karena antiseden (sebelah kiri tanda "$\implies$") adalah salah ($I = \emptyset$ tidak punya anggota).

Maka $\mathcal{B} = \{\{2\}, \{3\}, \{2,4\}, X\}$.

Menurut definisi 15. diperoleh :

$\mathcal{T} = \{\{2\}, \{3\}, \{2,4\}, \emptyset, X, \{2,3\}\}$ yang merupakan topologi yang dibentuk oleh subbasis $\mathcal{S}$.

3.7. Pemetaan & Proyeksi

Definisi 17.

Misalkan f memetakan A ke B.

f disebut pemetaan bijektif, jika elemen-elemen yang berbeda dalam B ditetapkan dengan elemen-elemen yang berbeda dalam A (pemetaannya satu-satu dan habis).

Definisi 18.

Misalkan f memetakan A ke B.

f disebut pemetaan onto atau surjektif, jika setiap anggota B muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen A (pemetaan habis).

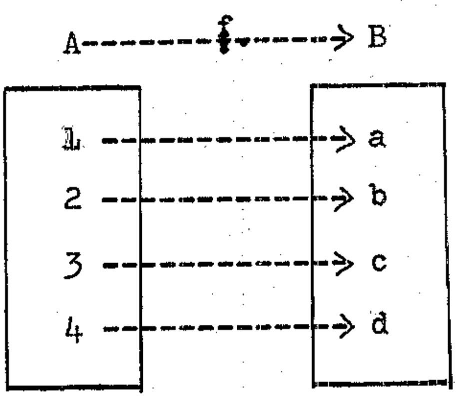
Definisi 19.

Misalkan f memetakan A ke B.

f disebut pemetaan injektif (into), jika setiap elemen A memetakan dengan tunggal elemen di B, dan B tidak perlu habis (pemetaan satu-satu).

Contoh 15.

f didefinisikan oleh pemetaan di bawah .



Pemetaan f adalah surjektif (onto), sebab elemen B habis dipetakan oleh A.

Pemetaan f adalah injektif, sebab pemetaannya satu-satu.

Pemetaan f adalah bijektif, sebab pemetaannya satu-

Definisi 20.

Diberikan $X = \prod_{i \in I} \{X_i\}$ merupakan pergandaan kartesius dari himpunan-himpunan X_i, $i \in I = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Jadi $X = \{\langle x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_n\rangle \mid \forall\, x_i \in X_i\}$.

Pemetaan $pr_j : \prod_{i \in I} \{X_i\} \dashrightarrow X_j$, $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

disebut proyeksi ke j, $j \in I$

Definisi 21.

Diberikan ruang topologi X_1, X_2, X_3, ..., X_n

Proyeksi invers (pr_k^{-1}) didefinisikan oleh :

$pr_k^{-1}\ (U) = \prod_{i \in I} A_i$,

$U \subset X_k$ terbuka, yaitu anggota dari topologinya.

$k \in I$, $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$ dan $i \in I$.

$A_i = U$ jika $i = k$

$A_i = X_i$ jika $i \neq k$

Contoh 16.

Diketahui :

$X = \prod_{i \in I} \{X_i\} = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 5,6,7,8\rangle, \langle a,b,c,d\rangle\}$.

Ditanya : pr_3 (X).

Penyelesaian :

$X_3 = \{3, 7, c\}$

Jadi $pr_3(X) = \{3, 7, c\}$

Contoh 17.

Diketahui :

Ruang topologi $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dan $(X_2, \mathcal{T}_2)$

$X_1 = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X_1, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$X_2 = \{6,7\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X_2, \{6\}\}$.

Penyelesaian :

$U = \{2\} \Longrightarrow A_i = X_2 = \{6,7\}$

Jadi $pr_1^{-1}(\{2\}) = \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle\}$.

$U = \{3\} \Longrightarrow A_i = X_2$.

Jadi $pr_1^{-1}(\{3\}) = \{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}$

$U = \{6\} \Longrightarrow A_i = X_1$

Jadi $pr_2^{-1}(\{6\}) = \{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}$

3.8. Topologi Pergandaan

Definisi 22.

Diberikan $\mathcal{S} = \{ pr_k^{-1}(U_k) \mid U_k \in \mathcal{T}_k, \forall k \in I \}$,

dengan pr_k^{-1} = proyeksi invers ke k

U_k = anggota dari topologi $\mathcal{T}_k$

$I = \{1,2,3, \ldots\ldots, n\}$

maka $\mathcal{S}$ merupakan subbasis untuk topologi pergandaan

Contoh 18.

Diketahui :

Dua ruang topologi $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dan $(X_2, \mathcal{T}_2)$.

$X_1 = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X_1, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$X_2 = \{6,7\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X_2, \{6\}\}$

Ditanya : topologi pergandaan $\mathcal{T}$.

Penyelesaian :

$\forall U_k$, U himpunan terbuka, $i \in I = \{1,2\}$, maka :

$pr_1^{-1}(\emptyset) = pr_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$pr_1^{-1}(X_1) = pr_2^{-1}(X_2) = X_1 \times X_2 = X$

$pr_1^{-1}(\{2\}) = \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle\}$

$pr_1^{-1}(\{3\}) = \{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}$

$pr_1^{-1}(\{2,3\}) = \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}$.

$pr_2^{-1}(\{6\}) = \{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}$

Maka $\mathcal{S} = \{X_1 \times X_2, \emptyset, \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle\}, \{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\},$

$\{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\},$

$\{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}.$

$\mathcal{B} = \{X_1 \times X_2, \emptyset, \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle\}, \{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\},$

$\{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\},$

$\{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}, \{\langle 2,6\rangle\}, \{\langle 3,6\rangle\}\}.$

Topologi yang dibentuk oleh   adalah :

$\mathcal{T} = \{X_1 \times X_2, \emptyset, \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle\}, \{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\},$

$\{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}, \{\langle 2,6\rangle\}, \{\langle 3,6\rangle\},$

$\{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}, \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,6\rangle\},$

$\{\langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 2,6\rangle\},$

$\{\langle 1,6\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}\}.$

Diberi simbul $\times$, ruang pergandaannya ($X_1 \times X_2$, $\times$).

3.9. Kontinuitas

Definisi 23.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $(Y, \mathcal{T})$ serta pemetaan $f : X \dashrightarrow Y$.

f dikatakan kontinu pada $c \in X$, jika setiap persekitaran V dari f(c) terdapat persekitaran U dari c sedemikian sehingga $f(x) \in V$ bilamana $x \in U$.

Teorema 6.

Pemetaan $f : X \dashrightarrow Y$ kontinu pada $c \in X$ bhb

$V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Jika V dalam himpunan persekitaran f(c), maka bayangan invers dari V berada dalam himpunan persekitaran c.

Bukti : ($\Longrightarrow$)

... kontinu pada c dan $V \in \mathcal{N}(f(c))$

maka menurut definisi 23., terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $f(x) \in V$ jika $x \in U$.

Berarti $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Padahal $U \in \mathcal{N}_X(c)$.

Maka menurut teorema 4.b)., $U \subseteq f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.... 1).

($\Longleftarrow$)

Jika $\forall V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Ambil $U \subseteq f^{-1}(V)$, maka :

$f(x) \in V$ jika $x \in U$,

Menurut definisi 23. maka f kontinu pada c .... 2).

Dari 1). dan 2). terbukti bahwa :

$f : X \longrightarrow Y$ kontinu pada $c \in X$ bhb

$V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Contoh 19.

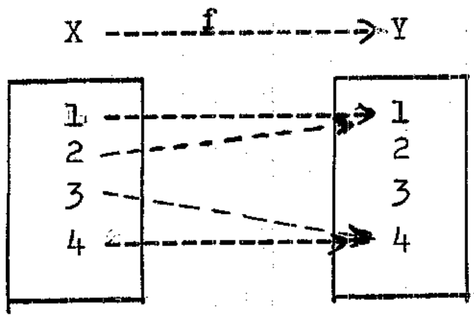
Diketahui :

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dan $(Y, \mathcal{T})$

$X = Y = \{1,2,3,4\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3,4\}\}$.

Pemetaan $f : X \longrightarrow Y$ didefinisikan menurut :



Ditanya, apakah f kontinu pada $4 \in X$.

Penyelesaian :

$\mathcal{N}(f(4)) = \{Y, \{2,3,4\}\}$

Diambil V persekitaran dari $f(4) \Longrightarrow \forall V \in \mathcal{N}(f(4))$.

$\mathcal{N}(4) = \{X, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\},$

$\{1,3,4\}, \{1,2,4\}\}$.

Untuk $V = \{2,3,4\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{4\} \in \mathcal{N}(4)$.

Jadi $\forall V \in \mathcal{N}(f(4))$, maka $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(4)$.

Menurut teorema 6., berarti f kontinu pada 4.

Definisi 24.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$ dan pemetaan $f : X \longrightarrow Y$.

Maka f kontinu pada X jika f kontinu pada tiap titik $c \in X$.

Contoh 20.

Diketahui :

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$

$X = \{1,2\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$

$Y = \{a,b,c,d\}$

$\mathcal{J} = \{\emptyset, Y, \{b\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,b,d\}\}$

Pemetaan f didefinisikan oleh :

$f(1) = b$ dan $f(2) = c$.

Ditanya, apakah f kontinu pada X.

Penyelesaian :

Untuk titik $c = 1$

$\mathcal{N}_Y(f(1)) = \{Y, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$

$\mathcal{N}_X(1) = \{X, \{1\}\}$

$V \in \mathcal{N}_Y(f(1))$, maka :

$V = Y \Longrightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{a,b\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{1\} \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{b,c\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{b,d\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{1\} \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{a,b,c\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{a,b,d\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{1\} \in \mathcal{N}_X(1)$

$V = \{b\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{1\} \in \mathcal{N}_X(1)$

Jadi f kontinu pada c = 1 .

Untuk titik c = 2

$\mathcal{N}_Y(f(2)) = \{ Y \}$,sebab elemen dari $\mathfrak{J}$ yang memuat $f(2) = c$ adalah Y.

$\mathcal{N}_X(2) = \{X, \{2\}\}$

$V = Y \Longrightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_X(2)$.

Jadi f kontinu pada c = 2.

Karena f kontinu pada tiap titik $c \in X$, menurut definisi 24. maka f kontinu pada X.

Teorema 7.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$ & $(Y, \mathfrak{J})$.

Suatu fungsi $f : X \dashrightarrow Y$ dikatakan kontinu bhb bayangan invers dari setiap himpunan terbuka adalah terbuka .

Bukti : ($\Longrightarrow$)

Misalkan ; $f : X \dashrightarrow Y$ kontinu

V subset terbuka dari Y.

Akan ditunjukkan bahwa $f^{-1}(V)$ merupakan himpunan terbuka.

Jika $p \in f^{-1}(V)$ maka $f(p) \in V$.

Karena f kontinu, maka ada himpunan G_p yang memuat p sedemikian sehingga $f(G_p) \subseteq V$

$\forall p \in f^{-1}(V) \Longrightarrow \exists G_p = f^{-1}(f(G_p)) \subseteq f^{-1}(V)$.

Jadi $f^{-1}(V) = \bigcup \{G_p \mid p \in f^{-1}(V)\}$.

Berarti $f^{-1}(V)$ adalah gabungan dari himpunan-himpunan terbuka .

Terbukti $f^{-1}(V)$ terbuka .... 1)

($\Longleftarrow$)

Jika diketahui bayangan invers dari setiap himpunan terbuka adalah terbuka, maka akan ditunjukkan bahwa

Misal V himpunan terbuka yang memuat $f(p)$.

Maka $f^{-1}(V)$ adalah himpunan terbuka yang memuat p

sedemikian sehingga $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$.

Jadi f kontinu di titik p , $\forall\, p \in X$

Contoh 21.

Diketahui :

Dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$.

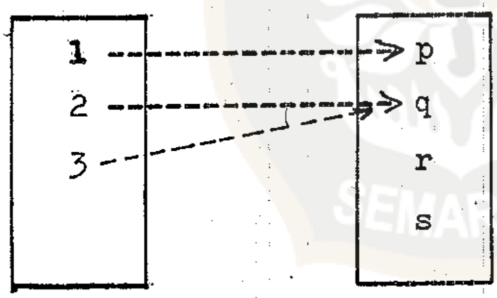
$X = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$

$Y = \{p,q,r,s\}$

$\mathcal{J} = \{Y, \emptyset, \{q\}, \{q,s\}, \{p,q\}, \{p,q,r\}, \{p,q,s\}\}$.

Pemetaan $f : X \dashrightarrow Y$ yang didefinisikan menurut :



Tunjukkan bahwa f kontinu.

Penyelesaian :

$f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\{q\}) = \{2,3\} \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\{q,s\}) = \{2,3\} \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\{p,q\}) = \{1,2\} \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\{p,q,r\}) = X \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(p,q,s) = X \in \mathcal{T}$

Karena bayangan invers dari setiap himpunan terbuka adalah terbuka, menurut teorema 7., f kontinu pada X.

Teorema 8.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$.

bayangan invers dari setiap himpunan tertutup adalah tertutup.

Bukti : ($\Longrightarrow$)

Pemetaan $f : X \longrightarrow Y$ diketahui kontinu.

Misal $F \subset Y$ tertutup,

maka F^c terbuka dan $f^{-1}(F^c)$ terbuka di X.

Karena $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(f))^c$ terbuka,

maka $f^{-1}(F)$ tertutup.

($\Longleftarrow$)

Misal $F \subset Y$ tertutup,

maka $f^{-1}(F)$ tertutup pada X.

Jika diambil G himpunan terbuka pada Y,

maka G^c tertutup pada Y.

Jadi $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ tertutup pada X.

Komplemennya $f^{-1}(G)$ terbuka.

Diperoleh G terbuka $\Longrightarrow f^{-1}(G)$ terbuka

Menurut teorema 7. terbukti bahwa f kontinu.

Contoh 22.

Diketahui dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{Y})$

$X = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

$Y = \{p,q,r,s\}$

$\mathcal{Y} = \{\emptyset, Y, \{q\}, \{q,s\}, \{p,q\}, \{p,q,r\}, \{p,q,s\}\}$

Tunjukkan bahwa f kontinu pada X, jika $f(1) = p$ dan $f(2) = f(3) = q$.

Penyelesaian :

Keluarga himpunan bagian tertutup dari $(X, \mathcal{T})$ adalah:

$\mathcal{T}^c = \{\emptyset, X, \{1,3\}, \{3\}, \{1\}\}$

Keluarga himpunan bagian tertutup dari $(Y, \mathcal{Y})$ adalah :

$\mathcal{Y}^c = \{Y, \emptyset, \{p,r,s\}, \{p,r\}, \{r,s\}, \{s\}, \{r\}\}$

$f^{-1}(\{p,r,s\}) = \{1\} \in \mathcal{T}^c$

$f^{-1}(\{p,r\}) = \{1\} \in \mathfrak{T}^c$
$f^{-1}(r,s) = \emptyset \in \mathfrak{T}^c$
$f^{-1}(s) = \emptyset \in \mathfrak{T}^c$
$f^{-1}(r) = \emptyset \in \mathfrak{T}^c$
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{T}^c$
$f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{T}^c$

Karena bayangan invers dari setiap himpunan tertutup adalah tertutup yaitu $\in \mathfrak{T}^c$, menurut teorema 8., maka f kontinu pada X.

3.9. Homeomorfism

Definisi 25.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$ & $(Y, \mathfrak{J})$.

Pemetaan f dari $(X, \mathfrak{T})$ ke $(Y, \mathfrak{J})$ disebut homeomorfism jika dipenuhi :

a). bijektif

b). f dan f^{-1} kontinu.

f^{-1}= bayangan invers dari f.

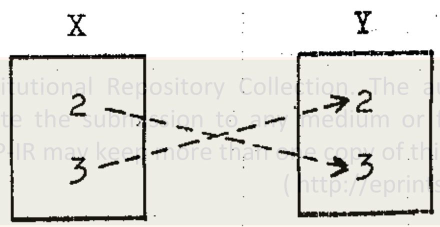
Dan ruang $(X, \mathfrak{T})$ & $(Y, \mathfrak{J})$ disebut homeomorfik.

Contoh 23.

Diketahui dua ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$ & $(Y, \mathfrak{J})$, dengan :

$X = Y = \{2,3\}$
$\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{2\}\}$
$\mathfrak{J} = \{\emptyset, Y, \{3\}\}$

Pemetaan f didefinisikan sebagai :



Tunjukkan bahwa f homeomorfism.

Akan ditunjukkan bahwa f bijektif, f dan f^{-1} kontinu.

f adalah pemetaan yang habis dan pemetaannya tunggal.

Menurut definisi 17. maka f bijektif ....1)

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(\{3\}) = \{2\} \in \mathcal{T}$

Jadi bayangan invers dari elemen-elemen $\mathcal{J}$(terbuka) anggota $\mathcal{T}$(terbuka) .

Menurut teorema 7. maka f kontinu pada X .... 2)

$f(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{J}$

$f(X) = Y \in \mathcal{J}$

$f(\{2\}) = \{3\} \in \mathcal{J}$

Maka f juga kontinu pada Y ....3)

Dari 1) , 2), 3), maka f adalah homeomorfism.

Definisi 26.

Diberikan dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$.

Pemetaan surjektif f dari $(X, \mathcal{T})$ ke $(Y, \mathcal{J})$ disebut homeomorfism, jika dipenuhi :

a). f bijektif

b). f memelihara operasi closure, yaitu

$\forall M \subseteq X \Longrightarrow f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

$f(\bar{M})$ = pemetaan f pada penutup M.

$\overline{f(M)}$ = penutup pada f(M).

Contoh 24.

Diketahui :

Dua ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ & $(Y, \mathcal{J})$

$X = Y = \{1,2\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$

$\mathcal{J} = \{\emptyset, Y, \{2\}\}$

Pemetaan f didefinisikan oleh :

f(1) = 2 dan f(2) = 1.

Tunjukkan bahwa $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$, $\forall M \subseteq X$.

Penyelesaian :

Keluarga subset dari $X = 2^X$

$= \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$

Himpunan tertutup pada X adalah :

$\mathcal{T}^c = \{X, \emptyset, \{2\}\}$.

HImpunan tertutup pada Y adalah :

$\mathcal{Y}^c = \{Y, \emptyset, \{1\}\}$.

Untuk $M = \emptyset$, maka $\bar{M} = \emptyset$, sebab $\emptyset$ tertutup.

$f(M) = \emptyset$; $f(\bar{M}) = \emptyset$.

$\overline{f(M)} = \emptyset$, sebab $\emptyset$ tertutup .

Jadi $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

Untuk $M = X$, maka $\bar{M} = X$

$f(M) = Y$; $f(\bar{M}) = Y$

$\overline{f(M)} = Y$,

Jadi $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$

Untuk $M = \{1\}$,maka $\bar{M} = X$, sebab tidak ada himpunan tertutup yang memuat M kecuali X.

$f(M) = \{2\}$; $f(\bar{M}) = Y$.

$\overline{f(M)} = Y$.

Jadi $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

Untuk $M = \{2\}$,maka $\bar{M} = \{2\} \cap X = \{2\}$

$f(M) = \{1\}$; $f(\bar{M}) = \{1\}$

$\overline{f(M)} = \{1\} \cap Y = \{1\}$

Jadi $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

Jadi $\forall M \subseteq X$, maka $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

3.10. Aksioma Pemisah

Definisi 27.

Ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$ dikatakan ruang T_0 bhb $\forall x,y \in X$ dan $x \neq y$, maka terdapat persekitaran terbuka U dari x yang tidak memuat y, atau terdapat persekitaran terbuka V dari y yang tidak memuat x.

Contoh 25.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$, dengan :

$X = \{a, b. c\}$

$\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$.

Tunjukkan bahwa $(X, \mathfrak{T})$ ruang T_0.

Penyelesaian :

Untuk $x = a$ dan $y = b \implies$ ada $U = \{a\}$ yang tidak memuat b.

Untuk $x = b$ dan $y = c \implies$ ada $V = \{a, c\}$ yang tidak memuat b.

Untuk $x = a$ dan $y = c \implies$ ada $U = \{a\}$ yang tidak memuat c.

Menurut definisi 27 maka $(X, \mathfrak{T})$ ruang T_0.

Definisi 28.

Ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$ dikatakan ruang T_1 bhb $\forall x,y \in X$ dan $x \neq y$, maka terdapat persekitaran terbuka U dari x yang tidak memuat y dan terdapat persekitaran terbuka V dari y yang tidak memuat x.

Contoh 26.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$, dengan :

$X = \{1, 2, 3\}$

$\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Tunjukkan bahwa $(X, \mathfrak{T})$ ruang T_1.

Penyelesaian :

Untuk titik 1 ===> $\mathcal{N}(1) = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}, X\}$.

Maka ada titik lain yaitu $2 \notin \{1\} \in \mathcal{N}(1)$ dan ada titik $3 \notin \{1\} \in \mathcal{N}(1)$.

Untuk titik 2 ===> $\mathcal{N}(2) = \{\{2\},\{1,2\},\{2,3\}, X\}$

Maka ada titik lain yaitu $1 \notin \{2\} \in \mathcal{N}(2)$ dan $3 \notin \{2\} \in \mathcal{N}(2)$.

Untuk titik 3 ===> $\mathcal{N}(3) = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$.

Maka ada titik lain yaitu $1 \notin \{3\} \in \mathcal{N}(3)$ dan $2 \notin \{3\} \in \mathcal{N}(3)$.

Jadi menurut definisi 28. ,$(X,\mathfrak{T})$ adalah ruang T_1.

Teorema 9.

Diberikan ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$.

Jika X ruang T_1 ,maka $\forall x \in X$, $\{x\}$ tertutup.

Bukti :

Diambil $x \neq y$, $\forall x \in X$.

Menurut definisi 28. karena X ruang T_1, maka terdapat $V \in \mathcal{N}(y)$, dengan V terbuka dan $x \notin V$.

Jika $U = V^c$, U tertutup sebab V terbuka.

Maka $\{\bar{x}\} \subset U$.

Jadi $\{\bar{x}\} \subseteq \bigcap \{U \mid x \in U, x \neq y\}$.

$= \{x\}$

Jadi $\{\bar{x}\} = \{x\}$, atau $\bar{x} = x$ (tertutup).

Karena x sebarang anggota X ,

maka terbukti $\forall x \in X$ ===> $\{x\}$ tertutup.

Contoh 27.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathfrak{T})$, dengan :

$X = \{1,2,3\}$

$\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

Tunjukkan bahwa X ruang T_1

Penyelesaian :

$\{1\}$ tertutup, sebab komplemennya terbuka ($\{2,3\} \in \mathcal{T}$).

$\{2\}$ tertutup, sebab komplemennya $= \{1,3\} \in \mathcal{T}$ terbuka.

$\{3\}$ tertutup, sebab komplemennya $= \{1,2\} \in \mathcal{T}$ terbuka.

Jadi menurut teorema 9. X merupakan ruang T_1.

Definisi 29.

Ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ dikatakan ruang Hausdorff atau ruang T_2, jika memenuhi :

$\forall x,y \in X$ dan $x \neq y$ maka terdapat persekitaran U dari x dan persekitaran V dari y sedemikian sehingga

$U \cap V = \emptyset$; $\cap$ = irisan.

Contoh 28.

Diketahui ruang topologi $(X, \mathcal{T})$, dengan :

$X = \{1,2,3\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

Tunjukkan bahwa X ruang T_2.

Penyelesaian :

$\mathcal{N}(1) = \{X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

$\mathcal{N}(2) = \{X, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$

$\mathcal{N}(3) = \{X, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Maka terdapat persekitaran-persekitaran :

$\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$

$\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$

$\{1\} \cap \{3\} = \emptyset$

Irisannya adalah $\emptyset$.

Menurut definisi 29 maka X ruang T_2.