BAB II

GROUP

2.1. Operasi Jumlah

Definisi 1.

Diberikan G himpunan yang terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan.

Maka G disebut group abstrak terhadap penjumlahan jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :

1). Tertutup.

Untuk setiap pasangan anggota-anggota a dan b (berlainan atau sama), dapat ditemukan dengan tunggal satu elemen c dalam G sedemikian sehingga $a + b = c$.

$(\forall a,b \in G)\ (\exists!\ c \in G).\ a + b = c.$

2). Assosiatif.

Untuk setiap tripel a,b,c dalam G berlaku :

$(a + b) + c = a + (b + c).$

$(\forall a,b,c \in G).\ (a + b) + c = a + (b + c).$

3). Memiliki elemen netral.

Yaitu ada elemen 0 dalam G sedemikian sehingga untuk setiap a dari G berlaku $0 + a = a + 0 = a$.

$(\exists 0\ \ G)\ (\forall a \in G)\ .\ 0 + a = a + 0 = a.$

4). Ada invers untuk setiap elemen.

Yaitu untuk setiap a dalam G dapat ditemukan $-a$ dalam G juga sedemikian hingga :

$a + (-a) = (-a) + a = 0.$

Selanjutnya apabila masih dipenuhi sifat :

5). Komutatif.

Yaitu untuk setiap pasangan a,b dalam G berlaku :

$a + b = b + a$

$(\forall a,b \in G) \,.\, a + b = b + a.$

Maka gruopnya disebut group komutatif atau group abelian.

Contoh 1.

Diberikan Z himpunan bilangan bulat.

Tunjukkan bahwa Z adalah group terhadap operasi jumlah.

Penyelesaian :

1). Penjumlahan antara bilangan-bilangan bulat adalah bilangan bulat pula.

Terbukti adanya sifat tertutup.

2). Pada bilangan bulat berlaku sifat assosiatif.

3). Ada elemen netral yaitu 0 sedemikian sehingga :

$(\forall a \in Z).\ 0 + a = a + 0 = a \in Z.$

4). Setiap $a \in Z$, maka ada $-a \in Z$ sedemikian hingga :

$a + (-a) = -a + a = 0 \in Z.$

Jadi terbukti adanya invers untuk setiap elemen dari Z.

Dari 1)., 2)., 3). dan 4). maka terbukti bahwa himpunan bilangan bulat adalah group terhadap operasi jumlah.

2.2. Operasi Pergandaan

Definisi 2.

Himpunan G yang terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan disebut group terhadap pergandaan, jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah :

1). Tertutup

Untuk setiap pasangan anggota-anggota a dan b (berlainan atau sama), dapat ditemukan dengan tunggal satu elemen c dalam G sedemikian hingga:

$(a)\ (b) = c.$

$(\forall a,b \in G)\ (\exists!\ c \in G).(a)\ (b) = c.$

2). Assosiatif.

Untuk setiap tripel a,b,c dalam G berlaku :

$((a)(b))\ (c) = (a)\ ((b)(c)).$

$(\forall a,b,c \in G)\ .\ ((a)(b))\ (c) = (a)\ ((b)(c)).$

3). Memiliki elemen netral.

Yaitu ada elemen 1 dalam G sedemikian hingga untuk setiap a dalam G berlaku :

$(a)(1) = (1)(a) = a.$

$(\exists 1 \in G)\ (\forall a \in G)\ .(a)\ (1)=(1)\ (a) = a.$

4). Ada invers untuk setiap elemen.

Yaitu untuk setiap a dalam G ,dapat ditemukan a^{-1} dalam G juga sedemikian hingga :

$(a)\ (a^{-1}) = (a^{-1})\ (a) = 1.$

$(\forall a \in G)\ (\exists a^{-1} \in G).\ (a)\ (a^{-1}) = (a^{-1})\ (a) = 1.$

Selanjutnya apabila masih dipenuhi sifat :

5). Komutatif.

Yaitu untuk setiap pasangan a,b dalam G berlaku:

$(a)\ (b) = (b)\ (a).$

$(\forall a,b \in G)\ .(a)\ (b) = (b)\ (a)$,

maka groupnya disebut group komutatif (abelian).

Contoh 2.

Dibrikan $G = R - \{0\}$ bilangan riil tanpa elemen null.

Tunjukkan bahwa G merupakan group abelian terhadap pergandaan.

Penyelesaian :

1). Pada bilangan riil, operasi pergandaan bersifat tertutup.

2). Pergandaan dari bilangan riil bersifat assosiatif.

3). Ada elemen netral yaitu 1 sedemikian hingga :

$(\forall a \in G).\ (1)\ (a) = (a)\ (1) = a.$

4). Setiap $a \in G$, maka ada invers $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $(a)(a^{-1}) = (a^{-1})(a) = 1 \in G$.

5). Pada bilangan riil berlaku sifat komutatif, yaitu :

$(\forall a,b \in G) \; . \; (a)(b) = (b)(a)$.

Dari 1)., 2)., 3)., 4). dan 5). maka $G = R - \{0\}$ disebut group abelian terhadap pergandaan.

2.3. Sifat-Sifat

Teorema 1.

Hukum kansellasi berlaku yaitu $ax = ay \Longrightarrow x = y$ dan $xa = ya \Longrightarrow x = y$, untuk setiap $x,y,a \in G$.

Bukti :

Diambil sebarang $x,y,a \in G$.

$$ax = ay \Longrightarrow a'\,ax = a'\,ay \;, e = \text{elemen netral.}$$
$$e\,x = e\,y$$
$$x = y$$

$$xa = ya \Longrightarrow x\,a\,a' = y\,a\,a' \;, a' = \text{invers dari } a.$$
$$x\,e = y\,e \;, e = \text{elemen netral.}$$
$$x = y$$

Teorema 2.

Elemen netral e adalah tunggal.

Bukti :

Jika e elemen netral kiri dan f elemen netral kanan, $e \neq f$, maka $\forall a \in G$, $e\,a = a$

$a\,f = a$.

$e\,a = a = a\,f$.

Jadi $e\,a = a\,f$

$$e\,a\,a' = a\,f\,a' \;, a' = \text{invers dari } a$$
$$e\,e = a\,a'$$
$$e = f$$

Terbukti bahwa elemen netral e adalah tunggal.

Teorema 3.

Invers dari suatu elemen adalah tunggal.

Bukti :

Misal a' dan b invers dari a , a' ≠ b.

Ini berarti b a = e

Karena juga a' a = e

Maka b a = a' a.

Dengan hukum kansellasi, didapat b = a'.

Terbukti bahwa invers dari suatu elemen adalah tunggal.