BAB III

DERET FOURIER DAN TRANSFORMASI FOURIER

3.1. FUNGSI PERIODIK

DEFINISI : 3

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan mempunyai periode T atau fungsi periodik dengan periode T jika untuk semua t berlaku :

$$f(t+T) = f(t)$$

T konstanta positif. Harga terkecil $T > 0$ disebut periode terkecil atau tersederhana dari $f(t)$.

CONTOH : 1

a. Fungsi sin nt, cos nt, n bilangan bulat positif mempunyai periode $2\pi/n$.

b. Fungsi tan t mempunyai periode π.

3.2. FUNGSI GANJIL DAN FUNGSI GENAP

DEFINISI : 4

Suatu fungsi $f(t)$ disebut fungsi ganjil jika berlaku :

$$f(-t) = -f(t)$$

CONTOH : 2

a. $\sin t$ b. $\tan 5t$

c. t^5 d. t^7-5t^5+2t

DEFINISI : 5

Suatu fungsi $f(t)$ disebut fungsi genap jika berlaku :

$$f(-t) = f(t)$$

CONTOH : 3

a. $\cos t$

b. $e^t + e^{-t}$

3.3. KONVERGENSI URAIAN FOURIER

Agar suatu fungsi dari $f(t)$ memiliki uraian Fourier maka fungsi f(t) tersebut harus memenuhi konvergensi yaitu:

a. f(t) berharga tunggal dimana-mana, yakni f(t) memenuhi definisi matematis daripada sebuah fungsi.

b. Integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt$ ada (yakni tak berhingga) untuk setiap pemilihan t_o.

c. f(t) mempunyai dikontinuitas yang terbatas banyaknya didalam setiap periode.

d. f(t) mempunyai maksimum dan minimum yang terbatas banyaknya didalam setiap periode.

3.4. DERET FOURIER TRIGONOMETRI

Tinjau sebuah fungsi periodik f(t) sesuai dengan definisi 3 yakni :

$$f(t) = f(t + T)$$

dimana T adalah periode, dan selanjutnya menganggap bahwa fungsi f(t) memenuhi konvergensi sesuai dengan sub bab 3.3. Kita akan meninjau f(t) yang menyatakan sebuah gelombang dan setiap bentuk gelombang ini betul-betul kita hasilkan harus memenuhi syarat-syarat konvergensi.

DEFINISI : 6

Dengan adanya sebuah fungsi periodik f(t), maka f(t) dapat dinyatakan dengan deret tak hingga yakni :

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + a_1\cos\omega_o t + a_2\cos 2\omega_o t + \dots\dots\dots\dots + b_1\sin\omega_o t + b_2\sin 2\omega_o t + \dots\dots\dots\dots$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos n\omega_o t + b_n\sin n\omega_o t).$$

dimana : $\omega_o = 2\pi/T$, dengan a_o, a_n, dan b_n konstanta yang yang tergantung pada n dan f(t).

a). Koefisien a_o dicari dengan jalan mengintegralkan setiap ruas dari deret Fourier pada definisi 5 pada periode

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T \frac{a_o}{2}\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t)\,dt$$

$$= \frac{a_o}{2}\int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_0^T \cos n\omega_o t\,dt + b_n \int_0^T \sin n\omega_o t\,dt \Big)$$

$$= \frac{a_o}{2}\Big|_0^T + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_0^T \cos \frac{2n\pi t}{T}\,dt + b_n \int_0^T \sin \frac{2n\pi t}{T}\,dt \Big)$$

$$= \frac{a_o T - a_o 0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n T}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi t}{T}\Big|_0^T + \frac{b_n - T}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi t}{T}\Big|_0^T \Big).$$

$$= \frac{a_o T}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n T/2n\pi\,(\sin 2n\pi - \sin 0) - b_n T/2n\pi\,(\cos 2n\pi - \cos 0) \Big\}$$

$$= \frac{a_o T}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n T/2n\pi\,(0 - 0) - b_n T/2n\pi(0) \Big\}$$

$$= \frac{a_o T}{2}$$

sehingga didapat :

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

b). Mencari a_n, setiap ruas dari deret fourier menurut definisi 6 digandakan dengan $\cos k\omega_o t$ dan diintegralkan ke - dua ruas pada sebuah periode penuh didapat :

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_o t\,dt = \frac{a_o}{2}\int_0^T \cos k\omega_o t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos k\omega_o t \cos n\omega_o t + b_n \cos k\omega_o t \sin n\omega_o t)\,dt.$$

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_o t \, dt = \frac{a_o}{2} \int_0^T \cos k\omega_o t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^T a_n \cos k\omega_o t \cos n\omega_o t \, dt + b_n \int_0^T \cos k\omega_o t \cdot \sin n\omega_o t \, dt \Big)$$

$$= \frac{a_o}{2} \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \, dt + b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} \, dt \Big)$$

$$= \frac{a_o}{2} \frac{T}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \, dt + b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} \, dt \Big\}$$

$$= \frac{a_o T}{4k\pi} (\sin 2k\pi - \sin 2k0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \underbrace{a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \, dt}_{*)} + \underbrace{b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T} \, dt}_{**)} \Big\}$$

dengan menggunakan :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \Big\{ \cos (A - B) + \cos (A + B) \Big\}$$

maka untuk menyelesaikan *) jika $k \neq n$ didapat :

$$a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \, dt = \frac{a_n}{2} \int_0^T \cos 2\pi (k - n)t \, dt$$

$$\frac{a_n}{2}\int_0^T \cos \frac{2\pi(k+n)t}{T}\, dt =$$

$$\frac{a_n T}{4\pi(k-n)} \sin \frac{2\pi(k-n)t}{T} \Big|_0^T + \frac{a_n T}{4\pi(k+n)} \sin \frac{2\pi(k+n)t}{T}\Big|_0^T$$

$$\frac{a_n T}{4\pi(k-n)} \left\{ \sin 2\pi(k-n) - \sin 2\pi\frac{(k-n)}{T} \right\} +$$

$$\frac{a_n T}{4\pi(k+n)} \left\{ \sin 2\pi(k+n) - \sin \frac{2\pi(k+n)}{T} \right\} =$$

$$\frac{a_n T}{4\pi(k-n)} (0) + \frac{a_n T}{4\pi(k+n)} (0) = 0$$

jika $k = n$

$$a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T}\, dt = a_n \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

$$a_n \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi t}{T}\, dt = \tfrac{1}{2} a_n \int_0^T \left(1 + \cos \frac{4n\pi t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{a_n}{2} \int_0^T dt + \frac{a_n}{2} \int_0^T \cos \frac{4n\pi t}{T}\, dt$$

$$= \frac{a_n t}{2} \Big|_0^T + \frac{a_n T}{8n\pi} \sin \frac{4n\pi t}{T} \Big|_0^T$$

$$= \frac{a_n T}{2} + \frac{a_n T}{8n\pi} (\sin 4n\pi - \sin 0)$$

$$= \frac{a_n T}{2} \quad \text{untuk } n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

untuk menyelesaikan **) menggunakan bantuan :

$$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2} \left\{ \sin (A - B) + \sin (A + B) \right\}$$

jika $k \neq n$ diperoleh :

$$b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T}\, dt = \frac{b_n}{2} \int_0^T \left\{ \sin \frac{2\pi(k-n)t}{T} + \sin \frac{2\pi(k+n)}{T} \right\} dt$$

$$= \frac{b_n}{2}\int_0^T \sin \frac{2\pi(k-n)t}{T}\,dt + \frac{b_n}{2}\int_0^T \sin \frac{2\pi(k+n)t}{T}\,dt$$

$$= \frac{-Tb_n}{4\pi(k-n)} \cos \frac{2\pi(k-n)t}{T}\Big|_0^T - \frac{Tb_n}{4\pi(k+n)} \cos \frac{2\pi(k+n)t}{T}\Big|_0^T$$

$$= \frac{-b_n T}{4\pi(k-n)}\left\{\cos 2\pi(k-n) - \cos \frac{2\pi(k-n)0}{T}\right\} -$$

$$\frac{b_n T}{4\pi(k+n)}\left\{\cos 2\pi(k+n) - \cos \frac{2\pi(k+n)0}{T}\right\}$$

$$= \frac{-b_n T}{4\pi(k-n)}(1-1) - \frac{b_n T}{4\pi(k+n)}(1-1)$$

$= 0.$ untuk $k,n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

jika $k = n$ maka diperoleh :

$$b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T}\,dt = \tfrac{1}{2} b_n \int_0^T \sin \frac{4n\pi t}{T}\,dt$$

$$\frac{b_n}{2}\int_0^T \sin \frac{4n\pi t}{T}\,dt = \frac{-b_n T}{8n\pi} \cos \frac{4n\pi t}{T}\Big|_0^T$$

$$= \frac{-b_n T}{8n\pi}\left(\cos 4n\pi - \cos \frac{4n\pi 0}{T}\right)$$

$$= \frac{-b_n T}{8n\pi}(1-1) = 0$$

sehingga :

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T}\,dt +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \cos \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

pada ruas kanan hanya ada satu suku untuk $k = n$ yakni

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = 0 + \frac{a_n T}{2} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{a_n T}{2}$$ untuk $n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$

jadi :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \qquad \text{untuk } n = 1,2,3,\ldots$$

c. Mencari b_n, setiap ruas dari deret Fourier pada definisi 6 digandakan dengan $\sin k\omega_0 t$ dan diintegralkan kedua ruas pada periode penuh didapat :

$$\int_0^T f(t)\sin k\omega_0 t\, dt = \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin k\omega_0 t\, dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T (a_n \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\, dt + b_n\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}\, dt\right)$$

$$= -\frac{a_0 T}{4k\pi}\cos\frac{2k\pi t}{T}\Big|_0^T + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{a_n\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\, dt}_{*)} + \underbrace{b_n\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}\, dt}_{**)}\Big)$$

$$= -\frac{a_0 T}{4k\pi}\left(\cos 2k\pi - \cos\frac{2k\pi 0}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\{*) + **)\}$$

$$= -\frac{a_0 T}{4k\pi}(1 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}\{*) + **)\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{*) + **)\}$$

kita tahu bahwa untuk $k \neq n$ seperti pada uraian sebelumnya bahwa :

$$*)\ a_n\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}\, dt = \frac{a_n}{2}\int_0^T \left(\sin\frac{2\pi(k-n)t}{T} + \sin\frac{2\pi(k+n)t}{T}\right) dt$$

$$= 0$$

**) untuk menyelesaikan dengan bantuan :

$$\sin A \sin B = \tfrac{1}{2}\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$$

maka untuk b_n didapat :

$$b_n \int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt = \frac{b_n}{2}\int_0^T \left\{\cos\frac{2\pi(k-n)t}{T} - \cos\frac{2\pi(k+m)t}{T}\right\}dt$$

$$= \frac{b_n}{2}\int_0^T \cos\frac{2\pi(k-m)t}{T}\,dt - \frac{b_n}{2}\int_0^T \cos\frac{2\pi(k+m)t}{T}\,dt$$

$$= \frac{b_n T}{4(k-n)\pi}\sin\frac{2\pi(k-n)t}{T}\Big|_0^T - \frac{b_n T}{4(k+n)\pi}\sin\frac{2\pi(k+n)t}{T}\Big|_0^T$$

$$= \frac{b_n T}{4(k-n)\pi}\left\{\sin 2(k-n)\pi - \sin\frac{2(k+m).0}{T}\right\} -$$

$$\frac{b_n T}{4(k+m)\pi}\left\{\sin 2(k+m)\pi - \sin\frac{2(k+m)\pi.0}{T}\right\}$$

$$= \frac{b_n T}{4(k-n)\pi}(0) - \frac{b_n T}{4(k+n)\pi}(0)$$

$$= 0.$$

jika $k = n$ maka untuk *) :

$$a_n \int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt = \frac{a_n}{2}\int_0^T \sin\frac{4k\pi t}{T}\,dt$$

$$= -\frac{a_n T}{8k\pi}\cos\frac{4k\pi t}{T}\Big|_0^T$$

$$= -\frac{a_n T}{8k\pi}(\cos 4k\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{a_n T}{8k\pi}(1-1) = 0$$

untuk **)

$$b_n \int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}\sin\frac{2m\pi t}{T}\,dt = b_n\int_0^T \sin^2\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$= \frac{b_n}{2}\int_0^T \left(1 - \cos\frac{4m\pi t}{T}\right)dt$$

$$\tfrac{1}{2}b_n \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4n\pi t}{T}\right)dt = \tfrac{1}{2}b_n \int_0^T dt - \tfrac{1}{2}b_n \int_0^T \cos \frac{4n\pi t}{T}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}b_n t \Big|_0^T - \frac{b_n}{8n\pi} \sin \frac{4n\pi t}{T} \Big|_0^T$$

$$= \frac{b_n T}{2} - \frac{b_n T}{8n\pi} (\sin 4n\pi - \sin 0)$$

$$= \frac{b_n T}{2} - \frac{b_n T}{8n\pi} (0)$$

$$= \frac{b_n T}{2}$$

jadi :

$$b_n \int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T}\, dt = \frac{b_n T}{2}$$

sehingga :

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t\, dt = a_n \int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T}\, dt + b_n \int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T} \cdot \sin \frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

hanya memp unyai harga pada k = n satu suku yakni :

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t\, dt = b_n \int_0^T \sin \frac{2k\pi t}{T} \sin \frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

$$= \frac{b_n T}{2} \qquad \text{untuk } n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

maka didapat :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t\, dt$$

$$\text{untuk } n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

jadi dapat disimpulkan :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_o t\,dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_o t\,dt \qquad \omega_o t = 2\pi / T$$

$$m = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.5. DERET FOURIER EKSPONENSIAL

Dari definisi 6 dapat diturunkan suatu deret Fourier eksponemsial jika sinus dan cosinus dinyatakan sebagai fungsi eksponensial.

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t \pm b_m \sin n\omega_o t)$$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_o t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_o t\,dt$$

$$m = 1,2,3,\ldots\ldots.$$

dengam menggumakan idemtitas Euler yakni :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

dimana $i = \sqrt{-1}$ sehingga dapat diturunkan suatu definisi yakni :

DEFINISI : 7

$$\cos m\omega_o t = \frac{e^{in\omega_o t} + e^{-in\omega_o t}}{2} \qquad \sin n\omega_o t = \frac{e^{in\omega_o t} - e^{-in\omega_o t}}{2i}$$

dengam menggumakan definisi 7 deret Fourier trigonometri berubah menjadi :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega_o t} + e^{-in\omega_o t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_o t} - e^{-in\omega_o t}}{2i} \right)$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega_o t}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-in\omega_o t}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \right\}$$

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega_o t} \left(\frac{a_n i + b_n}{2i}\right) + e^{-in\omega_o t} \left(\frac{a_n i - b_n}{2i}\right) \right\} \cdot \frac{i}{i}$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega_o t} \frac{(-a_n + ib_n)}{-2} + e^{-in\omega_o t} \frac{(-a_n - ib_n)}{-2} \right\}$$

$$= a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega_o t} \left(\frac{a_n - b_n i}{2}\right) + e^{-in\omega_o t} \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) \right\}$$

ambil sebuah konstanta kompleks c_n :

$$c_n = \tfrac{1}{2} (a_n - ib_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$n = -n$ maka :

$$a_{-n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos (-n)\omega_o t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_o t \, dt$$

$$= a_n$$

$$b_{-n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin (-n)\omega_o t \, dt = -\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_o t \, dt$$

$$= -b_n$$

sehingga untuk

$$c^*_{-n} = \tfrac{1}{2} (a_n + b_n i) \qquad (\text{ adalah konyugat kompleks } c_n)$$

juga untuk $n = 0$

$$c_o = \tfrac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \, dt - 0 \right) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt = a_o$$

sehingga f(t) dapat dinyatakan :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega_o t} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + e^{-in\omega_o t} \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) \right\}$$

$$= c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{in\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \, e^{-in\omega_o t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, e^{in\omega_o t} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \, e^{-in\omega_o t}}_{*)}$$

*) subtitusi $m = -n$ maka $n = 1 \qquad m = -1$

$n = \infty \qquad m = -\infty$

sehingga f(t) berubah menjadi :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

koefisiem c_n dicari dengan memasukan koefisien a_n dan b_n

didapat :

$$c_n = \tfrac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - i \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

subtitusi dengan menggunakan definisi 7 diperoleh :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

jadi deret eksponensial dapat ditarik kesimpulan atau definisi yakni :

DEFINISI : 8

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t} \quad \text{demgan} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

3.6. IDENTITAS PARSEVAL

Teorema : 1

Bila f(t) memenuhi syarat - syarat derichlet maka :

$$\frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \right]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

dimana a_0 , a_n , dan b_n koefisien - koefisien Fourier dari f(t).

Bukti

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\{f(t)\}^2 = \frac{a_o}{2} f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n f(t) \cos n\omega_o t + b_n f(t) \sin n\omega_o t \right)$$

$$\int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \frac{a_o}{2} \int_0^T f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T f(t) \cos n\omega_o t\, dt + b_n \int_0^T f(t) \sin n\omega_o t\, dt \right)$$

subtitusi dengan koefisien Fourier yakni :

$$\frac{a_o T}{2} = \int_0^T f(t)\, dt$$

$$\frac{a_n T}{2} = \int_0^T f(t) \cos n\omega_o t\, dt$$

$$\frac{b_n T}{2} = \int_0^T f(t) \sin n\omega_o t\, dt$$

didapat

$$\int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \frac{a_o}{2} \cdot \frac{a_o T}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{a_n T}{2} + b_n \cdot \frac{b_n T}{2} \right)$$

$$= \frac{T}{2} \left\{ \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

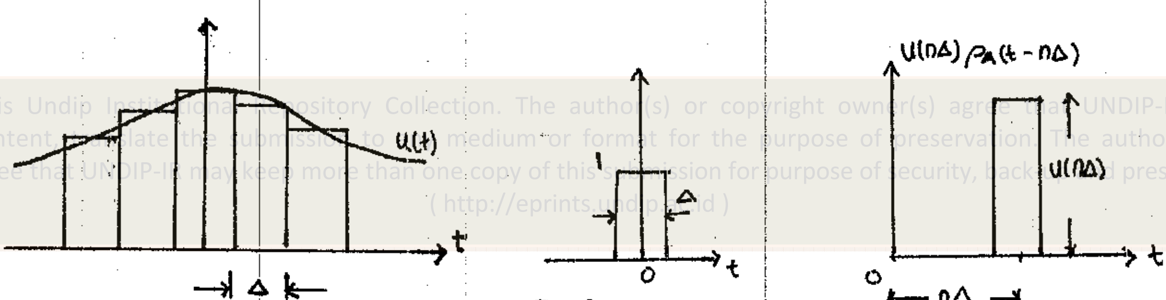
$$\frac{2}{T} \int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

terbukti.

3.7. FUNGSI IMPULS DAN KONVOLUSI

3.7.1. Fungsi Impuls Satuan

suatu fungsi sebarang u(t) dengan suatu deret impuls seperti ditunjukkan dalam gambar :



Gambar 1

Penjelasan gambar :

a). Deretan impuls pulsa dengan banyaknya pulsa n ,akan di cari suatu luasan untuk fungsi u(t).

b). p_Δ (t) adalah pulsa yang tingginya satu dan lebarnya Δ

c). pulsa yang tergeser sejauh nΔ dan besarnya pulsa yang tergeser adalah $u(n\Delta)p_\Delta(t - n\Delta)$.

Hampiran untuk mencari luasan bagi u(t) adalah :

$$\begin{aligned} u(t) &\cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\,p_\Delta(t - n\Delta) \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\,p_\Delta(t - n\Delta) \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \left\{ \frac{1}{\Delta} p_\Delta(t - n\Delta) \right\} . \Delta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t - \tau)\, d\tau \end{aligned}$$

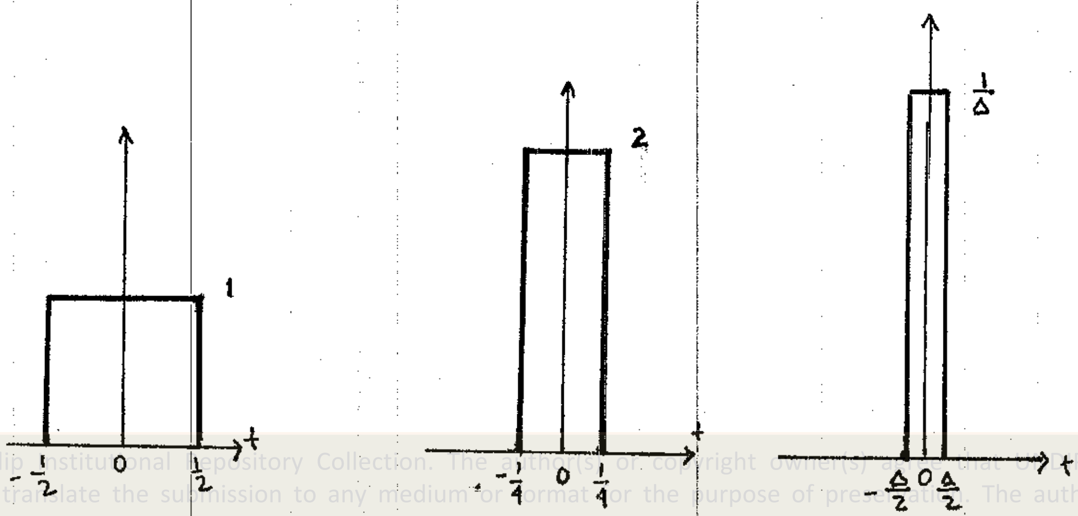
maka :

$$\delta(t - \tau) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} p_\Delta(t - n\Delta) \quad \text{dengan } \tau = n\Delta$$

atau setara dengan :

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} p_\Delta(t) \quad \text{dimana } \tau = 0$$

Proses pengambilan limit dari $\delta(t)$ secara skematis di tunjukkan dalam gambar :



Gambar : 2

Penjelasan gambar :

a). Suatu pulsa dari luas satu satuan untuk $\delta(t)$, $t = \frac{1}{2}$ dan $t = -\frac{1}{2}$

b). suatu pulsa dari luas satu satuan untuk $\delta(t)$ makin kecil diambil untuk $t = \frac{1}{4}$ dan $t = -\frac{1}{4}$

c). suatu pulsa satu satuan diambil untuk t mendekati 0, t diambil $\frac{\Delta}{2}$ dan $-\frac{\Delta}{2}$ dan $\delta(t)$ bernilai $\frac{1}{\Delta}$

dari gambar diatas dapat ditarik kesimpulan atau definsi bahwa fungsi impuls $\delta(t)$ yakni :

DEFINISI : 9

a). $\delta(t) = 0$ untuk $t = \infty$ atau $t \neq 0$

b). $\delta(t)$ tak terdefinisikan untuk $t = 0$

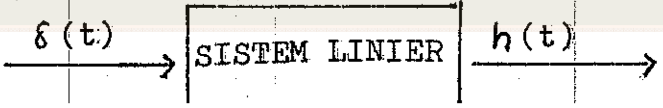
c). $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

maksud dari definisi diatas yaitu bila t diambil cukup besar dan $t \neq 0$ maka luasan untuk $\delta(t) = 0$, tetapi bila t diambil $t = 0$ maka $\delta(t)$ tak terdefinisikan, tetapi bila diambil untuk suatu luasan dengan batas - batas dari ∞ sampai ∞ maka integran dari $\delta(t)$ akan tetap bernilai satu (satu satuan luas).

Fungsi impuls atau delta $\delta(t)$, secara kasar dapat dikatakan merupakan suatu pulsa yang mempunyai amplitudo tak terbatas dan lamanya (duration) nol.

3.7.2. Konvolusi

Konvolusi adalah suatu cara khusus yang ampuh untuk mencirikan hubungan masukan - keluaran dari sistem linier yang tak ubah waktu. Tinjau tanggapan impuls h(t) diberikan sebagai keluaran yang dihasilkan oleh masukan $\delta(t)$, yakni :



jika kita gunakan suatu impuls dengan luas k maka berdasarkan sifat linier dari sistem adalah :

$$k\,\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow k\,h(t)$$

karena sistem tak ubah waktu maka

$$k\,\delta(t - t_o) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow k\,h(t - t_o)$$

untuk mencari tanggapan sistem terhadap suatu masukan sembarang u(t), maka kita nyatakan u(t) sebagai rentetan fungsi impuls : (dengan menggunakan hampiran luasan bagi u(t) seperti pada sub bab 3.7.1) yakni ;

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(m\Delta) \left\{ \frac{1}{\Delta} p_{\Delta}(t - n) \right\} \Delta$$

subtitusi $\frac{1}{\Delta} p_{\Delta}(t - m\Delta) = \delta(t - m\Delta)$ maka

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)\; \delta(t - n\Delta) .\, \Delta$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\, u(m\Delta)\, \delta(t - n\Delta)$$

untuk mencari tanggapan terhadap sistem impuls dari masukan dan keluaran yakni ;

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow h(t)$$

$$\Delta u(t_o)\, \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow \Delta u(t_o)\, h(t)$$

karena sistem tak ubah waktu maka

$$\Delta u(t_o)\, \delta(t - t_o) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow \Delta u(t_o)\, h(t - t_o)$$

ambil $t_o = \Delta$ didapat

$$\Delta u(\Delta)\,\delta(t-\Delta) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow \Delta u(\Delta)h(t-\Delta)$$

diambil secara umum untuk $t_o = n\Delta$ maka :

$$\Delta u(n\Delta)\,\delta(t-n\Delta) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEM LINIER}} \longrightarrow \Delta u(n\Delta)h(t-n\Delta) = y(t)$$

tanggapan keseluruhan y(t) merupakan jumlahan dari tanggapan masing - masing yakni :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\, u(m\Delta)h(t - m\Delta)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)h(t - m\Delta)\,\Delta$$

bila diambil $\Delta \to 0$ dan jumlah impulsnya bertambah $n \to \infty$ sehingga $(m\Delta)$ menjadi variabel kontinu τ

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau).\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

sehingga didapat suatu definisi

DEFINISI : 10

Konvolusi dari dua fungsi u(t) dan h(t) adalah :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

atau

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

tanda " * " artinya "dikonvolusi dengan"

3.8. TRANSFORMASI FOURIER

Teorema : 2

Suatu fungsi f(t) yang tak periodik dapat dinyatakan dengan suatu transformasi Fourier yakni :

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

dimana

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

demgan menganggap fumgsi f(t) periodik dengan periode tak terhimgga.

Bukti :

Tinjau definisi 8 deret eksponemsial :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\omega_0 t}$$

dimana

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt$$

dan

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ambil $T = \infty$

maka untuk $\lim_{T \to \infty} \frac{2\pi}{T} = \omega_0$, ω_0 akan bernilai samgat kecil sehimgga dinyatakan dengan $\Delta\omega_0$ sehimgga $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega_0}{2\pi}$

akhirnya , frekuemsi sebarang harmonik $n\omega_0$ haruslah menunjukan variabel frekuensi umum yang menggambarkan spektrum kontinu. Demgan kata lain n harus menjadi tak berhingga untuk ω_0 mendekati nol sehingga perkaliannya terbatas didapat

$$n\omega_0 = \omega$$

maka :

$$C_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Ruas kanan ini adalah fumgsi dari ω (bukan dari t) kemudian dinyatakan dengan $F(i\omega)$ sehingga

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

demikian untuk memcari f(t) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\omega_0 t} \cdot \frac{T}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T\, e^{in\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T}$$

Subtitusi

$$C_n T = F(i\omega) \qquad n\omega_o = \omega \quad , \quad \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega_o}{2\pi}$$

didapat :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

terbukti.

Selanjutnya digunakan simbol untuk F(iω) dengan $\mathcal{F}\{\ \}$ sedangkan untuk f(t) dengan $\mathcal{F}^{*}\{\ \}$ sebagai transformasi balik. Hubungan pasangan transformasi Fourier adalah untuk f(t) yang diketahui terdapat satu F(iω), dan untuk F(iω) yang diketahui terdapat suatu f(t).

3.9. SIFAT - SIFAT TRANSFORMASI FOURIER

3.9.1 Simetris

Teorema : 3

Suatu fungsi dengan variabel t, f(t) dengan hubungan trmsformasi F(iω) berlaku :

2π f(-ω) memiliki hubungan transformasi F(it)

Bukti :

dengan menggunakan teorema 2 diambil f(t) yakni :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

digandakan dengan 2π, dan subtitusi t = -t diperoleh :

$$2\pi\, f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$2\pi\, f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(it)\, e^{-i\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{F(it)\}$$

$$2\pi f(-\omega) \Longleftrightarrow F(it)$$

terbukti.

3.9.2. Kelinieran

Suatu transformasi fourier adalah operasi linier jika fungsi $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ memiliki hubungan transformasi $F_1(i\omega)$ dan $F_2(i\omega)$ maka untuk a, b sebarang berlaku :

$$af_1(t) \pm bf_2(t) \longleftrightarrow aF_1(i\omega) + bF_2(i\omega)$$

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 2 diketahui bahwa pasangan transfomasi f(t) adalah F(iω) yakni :

$$f(t) \longleftrightarrow F(i\omega)$$

ambil $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ dan sebarang konstanta a,b maka :

$$af_1(t) + bf_2(t) = a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

$$= a\, F_1(i\omega) + b\, F(i\omega)$$

terbukti.

3.9.3. Konvolusi

3.9.3.1 Konvolusi Waktu

Teorema : 5

Jika suatu fungsi dengan variabel t yakni x(t) dan h(t) memiliki hubungan transformasi masing - masing X(iω) dan H(iω) maka berlaku :

x(t)*h(t) memiliki hubungan transformasi Y(iω) =X(iω). H(iω).

Bukti :

Dengan menggunakan definisi 10 yakni integral konvolusi kemudian dikenakan transformasi fourier dengan menggunakan teorema 2

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,e^{-i\omega t}\,dt\right]d\tau$$

misal $a = t - \tau$ sehingga $da = dt$, $t = a + \tau$

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\,e^{-i\omega(a+\tau)}\,da\right]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(a)\,e^{-i\omega a}\,da$$

$$Y(i\omega) = X(i\omega).H(i\omega)$$

terbukti.

3.9.3.2 Konvolusi Frekuensi

Teorema : 6

Jika suatu fungsi dengan variabel t, $f(t)$ dan $g(t)$ memiliki hubungan transformasi yakni $F(i\omega)$ dan $G(i\omega)$ maka untuk $f(t).g(t)$ memiliki hubungan transformasi $\dfrac{F(i\omega) * G(i\omega)}{2\pi}$

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 2 yakni bila $F(i\omega)$ diketahui maka $f(t)$ dapat ditentukan demikian sebaliknya.

Tinjau transformasi dari $\dfrac{F(i\omega) * G(i\omega)}{2\pi}$ didapat :

$$\mathcal{F}^*\left\{\frac{F(i\omega) * G(i\omega)}{2\pi}\right\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} F(iu)G(i\omega - iu)\,du\,d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(iu) \int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega - iu)\,e^{i\omega t}\,d\omega\,du$$

misal $x = \omega - u$, $dx = d\omega$ dan $\omega = x + u$ diperoleh :

$$\mathcal{F}^*\left\{\frac{F(i\omega) * G(i\omega)}{2\pi}\right\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(iu) \int_{-\infty}^{\infty} G(ix)\,e^{i(x+u)}\,dx\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(iu)\,e^{iut}\,du \,.\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(ix)e^{ixt}\,dx$$

$$= f(t).g(t) \quad ..$$

3.9.4. Pergeseran Waktu

Teorema : 7

Jika suatu fumgsi dengan variabel t, $f(t)$ memiliki pasamgam transformasi $F(i\omega)$ maka berlaku untuk $f(t - t_o)$ memiliki hubungan transformasi $F(i\omega)\, e^{-i\omega t_o}$

bukti :

Dengan menggunakan teorema 2 bagi $f(t)$ dapat diturum kan untuk $f(t - t_o)$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

karena $f(t)$ bergeser waktu t_o maka menjadi $f(t - t_o)$ sesehinnga transformasinya :

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_o)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

misal $x = t - t_o$, $dx = dt$ $t = t_o + x$ didapat

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega (t_o + x)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, e^{i\omega t_o}\, dx$$

$$= e^{i\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= e^{i\omega t_o} F(i\omega)$$

terbukti.

fungsi $f(t - t_o)$ adalah fumgsi $f(t)$ yang tertunda t_o detik

3.9.5. Pergeseran Frekuensi - Modulasi

Pergeseran frekuensi atau translasi merupakan suatu operasi pemting dalam sistem komunikasi. Proses ini sering dikenal sebagai Modulasi.

Teorema : 8

Jika suatu fungsi dengan variabel t, $f(t)$ memiliki hubungan transformasi $F(i\omega)$ maka berlaku untuk fungsi :

$f(t)\ e^{i\omega_0 t}$ memiliki hubungan transformasi $F(i\omega - i\omega_0)$.

Bukti :

Dengan menggunakan teorema 2 yakni :

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t}\ dt = \mathfrak{F}\{f(t)\}$$

karena f(t) digandakan dengan $e^{i\omega_0 t}$ maka transformasinya :

$$\mathfrak{F}\{f(t)\ e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t}\ e^{i\omega_0 t}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i(\omega - \omega_0)t}\ dt$$

$$= F(i\omega - i\omega_0)$$

terbukti.

Pernyataan teorema 8 ini merupakan dasar matematis untuk memahami modulasi.