# BAB II

# THEORI PENUNJANG

## II.1. PENGERTIAN RUANG TOPOLOGI

Pandanglah : X suatu himpunan yang tidak kosong. Suatu keluarga $\mathfrak{T}$ dari subset-subset pada X, disebut : topologi dari X, bhb $\mathfrak{T}$ memenuhi axioma-axioma berikut ini :

i. X dan $\emptyset$ anggota $\mathfrak{T}$ .

ii. Union (gabungan) dari sembarang himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{T}$ anggota $\mathfrak{T}$ .

iii. Irisan dari sembarang dua himpunan dalam $\mathfrak{T}$ anggota $\mathfrak{T}$

Anggota-anggota dari $\mathfrak{T}$ dinamakan : open set (himpunan terbuka). Himpunan X bersama dengan topologi $\mathfrak{T}$ , yang dinotasikan sebagai : $(X, \mathfrak{T})$ dinamakan : ruang topologi.

Contoh 1 :

Pandanglah : U notasi keluarga dari semua himpunan - himpunan terbuka dalam R, maka U merupakan suatu topologi pada R, yang dinamakan : usual topologi pada R

Secara analogi, keluarga U dari semua himpunan-himpunan terbuka pada $R^2$ adalah : suatu topologi dan dinamakan : usual topologi pada $R^2$.

Contoh 2 :

Pandanglah : $X = \{a,b,c,d,e\}$ . Keluarga dari subset subset pada X adalah :

$$\mathfrak{T}_1 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

$$\mathfrak{T}_2 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

$\mathfrak{T}_3 = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d,e\} \}$.

$\mathfrak{T}_1$ adalah suatu topologi pada X, sebab memenuhi axioma-axioma (i),(ii),(iii), tetapi $\mathfrak{T}_2$ bukan suatu topologi pada X, sebab union dari : $\{a,c,d\} \cup \{b,c,d\} = \{a,b,c,d\}$ tidak berada dalam $\mathfrak{T}_2$, yaitu tidak memenuhi axioma (ii). Demikian pula $\mathfrak{T}_3$ bukan suatu topologi pada X, sebab interseksi dari dua anggota dalam $\mathfrak{T}_3$ yaitu : $\{a,c,d\} \cap \{a,b,d,e\} = \{a,d\}$ tidak berada dalam $\mathfrak{T}_3$, berarti tidak memenuhi axioma (iii).

Contoh 3:

Seperti yang terlihat pada axioma (i), suatu topologi harus memuat himpunan X dan $\emptyset$. Keluarga $\mathcal{J} = \{X, \emptyset\}$ yang terdiri atas X dan $\emptyset$ saja, merupakan suatu topologi pada X, yang dinamakan : "Indiskrit topologi" dan himpunan X dengan indiskrit topologi pada X, yang dinotasikan sebagai $(X, \mathcal{J})$ dinamakan : ruang indiskrit.

Contoh 4 :

Suatu singgle set $X = \{a\}$. Topologi pada X adalah : $\{X, \emptyset\}$, yaitu suatu indiskrit topologi.

Pandang $\mathfrak{D}$ notasi keluarga dari semua subset-subset pada X. Jika $\mathfrak{D}$ memenuhi semua axioma (i),(ii) dan (iii), maka topologi ini, dinamakan : diskrit topologi.

Contoh 5 :

Diketahui $X = \{a,b,c\}$. Diskrit topologi pada X adalah $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$ dimana $\mathfrak{D}$ merupakan suatu keluarga dari semua subset-subset pada X, yang memenuhi axioma-axioma suatu topologi.

## II.2. BASIS UNTUK SUATU TOPOLOGI.

Definisi 1 :

Jika X suatu himpunan, maka basis untuk suatu topologi pada X adalah keluarga $\beta$ dari subset-subset pada X, sedemikian hingga :

1. Untuk setiap $x \in X$, paling sedikitnya ada satu elemen basis $B \in \beta$ yang memuat x.
2. Jika x anggota irisan dua elemen basis sembarang $B_1$ dan $B_2$, maka : ada suatu basis elemen $B_3$ yang memuat x, sedemikian hingga : $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ atau equivalen dengan pernyataan berikut : jika sembarang $B_1, B_2 \in \beta$ maka : $B_1 \cap B_2$ merupakan union dari anggota-anggota $\beta$ .

Definisi 2 :

Keluarga $\beta$ merupakan basis untuk suatu topologi $\mathcal{T}$ pada himpunan X, bhb setiap open set $G \in \mathcal{T}$ merupakan gabungan anggota-anggota dari $\beta$.

Contoh 6 :

Diketahui : $X = \{a,b,c\}$ .

Kelunga subset-subset dari X adalah :

$\beta_1 = \{\{a\} ,\{b\} ,\{c\} ,\{a,b\} ,\{a,c\} ,\{b,c\} , X,\emptyset \}$.

$\beta_2 = \{X, \emptyset, \{a,b\} , \{a,c\}\}$.

$\beta_3 = \{X, \emptyset, \{a\} ,\{a,b\} , \{b,c\}\}$.

Diantara $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yang merupakan basis untuk suatu topolo gi $\mathcal{T}$ pada X, adalah $\beta_1$, hal ini dapat diselidiki sbb :

Berdasarkan definisi I, akan diselidiki bahwa setiap elemen dari X, minimal ada satu elemen basis $B \in \beta_1$ yang memuat elemen tersebut.

$a \in X$, $\exists \{a,b\} \in \beta_1$, sedemikian hingga $a \in \{a,b\}$ .

$b \in X$, $\exists \{a,b\}$ dan $\{b\}$ , sedemikian hingga $b \in \{a,b\}$ atau $b \in \{b\}$ .

$c \in X$, $\exists \{a,c\} \in \beta_1$, sedemikian hingga $c \in \{a,c\}$

Jadi untuk definisi I.(i) terpenuhi.

Selanjutnya untuk definisi I. (ii) akan diselidiki bahwa untuk sembarang $B_1$ , $B_2 \in \beta_1$, maka $B_1 \cap B_2$ merupakan gabungan dari anggota - anggota $\beta_1$.

$\{a,b\}$ , $\{a,c\} \in \beta_1 \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$ , dimana $\{a\} = \{a\} \cup \emptyset$. Jadi $\{a\}$ merupakan union anggota-anggota $\beta_1$.

$\{a,b\}$ , $\{b,c\} \in \beta_1 \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$ , dimana : $\{b\} = \{b\} \cup \emptyset$. Jadi $\{b\}$ merupakan union anggota-anggota $\beta_1$

X dan $\emptyset \in \beta_1 \Longrightarrow X \cap \emptyset = X$, dimana $X = \{a,b\} \cup \{a,c\}$

Jadi X merupakan union anggota - anggota $\beta_1$. Dengan demikian terbuktilah bahwa $\beta_1$ merupakan basis untuk topologi pada himpunan X.

Untuk mengecek kebenaran penyelidikan tersebut, dapat digunakan definisi 2, yaitu apakah setiap open set $G \in \mathcal{T}$ pada X, merupakan union dari anggota - anggota .

Diketahui $X = \{a,b,c\}$ . Topologi pada X adalah : $\mathcal{T} = \{X, \emptyset,$

$\{a\}$ , $\{b,c\}$ , $\{a,c\}$ , $\{c\}\}$ . Selanjutnya, akan diselidiki bahwa setiap open set dalam $\mathcal{T}$ adalah union anggota-anggota $\beta_I$.

$X = X \cup \emptyset$, dimana $X$ dan $\emptyset \in \beta_I$.

$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, dimana $\emptyset \in \beta_I$.

$\{a\} = \{a\} \cup \emptyset$, dimana $\{a\}$ dan $\emptyset \in \beta_I$.

$\{b,c\} = \{b\} \cup \{c\}$ , dimana $\{b\}$ dan $\{c\} \in \beta_I$.

$\{c\} = \{c\} \cup \emptyset$, dimana $\{c\}$ dan $\emptyset \in \beta_I$.

Jadi definisi 1 dan 2, semuanya terpenuhi sehingga benar $\beta_I$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$ pada himpunan X. Sedangkan $\beta_2$, bukan merupakan basis, sebab :

$\{a,b\} \in \beta_2$ , $\{a,c\} \in \beta_2 \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$

dimana $\{a\}$ bukan merupakan gabungan dari anggota $\beta_2$. Demikian pula dengan $\beta_3$ bukan merupakan basis untuk topologi pada X, sebab : $\{a,b\}$ , $\{b,c\} \in \beta_3 \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$ , dimana $\{b\}$ bukan merupakan gabungan dari anggota - anggota $\beta_3$.

## II.3. SUBBASIS UNTUK SUATU TOPOLOGI.

Definisi I :

> Subbasis S untuk suatu topologi pada X, adalah suatu keluarga dari subset-subset pada X yang gabunganya sama dengan X. Topologi yang diturunkan oleh subbasis S adalah : semua union dari - irisan berhingga ( finite intersection ) elemen elemen dari S

Definisi II:

Pandang $S$ suatu keluarga subset-subset dari X. $S$ merupakan subbasis untuk topologi $\mathfrak{T}$ pada X, bhb finite intersection dari anggota-anggota $S$ berbentuk suatu basis untuk topologi pada X.

Contoh 7 :

Diketahui : $X = \{a,b,c\}$.

Keluarga $S = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}\}$, dimana union dari subset subset tersebut sama dengan X ( berdasarkan definisi I ) . Untuk menyelidiki apakah benar $S$ merupakan subbasis untuk topologi pada X, digunakan definisi II.

$$S = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}.$$

Finite interseksi dari anggota-anggota $S$ adalah :

$$\beta = \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}, X, \emptyset\}$$

Selanjutnya diselidiki apakah betul $\beta$ merupakan suatu basis untuk topologi $\mathfrak{T}$ pada X.

(i) $a \in X \Rightarrow \exists \{a,b\} \in \beta$, sehingga $a \in \{a,b\}$.

$b \in X \Rightarrow \exists \{b,c\} \in \beta$, sehingga $b \in \{b,c\}$

$c \in X \Rightarrow \exists \{a,c\} \in \beta$, sehingga $c \in \{a,c\}$

(ii) $\{a,b\}, \{b,c\} \in \beta \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{b,c\} = \{c\}$, dimana - $\{c\} = \{c\} \cup \emptyset$.

$\{a,c\}, \{a,b\} \in \beta \Longrightarrow \{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$, dimana $\{a\} = \{a\} \cup \emptyset$.

$\{b,c\}, \{a,c\} \in \beta \Longrightarrow \{b,c\} \cap \{a,c\} = \{c\}$, dimana $\{c\} = \{c\} \cup \emptyset$

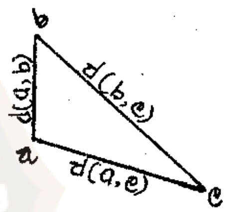
$\{a,b\}, \emptyset \in \beta \Longrightarrow \{a,b\} \cap \emptyset = \emptyset$, dimana $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, dst

Jadi terbukti finite interseksi dari anggota-anggota $S$ ada lah bentuk suatu basis untuk topologi $\mathfrak{J}$ pada X. Topologi yang diturunkan oleh sub-basis S, menurut definisi, adalah semua union dari finite interseksi (irisan berhingga) elemen-elemen S, yaitu :

$$\mathfrak{J} = \{ \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{b\} , \{c\} , \{a\} , X, O \}$$

II.4. METRIK DAN RUANG METRIK.

Pandanglah : X suatu himpunan yang tidak kosong. Pasangan berurutan dari elemen-elemen pada X, dikatakan suatu " metrik ", jika memenuhi axioma-axioma berikut :




(i). $d(a,b) \geqslant 0$ dan $d(a,b) = 0$.

(ii). $d(a,b) = d(a,b)$.

(iii). $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$.

(iv). Jika $a \neq b \Longrightarrow d(a,b) > 0$.

dimana $a,b,c \in X$ dan $d(a,b)$ disebut jarak antara a dan b. Pada axioma-axioma diatas, d didefinisikan terhadap bidang $R^2$, seperti yang digambarkan disamping kanan.

Axioma (i) menyebutkan bahwa jarak dari suatu titik ke titik yang lain tidak pernah negatip, dan jarak dari suatu titik ke titik itu sendiri adalah : nol.

Axioma (ii) menyebutkan bahwa : jarak antara a dan b sama dengan jarak antara b dan a.

Axioma (iii) disebut : pertidaksamaan segitiga, karena jika a,b,c titik-titik pada bidang $R^2$, maka axioma (iii) menyebutkan bahwa : panjang $d(a,c)$ lebih kecil atau sama dengan jumlah $d(a,b) + d(b,c)$.

Axioma (iv) menyebutkan bahwa : jarak antara dua titik yang berbeda adalah positip.

Contoh 8 :

Fungsi d didefinisikan oleh $d(a,b) = |a - b|$, dimana a dan b adalah bilangan real R, merupakan suatu metrik.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa : fungsi tersebut memenuhi axioma - axioma metrik sbb :

(i). $\left.\begin{array}{l} \text{Jika } a = b \Longrightarrow d(a,b) = |a - b| = 0 \\ \text{Jika } a \neq b \Longrightarrow d(a,b) = |a - b| > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} d(a,b) \geqslant 0 \\ \& \ d(a,a) = 0 \end{array}$

Jadi memnuhi axioma (i).

(ii). $\left.\begin{array}{l} d(a,b) = |a - b| \\ d(b,a) = |b - a| = |a - b| \end{array}\right\} \Longrightarrow d(a,b) = d(b,a).$

Memenuhi axioma (ii).

(iii). Jika $\exists$ sembarang elemen, misal c dalam R, maka menurut definisi $d(a,c) = |a - c|$ dan $d(b,c) = |b - c|$. Sehingga $|a - c| \leqslant |a - b| + |b - c| \Longrightarrow d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$. Memenuhi axioma (iii).

(iv). Jika $a \neq b \Longrightarrow d(a,b) = |a - b| > 0$, memenuhi axioma (iv).

Jadi terbukti $d(a,b) = |a - b|$ adalah suatu metrik dalam R

Metrik ini, dinamakan : usual metrik ( metrik biasa ) dalam R.

Contoh 9 :

Fungsi d didefinisikan oleh :

$$d(p,q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

dimana $p = (a_1 , a_2)$ dan $q = (b_1 , b_2)$ adalah titik-titik dalam bidang $R^2$. Fungsi d merupakan suatu metrik.

**Bukti :**

Akan dibuktikan bahwa fungsi d memenuhi axioma-axioma sbb :

(i). $d(p,q) = \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$, dan

$$d(p,p) = \left[(a_1 - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2\right]^{1/2} = 0.$$

Jadi memenuhi axioma (i).

(ii). $d(p,q) = \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = d(q , p)$. Jadi $d(p,q) = d(q,p)$ memenuhi axioma (ii).

(iii). Jika $\exists$ elemen r dalam $R^2$, dimana $r = (c_1 , c_2)$, maka $d(p,r) = \left[(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Sehingga :

$$\left[(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2\right]^{1/2} \leq \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

. Jadi $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ memenuhi axioma (iii).

(iv). Jika $p \neq q$ , maka $a_1 \neq b_1$ dan $a_2 \neq b_2$. Sehingga didapatkan $d(p,q) = \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} > 0$ memenuhi axioma (iv). Jadi terbukti fungsi d merupakan suatu metrik.

Metrik tersebut diatas dinamakan : usual metrik (metrik biasa) dalam $R^2$.

Contoh 10 : Pandanglah : X sembarang himpunan yang tidak -

kosong dan d adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh :

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } a = b \\ 1 & , \text{ jika } a \neq b \end{cases}$$

Fungsi d adalah suatu metrik pada X.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa : fungsi d memenuhi axioma - axioma dibawah ini :

(i). Untuk $\forall\, a,b \in X$, menurut definisi $d(a,b) = 0$ atau $d(a,b) = 1$ dengan demikian $d(a,b) \geq 0$.

$d(a,b) = 0$, jika $a = b$, sehingga $d(a,b) = d(a,a) = 0$.

Jadi memenuhi axioma (i).

(ii). Pandang $a,b \in X$.

Jika $a \neq b \Longrightarrow b \neq a$. Sehingga $d(a,b) = 1$ dan $d(b,a) = 1$. Dengan demikian $d(a,b) = d(b,a)$.

Jika $a = b \Longrightarrow b = a$, sehingga $d(a,b) = d(b,a) = 0$.

Memenuhi axioma (ii).

(iii). $a,b,c \in X$ adalah titik-titik yang berbeda, yaitu :

$a \neq b \neq c$, sehingga : $d(a,c) = 1$, $d(a,b) = 1$, $d(b,c) = 1$. Dengan pertidaksamaan segitiga :

$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) = 1 + 1$. Jadi $d(a,c) = 1 \leq 1 + 1$. Memenuhi axioma (iii).

(iv). Pandang $a,b \in X$. Untuk $a \neq b \Longrightarrow d(a,b) = 1$, dengan kata lain $d(a,b) > 0$. Memenuhi axioma (iv).

Jadi terbukti d merupakan suatu metrik.

Metrik ini, dinamakan : metrik trivial pada X.

II.4.1 DAERAH TERBUKA ( BOLA TERBUKA )

Sebelum dibahas tentang ruang metrik, perlu dipelajari lebih dulu mengenai bola terbuka ( daerah terbuka ).

Pandanglah : d suatu metrik pada himpunan X. Untuk sembarang titik $p \in X$ dan sembarang bilangan real $\delta > 0$, ada suatu bola terbuka ( daerah terbuka ) : $S_d(p, \delta)$, di mana $S_d(p, \delta)$ merupakan notasi himpunan titik-titik yang jaraknya dari p lebih kecil $\delta$ .

$$S_d(p, \delta) = \{ x : d(p,x) < \delta \}$$

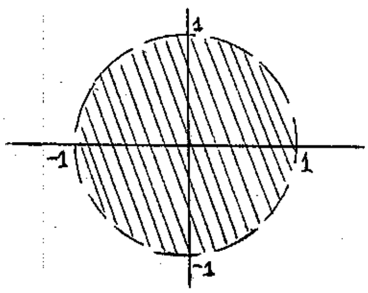
Dalam pemakaianya, kadang-kadang cukup ditulis dengan : $S(p, \delta)$. Jika digambar, bola terbuka $S(p, \delta)$ merupakan bola terbuka dengan pusat p dan jari-jari .

Contoh 11 :

Titik p = (0,0) dibidang $R^2$ dan bilangan real $\delta = 1$ Jika d merupakan usual metrik pada $R^2$, maka bola terbuka S(p, ) adalah :

$$S(p, \delta) = \{ x : d(p,x) < \delta \}$$
$$S(p, \delta) = \{ x : d(0,x) < 1 \}$$

dapat digambarkan sbb :



Dari gambar diatas, tampak $S(p, \delta)$ merupakan open unit, yaitu daerah terbuka yang dibatasi oleh elemen-elemen unit.

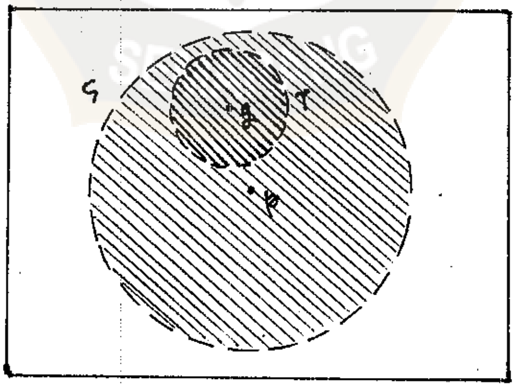
Contoh 12 :

Pandang d suatu usual metrik pada R, yang didefinisikan sebagai $d(a,b) = |a - b|$ dimana $a,b \in R$. Bola terbuka (open sphere) $S(p, \delta)$ adalah : $S(p, \delta) = \{ x : d(p,x) = |p - x| < \delta \}$ dengan kata lain $S(p, \delta) = \{ x : p - \delta < x < p + \delta \}$

Jadi bola terbuka $S(p, \delta)$ didalam R, merupakan interval terbuka $( p - \delta, p + \delta )$

Theorema 2.1 :

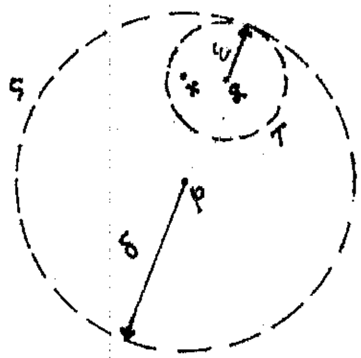
Pandang S suatu bola terbuka dengan pusat p dan jari-jari $\delta$. Untuk setiap titik $q \in S$, ada suatu bola terbuka T dengan pusat q, sedemikian hingga T termuat dalam S. Pernyataan ini dapat digambarkan sbb :




Bukti :

Akan dibuktikan bahwa : setiap $q \in S$, terdapatlah bola terbuka T dengan pusat q yang termuat didalam S.

$q \in S = S(p, \delta) \Longrightarrow d(q,p) < \delta$, seperti yang tergambar diba wah ini :




Pada gambar, terlihat $\varepsilon = \delta - d(q,p)$.

Dengan demikian , dibuktikan bola terbuka $T = S(q,\varepsilon)$ dengan pusat q dan jari-jari $\varepsilon$ adalah subset dari $S$.

Misal : $x \in T = S(q,\varepsilon) \Longrightarrow d(x,q) < \varepsilon = \delta - d(q,p)$.

Dengan pertidaksamaan segitiga didapatkan :

$d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p) = (\delta - d(q,p)) + d(q,p) = \delta$.

Jadi $d(x,p) < \delta \Longrightarrow x \in S = S(p,\delta)$. Karena $x \in T = S(q,\varepsilon)$ maka $x \in S = S(p,\delta)$, terbuktilah bahwa bola terbuka $T$ adalah subset dari $S$.

Theorema 2.2 :

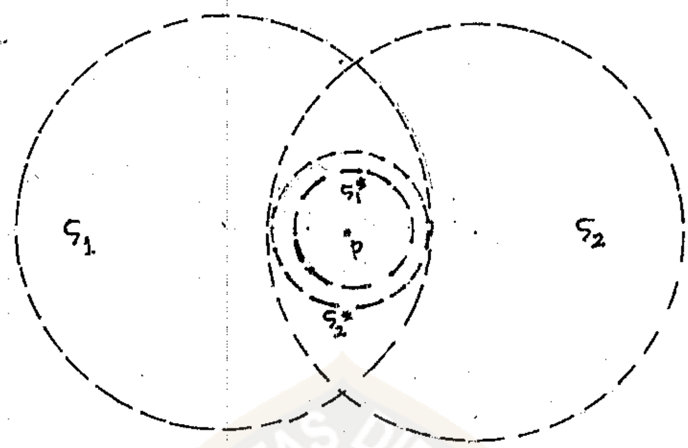
> Pandang $S_1$ dan $S_2$ suatu bola terbuka. Setiap titik $p \in S_1 \cap S_2$, terdapatlah bola terbuka $S_p$ dengan pusat p, sedemikian hingga $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

Bukti :

Pandang $p \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow p \in S_1$ dan $p \in S_2$.

$p \in S_1$ dimana $S_1$ bola terbuka, menurut theorema 2.1, ada suatu bola terbuka $\overset{*}{S}_1$ dengan pusat p, sedemikian hingga $p \in \overset{*}{S}_1 \subset S_1$

Demikian juga, jika $p \in S_2$, maka terdapat bola terbuka $S_2^*$ dengan pusat p, sedemikian hingga $p \in S_2^* \subset S_2$. dapat digambarkan sbb :




Menurut suatu dalil : jika S dan T merupakan bola terbuka dengan pusat yang sama, maka satu diantaranya merupakan subset dari yang lain.

Bukti :

Misal : $S = S(p, \delta_1)$ dan $T = S(p, \delta_2)$. Dengan demikian S dan T, sama-sama mempunyai pusat p dengan jari-jari $\delta_1$ dan $\delta_2$.
Jika $\delta_1 \leq \delta_2$, maka : $S \subset T$. Jika $\delta_2 \leq \delta_1$, maka $T \subset S$.

Berdasarkan dalil tersebut, karena $S_1^*$ dan $S_2^*$ mempunyai pusat sama, yaitu di titik p, maka : $S_1^* \subset S_2^*$ atau $S_2^* \subset S_1^*$.

Jadi $p \in S_1^* \subset S_1$ dan $p \in S_1^* \subset S_2^* \subset S_2$.

Sehingga dapat disimpulkan : $p \in S_1^* \subset S_1 \cap S_2$. Jika $S_1^* = S_p$ maka terbukti bahwa : $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

Theorema 2.3 :

Pandang : d suatu metrik pada himpunan X .
Keluarga dari bola terbuka $S_d(p, \delta)$ didalam X dengan $p \in X$ dan $\delta > 0$, merupakan basis un-

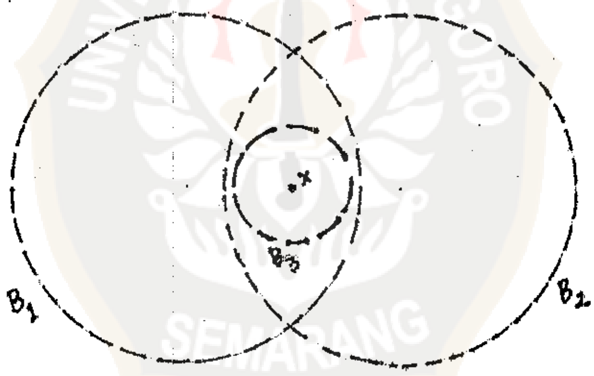
tuk topologi pada X.

Bukti :

Menurut definisi, jika X suatu himpunan, maka basis untuk topologi pada X adalah : keluarga $\beta$ dari subset-subset himpunan X yang memenuhi :

(i) Untuk setiap $x \in X$, paling sedikit ada satu basis elemen yang memuat x.

(ii) Jika x elemen dari irisan dua basis elemen $B_1$ dan $B_2$, maka ada suatu basis elemen $B_3$ yang memuat x, sedemikian hingga $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$, seperti yang digambarkan dibawah ini :




Definisi basis tersebut, sesuai dengan theorema 2.1 dan theorema 2.2, sehingga terbuktilah bahwa : keluarga bola terbuka dari himpunan X, merupakan suatu basis untuk topologi pada X

II.4.2. RUANG METRIK.

Definisi :

Pandang : d suatu metrik pada himpunan X yang tidak kosong. Topologi pada X yang diturunkan oleh keluarga bola terbuka didalam X dinamakan :" metrik topologi " atau " topologi yang disebabkan -

oleh metrik d ".

Selanjutnya, himpunan X bersama dengan topologi yang disebabkan oleh metrik d, dinamakan : " ruang metrik " dan dinotasikan sebagai : (X,d).

Jadi suatu ruang metrik adalah : suatu ruang topologi yang topologinya disebabkan oleh sebuah metrik. Oleh sebab itu, semua konsep yang didefinisikan pada ruang topologi, juga didefinisikan pada ruang metrik.

Untuk penggunaan praktisnya, ruang metrik (X,d) cukup ditulis X saja.

Contoh 13 :

Jika d usual metrik pada garis real R, yaitu $d(a,b) = |a - b|$, maka bola terbuka didalam R adalah interval terbuka berhingga. Sehingga usual metrik pada R, menyebabkan usual topologi pada R. Secara analog, demikian pula dengan usual metrik pada $R^2$, menyebabkan usual topologi pada $R^2$.

II.5. METRIK EQUIVALEN.

Definisi :

Dua metrik d dan $d^*$ pada suatu himpunan X, dikatakan equivalen jika dan hanya jika keduanya menyebabkan topologi yang sama pada X, yaitu jika dan hanya jika d-bola terbuka dan $d^*$-bola terbuka didalam X adalah basis untuk topologi yang sama pada X.

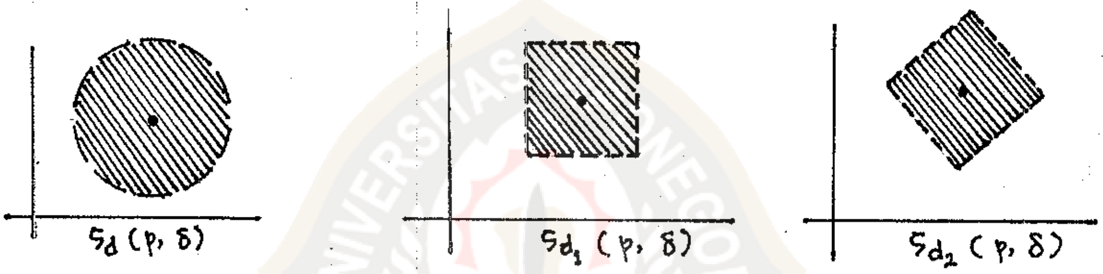
Contoh 14 :

Usual metrik d dan metrik $d_1$ & $d_2$ yang didefinisikan :

$d_1(p,q) = \max\{\,|a_1 - b_1|\,,\,|a_2 - b_2|\,\}$.

$d_2(p,q) = \{\,|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|\,\}$.

Metrik $d_1$ dan $d_2$ didalam $R^2$ dengan $p = (a_1, a_2)$ dan $q = (b_1, b_2)$ sembarang titik pada $R^2$. Metrik usual d dan $d_1$ & $d_2$, menyebabkan usual topologi pada $R^2$, sebab keluarga open sphere dari tiap-tiap metrik tersebut merupakan basis untuk usual topologi pada $R^2$, yang dapat diilustrasikan sbb :




## II.6. PENGERTIAN : TITIK INTERIOR , OPEN SET , TITIK LIMIT HIMPUNAN TERTUTUP , CLOSUR.

### II.6.I. TITIK INTERIOR.

Pandang : X suatu himpunan yang tidak kosong dari bilangan real. Suatu titik $p \in X$, disebut : titik interior jika terdapat suatu sekitar ( sebutlah N ) dari p, hingga N merupakan himpunan bagian dari X, yaitu : $p \in N \subset X$.

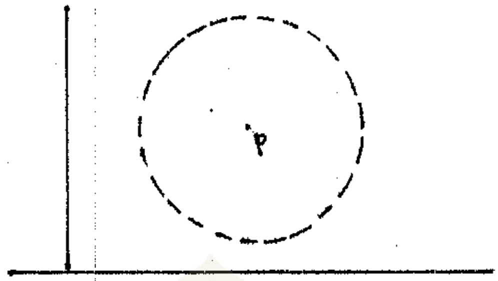
Sebelum diberikan contoh-contoh dari titik interior, akan dipelajari lebih dulu mengenai : persekitaran titik p (neighborhood dari titik p).

Persekitaran ( neighborhood ) suatu titik p, didefinisikan sebagai : $\{\, x \mid d(x,p) < r \,\}$ dan ditulis : $N_r(p)$ dimana r = jari-jari dan p = titik pusat.

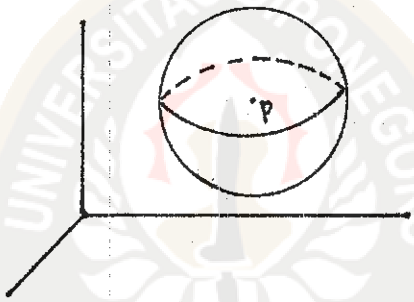
Untuk dimensi 1 :


Persekitaran untuk dimensi 1, merupakan interval terbuka .

Untuk dimensi 2 :




Untuk dimensi 3 :

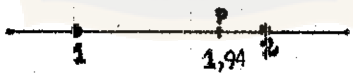



Contoh 15 :

Diketahui $X = \{ x \mid 1 \leq x \leq 2 \}$ . Titik p = 1,94.

Apakah p merupakan titik interior dalam metrik usual d ?.

Penyelesaian :




Akan dipilih yang lebih kecil diantara d(1, 1,94) dan d(2, 1,94).

$d(1 \; , \; 1{,}94) = |1 - 1{,}94| = 0{,}94.$

$d(2 \; , \; 1{,}94) = |2 - 1{,}94| = 0{,}06.$

Jadi dipilih d(2 , 1,94)

Misal diambil r = 1/2 d(2 , 1,94) = 1/2 ( 0,06 ) = 0,03 .

Dengan demikian $N_r$ (p) = $N_{0,03}$ (1,94) $\subset$ X. Terbuktilah - p = 1,94 adalah titik interior.

Contoh 16 :

Seperti terlihat pada contoh 15, apakah titik $p = 1$ merupakan titik interior ?.

Penyelesaian :

Ambil $r = 1/2\ d(1,2) = 0,5$.

Persekitaran dari titik p adalah $N_r(1) = N_{0,5}(1) \not\subset X$.

Jadi persekitaran dari p ada yang berada diluar himpunan X.

Dengan demikian titik $p = 1$ bukan titik interior.

Bila X suatu ruang topologi dan $A \subset X$, maka $p \in A$ disebut : titik interior dari $A$, jika p elemen suatu open set (himpunan terbuka) G, yang termuat didalam $A$, sedemikian hingga : $p \in G \subset A$.

Contoh 17 :

Diketahui $X = \{a,b,c,d,e\}$.

Topologi pada himpunan X adalah :

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

Tiap-tiap anggota $\mathcal{T}$ dinamakan : open set ( himpunan terbuka ). Himpunan X bersama topologi untuk himpunan X, merupakan ruang topologi, yaitu $(X, \mathcal{T})$.

Ambil : $A = \{a,b,c\}$ suatu subset pada ruang topologi X .

Titik a dan b adalah titik interior dari $A$, sebab :

$$a,b \in \{a,b\} \subset A = \{a,b,c\} .$$

dimana $\{a,b\}$ open set $\in \mathcal{T}$. Sedangkan titik c bukan titik interior, sebab tidak ada open set $\in \mathcal{T}$ yang memuat c, subset dari $A$.

## II.6.2. HIMPUNAN TERBUKA ( OPEN SET ).

Definisi :

Suatu himpunan X disebut : terbuka (open), jika setiap titik dari X adalah titik interior.

Contoh I8 :

Diketahui $X = \{x \mid 3 < x < 4\}$ .

Akan dibuktikan bahwa X adalah himpunan terbuka.

Bukti :


Ambil sembarang titik $y \in X$.

Ditentukan lebih dulu, mana yang lebih kecil antara $d(3,y)$ dan $d(4,y)$.

Jika $d(3,y) = d(4,y)$ , maka ambil $r = 1/2\ d(3,y)$ atau $r = 1/2\ d(4,y)$. Sehingga $N_r\ (y) \subset X$.

Jika $d(3,y) = d(4,y)$, maka ambil yang terkecil, misal yang diambil $d(3,y)$, sehingga $r = 1/2\ d(3,y) = d(\ 3/2\ ,\ y/2\ )$ .

Dengan demikian $N_r\ (y) \subset X$. Jadi y adalah titik interior . Karena y titik sembarang, maka X himpunan terbuka .

Contoh I9 :

Himpunan kosong $\emptyset$ adalah himpunan terbuka (open set) sebab : himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai titik yang bukan titik interior.

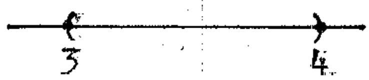
Perlu diperhatikan bahwa : suatu himpunan tidak terbuka jika dan hanya jika ada suatu titik didalam himpunan tersebut yang bukan titik interior.

Contoh 20 :

Diketahui $X = \{ x \mid 3 \leq x \leq 4 \}$.

Himpunan X adalah tidak terbuka. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

Bukti :




Titik $x = 3$ dan $x = 4$ bukan titik interior, sebab : jika - dibuat $N_r$ (3), maka akan memuat titik-titik diluar himpunan X. Dengan kata lain $N_r(3) \not\subset X$.

Demikian pula dengan $N_r(4)$ akan memuat titik-titik diluar X, sehingga $N_r(4) \not\subset X$. Jadi himpunan X tidak terbuka .

II.6.3. TITIK LIMIT ( TITIK AKUMULASI ).

Definisi 1 :

Pandang : X suatu sub-himpunan dari R.

Titik $p \in R$ disebut : titik limit (titik akumulasi) pada himpunan X, bhb tiap persekitaran da ri p memuat titik $q \in X$, yang berlainan dengan titik p.

Definisi 2 :

Pandang : X suatu ruang topologi dan $A \subset X$ .

Suatu titik $p \in X$ disebut : titik limit dari- A, bhb setiap open set G yang memuat p, memuat - pula titik yang berlainan dengan p dalam A .

Jadi G open, $p \in G \Longrightarrow A \cap (G - \{p\}) \neq \emptyset$

Himpunan titik-titik limit dari A, dinotasikan sebagai $A'$ dan disebut : " derived set dari A ".

Contoh 21 :

Pandang : $X = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, .....\}$
$= \{ 1/n \}$ untuk $n = 1, 2, 3, ....$

Buktikan bahwa $x=0$ adalah titik limit dari X.

Bukti :


Ambil : $r > 0$, misal $r = 10^{-1000}$

Akan diselidiki apakah ditemukan titik lain, sebutlah $q = 1/n$ untuk $1/n < r$ .

$1/n < r \Longrightarrow n > 1/r$. Sehingga $n > 1/10^{-1000} = 10^{1000}$ .

Jadi $n > 10^{1000}$, dengan demikian $n = 10^{1000} + 1$. Ternyata dapat ditemukan titik $q = 1/n = 1/(10^{1000} + 1)$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa : persekitaran dari $x = 0$ memuat titik $q \neq 0$, yang berada dalam X, dengan kata lain $x=0$ adalah titik limit dari X. Karena $x=0$ satu-satunya titik limit dari X, maka $A' = \{ 0 \}$ .

Contoh 22 :

Diketahui : $X = \{ x \mid 0 < x < 2 \}$


Titik $x=0$ adalah titik limit dari X, sebab jika dibuat - persekitaran dari $x=0$ akan memuat titik-titik lain yang berada dalam X yang berbeda dengan titik 0. Demikian pula titik $x=2$ adalah titik limit dari X, sebab persekitarannya memuat titik-titik lain yang berada dalam X, yang berbeda dengan titik $x = 2$.

Contoh 23 :

Diketahui : $X = \{a,b,c,d,e\}$

Topologi $\mathfrak{T}$ pada X adalah : $\mathfrak{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{c,a,d\}, \{b,c,d,e\}\}$.

$(X, \mathfrak{T})$ adalah ruang topologi. Ambil : $A = \{a,b,c\}$ suatu sub-himpunan dari ruang topologi X. Titik $b \in X$, merupakan titik limit dari A, hal ini dapat dibuktikan sbb :

Bukti :

Himpunan terbuka yang memuat b adalah : $\{b,c,d,e\}$ dan X $b \in \{b,c,d,e\} \Longrightarrow (\{b,c,d,e\} - \{b\}) = \{c,d,e\} \cap \{a,b,c\} = \{c\} \neq \emptyset$. Jadi himpunan terbuka yang memuat b juga memuat titik lain $\in$ A yang berbeda dengan b. Terbukti bahwa b titik limit dari A. Sedangkan $a \in X$ bukan titik limit dari A, sebab : himpunan terbuka yang memuat a adalah $\{a\}$, tidak memuat titik lain didalam A yang berbeda dengan a, yaitu : $a \in \{a\} \Longrightarrow (\{a\} - \{a\}) \cap A = \emptyset$.

$d \in X$ adalah titik limit dari A, sebab : himpunan terbuka yang memuat d, yaitu $\{c,d\}$ memuat titik lain didalam A yang berbeda dengan d, dapat dituliskan sbb :

$$d \in \{c,d\} \Longrightarrow (\{c,d\} - \{d\}) \cap \{a,b,c\} = \{c\} \neq \emptyset$$

Jadi d titik limit dari A.

$e \in X$ adalah titik limit dari A, sebab : himpunan terbuka yang memuat e, yaitu $\{b,c,d,e\}$ dan X memuat titik lain dalam A, yang berbeda dengan e, dapat dituliskan sbb :

$$e \in \{b,c,d,e\} \Longrightarrow (\{b,c,d,e\} - \{e\}) \cap A = \{b,c\} \neq \emptyset$$

c bukan titik limit dari A,sebab : terdapat himpunan terbuka yang memuat c, yaitu $\{c,d\}$ tidak memuat titik lain dalam A yang berbeda dengan c. Sehingga dapat disimpulakan bahwa : derived set dari A adalah $A' = \{b,d,e\}$.

II.6.4. HIMPUNAN TERTUTUP

Definisi :

Pandang X suatu sub-himpunan dari bilangan real R. Sub-himpunan X dikatakan tertutup, jika setiap titik limit dari X adalah anggota X.

Contoh 24 :

Diketahui : $X = \{1/n\}$ untuk n = 1,2,3,....

Seperti pada contoh sebelumnya, titil 0 telah dibuktikan merupakan titik limit dari X, tetapi $0 \notin X$. Jadi himpunan X tidak tertutup.

Contoh 25 :

Diketahui : $X = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 4\}$

Himpunan X adalah tertutup, sebab semua titik limit dari X berada didalam X.

Disamping definisi diatas, jika komplemen dari himpunan X yaitu : $X^c$ merupakan himpunan terbuka, maka himpunan X dikatakan tertutup.

Contoh 26 :

Himpunan kosong $\emptyset$ adalah tertutup, sebab komplemennya adalah R, dimana himpunan bilangan real R adalah terbuka. Hal ini dapat dibuktikan sbb :

Ambil : suatu titik p elemen dari interval terbuka $S_p$, sehingga : $p \in S_p \subset R$. Jadi R terbuka.

Demikian pula jika X suatu ruang topologi dan $A \subset X$ maka A merupakan himpunan tertutup bhb komplemen dari A yaitu $A^c$ adalah himpunan terbuka.

Contoh 27 :

Diketahui : $X = \{a,b,c,d,e\}$

Topologi pada X adalah : $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$. Tiap-tiap anggota $\mathcal{T}$ merupakan himpunan terbuka, sehingga $\mathcal{T}^c = \{X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$ merupakan himpunan tertutup. Perlu diperhatikan bahwa : X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a\}$, $\emptyset$ adalah subset dari X yang terbuka dan tertutup.

II.6.5. CLOSURE DARI SUATU HIMPUNAN

Pandang : X suatu ruang topologi dan A subset dari X Closure dari A, dinotasikan : $\bar{A}$ yaitu irisan semua subset subset tertutup dalam A.

Karena $\bar{A}$ merupakan irisan dari himpunan-himpunan tertutup maka $\bar{A}$ tertutup. Dengan demikian A tertutup bhb $A = \bar{A}$.

Contoh 28 :

Diketahui : $X = \{a,b,c,d,e\}$

Topologi $\mathcal{T}$ pada X adalah : $\{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ dimana tiap-tiap anggota $\mathcal{T}$ adalah himpunan terbuka dari X. Sehingga subset tertutup dari X adalah :

$\mathcal{T}^c = \{X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$. Jadi dapat dicari closurenya sbb : $\bar{b} = \{b,e\}$ ; $\{a,c\} = X$

Pandanglah : $A$ suatu subset dari ruang topologi X . $A$ disebut : " dense " dalam X atau dense subset dari X , bila dan hanya bila $\bar{A} = X$ .

Contoh 29 :

Seperti yang terlihat pada contoh 28, yaitu $\{\overline{a,c}\} = X$ dan $\{\overline{b,d}\} = \{b,c,d,e\}$ , dimana $X = \{a,b,c,d,e\}$ . Dalam hal ini, himpunan $\{a,c\}$ dense subset dari X. Sedangkan himpunan $\{b,d\}$ bukan merupakan dense subset dari X .

Contoh 30 :

Pandanglah : Q suatu himpunan bilangan rasional . Setiap bilangan real $a \in R$ adalah titik limit dari Q, sehingga closur dari Q adalah : seluruh himpunan bilangan real R, yaitu : $\bar{Q} = R$. Dengan demikian, himpunan bilangan rasional dense dalam R.

II.7. PENGERTIAN : BARISAN, SUB-BARISAN, BARISAN KONVERGEN.

II.7.1. BARISAN ( SEQUENCE ).

Pandang : S sembarang himpunan. Suatu barisan didalam S dinotasikan sebagai : $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ , $(s_n : n \in N)$ adalah suatu fungsi yang domainya $N = \{1,2,3,\ldots\}$ dan rangenya didalam S.

Contoh 31 :

$(s_n) = (1,3,5,\ldots)$ ; $(t_n) = (-1/2 , 1/4 , -1/8 ,\ldots)$

yang dapat dirumuskan sbb :

$(s_n) = 2n - 1$ ; $(t_n) = (-1)^n/2^n$ .

Suatu barisan $(s_n : n \in N)$ dikatakan " terbatas ", jika ra nge dari barisan $\{ s_n : n \in N \}$ adalah himpunan terbatas .

Contoh 32 :

Pada contoh 31, range dari $(s_n)$ adalah $\{1,3,5,\ldots\}$ sehingga $(s_n)$ bukan barisan terbatas. Sedangkan range dari $(t_n)$ adalah $\{-1/2 , 1/4 , -1/8 ,\ldots\}$ adalah terbatas, sehingga barisan $(t_n)$ terbatas.

II.7.2. SUB-BARISAN ( SUBSEQUENCE ).

Pandang : suatu barisan $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$.

Jika $(a_{i_n})$ suatu barisan dari bilangan bulat positip, sedemikian hingga $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ , maka : $(a_{i_1} , a_{i_2} , a_{i_3} , \ldots)$ dinamakan : sub-barisan dari $(a_n)$.

Contoh 33 :

Suatu barisan $(a_n) = ( 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , \ldots )$

Sub-barisan dari $(a_n)$ adalah $( 1 , 1/2 , 1/4 , \ldots )$. Sedangkan $( 1/2 , 1 , 1/4 , 1/3 , 1/6 , 1/5 ,\ldots )$ bukan merupakan sub-barisan dari barisan $(a_n)$, sebab didalam barisan $(a_n)$, 1 terletak didepan 1/2 .

II.7.3. BARISAN KONVERGEN ( CONVERGENT SEQUENCE ).

Definisi :

Suatu barisan $(a_1,a_2,\ldots)$ dari ruang topologi X dikatakan konvergen ke $b \in X$ atau b adalah limit dari barisan $(a_n : n \in N)$, dinotasikan oleh :

$\lim_{n \to \infty} a_n = b$ ; $\lim a_n = b$ atau $a_n \longrightarrow b$

jika dan hanya jika untuk setiap open set G yang memuat b, terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga :

$$\text{untuk } n > n_o \implies a_n \in G .$$

Contoh 34 :

Pandang : $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ suatu barisan titik-titik dalam ruang indiscrete topologi $(X, \mathcal{T})$. Karena didalam ruang indiscrete topologi hanya ada open set X dan $\emptyset$, maka : X satu-satunya open set yang memuat sembarang titik $b \in X$ dan X juga memuat suku-suku dari barisan $(a_n)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa : barisan $(a_n)$ konvergen ke setiap titik $b \in X$, dimana X adalah ruang indiscrete topologi.

Jika barisan $(a_n)$ merupakan barisan bilangan real, maka diberikan definisi sbb :

Definisi :

Suatu barisan $(a_1, a_2, \ldots)$ dari bilangan real, konvergen ke $b \in R$ atau b adalah limit dari barisan $(a_n : n \in N)$, dinotasikan :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b \quad ; \quad \lim a_n = b \quad \text{atau } a_n \longrightarrow b$$

jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga untuk $n > n_o$

$$d(a_n , b) = | a_n - b | < \varepsilon .$$

Contoh 35 :

Pandang : $(a_n)$ suatu barisan dalam R, dimana $(a_n) = 1/n$

Buktikan bahwa barisan tersebut konvergen ke titik 0, yaitu $\lim (1/n) = 0$.

Bukti :

Ambil : $\varepsilon > 0$, maka terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga $1/n_o < \varepsilon$. Untuk $n > n_o \Longrightarrow |x_n - 0| = 1/n \leq 1/n_o < \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sembarang, maka terbuktilah bahwa : $\lim (1/n) = 0$ dengan kata lain $(a_n)$ konvergen ke titik 0.

Contoh 36 :

Pandang : $a > 0$ dan barisan $X = (1/(1 + na))$ dalam $R$

Akan diperlihatkan bahwa : $\lim X = 0$.

Penyelesaian :

Untuk $a > 0$ dan $\forall n \in N$, $0 < 1/(1 + na) < 1/na$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga $1/n_o < a\varepsilon$ atau $1/n_o a < \varepsilon$. Untuk semua $n > n_o$ berlaku : $|1/(1 + na) - 0| = 1/(1 + na) < 1/na \leq 1/n_o a$

Karena $\varepsilon > 0$ sembarang, maka terbuktilah bahwa : $\lim X = 0$ dengan kata lain barisan X konvergen ke titik 0 .

Lemma 2.4 :

Suatu barisan $(x_n)$ konvergen ke suatu titik x di dalam R, maka barisan tersebut terbatas .

Bukti :

Pandang : $x = \lim x_n$ dan $\varepsilon = 1$.

Dari definisi barisan konvergen, maka terdapatlah bilangan bulat positip $n_o$, sedemikian hingga untuk $n > n_o$, berlaku $|x_n - x| \leq 1$. Dengan pertidaksamaan segitiga, untuk $n > n_o$ didapatkan $|x_n - x| \leq 1$ atau $|x| - 1 \leq |x_n| \leq |x| + 1$.

Pandanglah : $M = \sup \{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{k-1}|, |x| + 1 \}$

$- M = \sup \{ |x_1| , |x_2| , \ldots , |x_{k-1}| , |x| - 1 \}$ .

M adalah batas atas dari $x_n$ dan -M batas bawah dari $x_n$ , dengan demikian $-M \leq x_n \leq M$ . Jadi terbukti bahwa : barisan $(x_n)$ terbatas.

II.8. HIMPUNAN KOMPAK.

- Pengertian selimut ( **cover** ).

Pandang : $\mathcal{A} = \{G_i\}$ suatu keluarga dari subset-subset dalam X, sedemikian hingga $A \subset \bigcup_i G_i$ , untuk $A \subset X$.
$\mathcal{A} = \{G_i\}$ dinamakan : " cover " atau selimut dari A. Jika tiap-tiap $G_i$ open, maka $\mathcal{A} = \{G_i\}$ disebut : open cover dari A. Selanjutnya, jika sub-keluarga berhingga dari $\mathcal{A}$ juga merupakan cover ( selimut ), yaitu jika :

$\exists\ G_{i_1} , G_{i_2} , \ldots , G_{i_m}$ , sedemikian hingga :

$A \subset G_{i_1} \cup , \ldots \cup G_{i_m}$ maka : dikatakan memuat suatu finite subcover ( sub-selimut berhingga ).

Definisi :

Pandanglah : A subset dari ruang topologi X .
A dikatakan kompak, jika setiap open cover (selimut terbuka) dari A memuat suatu finite subcover.

Dengan kata lain, jika A kompak dan $A \subset \bigcup_i G_i$ , dimana $G_i$ adalah open set, maka : terdapatlah berhingga banyak open-subset $G_{i_1} , G_{i_2} , \ldots , G_{i_m}$ , sedemikian hingga : $A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$ .

Contoh 36 :

Diketahui : $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ didalam $R$ dengan usual topologi adalah kompak. Hal ini dapat dibuktikan sbb

Bukti :

Ambil : suatu open cover $\{G_\lambda\}$ sembarang untuk $A$, misalnya diambil $\mathcal{A} = \{G_\lambda\} = \{(0, 1/4), (1, 1/2), (1/3, 1/5), \ldots\}$ sedemikian hingga $A = \cup_\lambda G_\lambda$

Titik $0 \in A$, hingga terdapatlah indeks $\lambda_0$ sedemikian hingga $0 \in G_{\lambda_0}$. Karena 0 titik limit dari $A$, maka terdapatlah $r > 0$, sehingga $0 \in (-r, r) \subset G_{\lambda_0}$. Jadi $G_{\lambda_0}$ memuat tak berhingga banyak titik-titik anggota $A$.

Untuk $\{1/n : n \in N\}$, terdapatlah $n_0 \in N$, sedemikian hingga $1/n_0 < r$. Dengan demikian 0 dan $1/n$, untuk $\forall\, n > n_0$, adalah anggota $G_{\lambda_0}$. Ambil satu himpunan yang memuat titik titik ini, yaitu : $G_{\lambda_0}, G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots, G_{\lambda_m}$. Jadi $A \subset G_{\lambda_0} \cup G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$, untuk $0 \leq n \leq m$. Himpunan $\{G_{\lambda_n} : 0 \leq n \leq m\}$ merupakan sub-cover ( sub-selimut ) berhingga yang menyelimuti $A$. Menurut definisi, $A$ kompak .

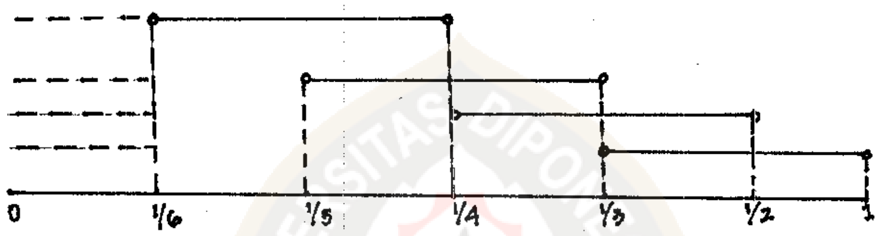
Menurut definisi, himpunan $A$ kompak jika untuk setiap open cover dari $A$, memuat suatu finite sub-cover, sehingga untuk membuktikan $A$ tidak kompak, cukup diperlihatkan adanya satu open cover yang tidak memuat sub-cover berhingga.

Contoh 37 :

Suatu open interval $A = (0, 1)$ pada garis real $R$ dengan usual topologi, adalah tidak kompak.

Bukti :

Ambil : suatu open cover untuk $A$, yaitu : $\mathcal{G} = \{G_n\} = \{(1/3,1), (1/4,1/2), (1/5,1/3), (1/6,1/4), \ldots\}$, sehingga $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, dimana $G_n = (1/(n+2), 1/n)$ yang di ilustrasikan sbb :




Pandang : $\mathcal{G}^* = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots, (a_m,b_m)\}$ adalah suatu sub-keluarga yang berhingga dari .

Jika diambil $\varepsilon = \min(a_1, a_2, \ldots, a_m) \Longrightarrow \varepsilon > 0$ dan $(a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \ldots \cup (a_m,b_m) \subset (\varepsilon, 1)$. Jadi antara titik 0 dan $\varepsilon$, ada titik-titik yang bukan $\in \mathcal{G}^*$, sebab $(0,\varepsilon]$ dengan $(\varepsilon, 1)$ terpisah. Dengan demikian $^*$ bukan sub-cover berhingga dari $A$, terbuktilah $A$ tidak kompak.

Theorema 2.5 :

Pandang : $A = [a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas, $\{G_i\}$ adalah suatu keluarga himpunan terbuka, sedemikian hingga $A \subset \{G_i\}$ maka dapat dipilih suatu himpunan terbuka berhingga, sebutlah $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_m}$, sehingga $A \subset G_{i_1} \cup \ldots\ldots \cup G_{i_m}$ .

Dengan demikian theorema tersebut dapat dinyatakan bahwa :
" Setiap open cover dari suatu interval tertutup dan terbatas $A = [a,b]$ memuat suatu subcover berhingga ".
Theorema diatas disebut : " theorema Heine-Borel ". Jadi berdasarkan theorema ini, setiap interval tertutup dan terbatas $[a,b]$ adalah kompak.

II.8.1. SIFAT INTERSEKSI BERHINGGA ( FINITE INTERSECTION PROPERTY )

Definisi :

Suatu keluarga himpunan-himpunan $\{A_i\}$ dikatakan mempunyai : sifat interseksi berhingga, jika setiap sub-keluarga berhingga $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots\ldots, A_{i_m}\}$ mempunyai interseksi yang tidak kosong, yaitu :

$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$.

Contoh 37 :

Diketahui : suatu keluarga open interval :

$$\mathcal{A} = \{(0,1),(0,1/2),(0,1/3),(0,1/4),\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Buktikan bahwa $\mathcal{A}$ mempunyai sifat interseksi berhingga .

Bukti :

Misal diambil sub-keluarga berhingga dari $\mathcal{A}$ , yaitu $(0,a_1),(0,a_2),\ldots\ldots\ldots,(0,a_m)$ maka interseksi dari himpunan ini adalah : $(0,a_1) \cap (0,a_2) \cap (0,a_3) \cap \ldots\ldots\ldots \cap (0,a_m)$ $= (0,b)$, dimana $b = \min(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_m) > 0$ . Jadi terbuk ti bahwa $\mathcal{A}$ mempunyai sifat interseksi berhingga.

Theorema 2.6 :

Suatu ruang topologi X adalah kompak, jika dan hanya jika setiap keluarga $\{F_i\}$ closed subset dari X, memenuhi sifat interseksi berhingga dengan $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$.

Bukti :

Misal (i). X kompak.

(ii). $\{F_i\}$ closed subset dari X, yang memenuhi sifat interseksi berhingga, ini berarti bahwa : $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, untuk semua $i_1$, $i_2, \ldots\ldots, i_m$ dengan $\bigcap F_i = 0$.

Pernyataan bahwa : $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, untuk semua $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_m$ dengan $\bigcap F_i \neq \emptyset$, mempunyai kontraposisi sebagai berikut : $\bigcap F_i = \emptyset$, terdapatlah $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_m$ sedemikian hingga $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap F_{i_m} = \emptyset$.

Akan dibuktikan : (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

1. X kompak $\Longrightarrow \{F_i\}$ closed subset dari X dengan $\bigcap F_i = \emptyset$ terdapatlah $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_m$ sedemikian hingga $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots\ldots \cap F_{i_m} = \emptyset$.

$\bigcap F_i = \emptyset$, dengan dalil de Morgan's : $X = \emptyset^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup F_i^c$, dengan demikian $\{F_i^c\}$ adalah suatu open cover (se limut terbuka) dari X, sebab tiap-tiap $F_i$ closed.

Diketahui : X kompak, sehingga terdapat $F_{i_1}{}^c, \ldots, F_{i_m}{}^c \in \{F_i{}^c\}$, sedemikian hingga $X = F_{i_1}{}^c \cup \ldots \cup F_{i_m}{}^c$.

Dengan menggunakan dalil de Morgan's diperoleh :

$\emptyset = X^c = (F_{i_1}{}^c \cup \ldots \cup F_{i_m}{}^c)^c = (F_{i_1}{}^c)^c \cap \ldots \cap (F_{i_m}{}^c)^c$

$= F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m}$. Terbuktilah bahwa : $\cap F_i = \emptyset$, terdapatlah $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sedemikian hingga $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m} = \emptyset$

Dengan demikian, jika $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, untuk semua $i_1, i_2, \ldots, i_m$, maka $\cap F_i \neq \emptyset$.

2. (ii) $\Rightarrow$ (i).

Pandang : $\{G_i\}$ suatu open cover dari X, yaitu $X = \cup G_i$.

Dengan menggunakan dalil de Morgan's : $\emptyset = X^c = (\cup G_i)^c$

$= \cap_i G_i{}^c$. Karena tiap-tiap $G_i$ open, maka $\{G_i{}^c\}$ merupakan suatu keluarga himpunan tertutup dan menurut ketentuan diatas, mempunyai interseksi kosong, yaitu : $\cap G_i{}^c = \emptyset$. Sehingga terdapat $G_{i_1}{}^c, \ldots, G_{i_m}{}^c \in \{G_i{}^c\}$ sedemikian hingga :

$G_{i_1}{}^c \cap \ldots \cap G_{i_m}{}^c = \emptyset$.

Dengan dalil de Morgan's : $X = \emptyset^c = (G_{i_1}{}^c \cap \ldots \cap G_{i_m}{}^c)^c$

$= G_{i_1}{}^{cc} \cup \ldots \cup G_{i_m}{}^{cc} = G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_m}$. Jadi $X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$, dengan kata lain : open cover dari X me muat finite sub-cover. Terbukti X kompak.

**Theorema 2.7. :**

Bayangan (image) kontinyus dari himpunan kompak adalah kompak.

**Bukti :**

Akan dibuktikan bahwa : suatu bayangan kontinyu dari himpunan kompak adalah kompak, yaitu : jika fungsi $f : X \longrightarrow Y$ kontinyu dan $A$ suatu kompak subset dari X, maka bayangannya yang dinotasikan $f[A]$ adalah suatu kompak subset dari Y. Pandanglah : $\mathcal{G} = \{G_i\}$ suatu open cover dari $f[A]$, sehingga : $f[A] \subset \bigcup G_i$. Dengan demikian : $A \subset f^{-1}[\ f[A]\ ] \subset f^{-1}[\bigcup G_i] = \bigcup f^{-1}[G_i]$. Sehingga $f^{-1}[G_i] = \mathcal{H}$ adalah suatu cover (selimut) dari $A$. Karena f kontinyu dan tiap-tiap $G_i$ open set, maka menurut suatu theorema, $f^{-1}[G_i]$ juga open. Jadi $\mathcal{H}$ adalah suatu open cover dari $A$. Diketahui $A$ kompak subset dari X, sehingga dengan sendirinya memuat suatu finite sub-cover, misalnya :

$$A \subset f^{-1}[G_{i_1}] \cup \ldots\ldots \cup f^{-1}[G_{i_m}]$$

Sehingga dapat disimpulkan : $f[A] \subset f[f^{-1}[G_{i_1}] \cup \ldots\ldots \cup f^{-1}[G_{i_m}]]$ dengan kata lain $f[A] \subset G_{i_1} \cup \ldots\ldots \cup G_{i_m}$

Terbuktilah bahwa $f[A]$ kompak.

## II.8.2 HIMPUNAN BARISAN KOMPAK ( SEQUENTIALLY COMPACT SETS )

**Definisi :**

Pandanglah : $A$ suatu subset dari ruang topologi X.

A dikatakan : barisan kompak ( sequentially compact ) bhb setiap barisan didalam A memuat suatu sub-barisan yang konvergen ke suatu titik didalam A.

Contoh 38 :

Suatu interval terbuka $A = (0,1)$ pada garis real R dengan usual topologi adalah bukan barisan kompak. Hal ini dapat dibuktikan sbb :

Ambil : suatu sequence ( barisan ) $(s_n) = (1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ didalam A.

Dibuktikan lebih dulu, bahwa $(s_n)$ konvergen ke 0.

$$(s_n) = 1/(n+1) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$$

Ambil suatu $\varepsilon > 0$, terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga $1/(n_o+1) < \varepsilon$. Untuk $n > n_o \Longrightarrow d(s_n, 0) = |1/(n+1) - 0| = 1/(n+1) < 1/(n_o+1) < \varepsilon$. Jadi terbukti $(s_n)$ konvergen ke titik 0. Tetapi titik $0 \notin A$, dengan demikian barisan $(s_n)$ didalam A tidak memuat suatu sub-barisan yang konvergen ke titik 0 dalam A. Terbukti A bukan barisan kompak.

Contoh 39 :

Pandang : A suatu interval tertutup $[0,1]$ pada garis real R dengan usual topologi adalah barisan kompak.

Bukti :

Ambil : suatu barisan $(x_n)$ didalam A, yaitu : $(x_n) = (0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\ldots)$. Barisan ini, konvergen ke 0, dapat dibuktikan sbb :

Ambil $\varepsilon > 0$, terdapatlah $n_o \in N$, sedemikian hingga $1/n_o < \varepsilon$

Untuk $n > n_o \Longrightarrow d(x_n,0) = |1/n - 0| = 1/n < 1/n_o < \varepsilon$.

Terbukti bahwa $(x_n)$ konvergen ke titik 0. Dengan demikian setiap sub-barisan dari $(x_n)$ juga konvergen ke 0, dimana - titik $0 \in A$. Jadi barisan $(x_n)$ didalam A, memuat suatu sub barisan yang konvergen ke suatu titik didalam A. Terbukti bahwa A adalah barisan kompak.

II.8.3 HIMPUNAN KOMPAK TERHITUNG ( COUNTABLY COMPACT SET )

Definisi :

Pandang : A subset dari ruang topologi X.

A dikatakan : kompak terhitung bhb setiap infinite subset dari A mempunyai suatu titik limit didalam A.

Contoh 40 :

Suatu open interval $A = (0,1)$ bukan kompak terhitung dapat dibuktikan sbb :

Ambil : suatu infinite subset dari A, yaitu $B = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$. Himpunan B ini, hanya mempunyai satu titik limit, yaitu titik 0, dimana $0 \notin A$. Jadi infinite subset dari A mempunyai titik limit tidak berada didalam A. Dengan demikian A bukan kompak terhitung.

Contoh 41 :

Suatu interval tertutup $A = [0,1]$ adalah kompak terhitung. Hal ini dapat dibuktikan sbb :

Ambil : suatu infinite subset dari A, misal $B = \{1/2, 1/3,$

$1/4, 1/5, \ldots\}$ maka B mempunyai satu titik limit, yaitu 0 dimana titik 0 berada didalam A. Dengan demikian $A = [0,1]$ adalah kompak terhitung.

Jika A suatu subset dari ruang metrik X, maka pernyataan dibawah ini equivalen :

A kompak $\Longrightarrow$ A kompak terhitung ; A kompak terhitung $\Longrightarrow$ A barisan kompak ; A barisan kompak $\Longrightarrow$ A kompak .

Hal ini dibuktikan secara lengkap pada sub-bab III.4.

Theorema 2.8 :

Pandang : A suatu subset dari ruang metrik - (X,d). Jika A kompak, maka A terbatas.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa : A tarbatas, yaitu ada bilangan positip M, sedemikian hingga $d(x_1, x) \leq M$.

Diketahui : A kompak $\Longrightarrow$ setiap open cover dari A, memuat suatu finite sub-cover.

Untuk semua $x \in A$, dibentuk persekitaran $N_1(x)$, dengan pusat x dan jari-jari 1. Keluarga $\{N_1(x) : x \in A\}$ merupakan open cover dari A. Karena A kompak, maka terdapat $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_m \in A$, sedemikian hingga : $A \subset N_1(x_1) \cup \ldots\ldots \cup N_1(x_m)$

Pandang : $M - 1 = \max \{ d(x_1,x_1), d(x_1,x_2), \ldots\ldots, d(x_1,x_m) \}$

Ambil : sembarang $x \in A$, maka terdapatlah $x_p$ dengan $1 \leq p \leq m$ sehingga $x \in N_1(x_p)$.

Sehingga dengan pertidaksamaan segitiga diperoleh :

$$d(x_1,x) \leq d(x_1,x_p) + d(x_p,x) = M - 1 + 1$$

Jadi $d(x_1,x) \leq M$. Terbukti A terbatas.

Theorema 2.9 :

Pandanglah : X suatu himpunan kompak.

Jika A subset tertutup dari X, maka A kompak

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa : A kompak, yaitu open cover (selimut terbuka) dari A memuat finite subcover .

Pandanglah : $\mathcal{G} = \{ G_i \}$ suatu open cover dari A, sehingga $A \subset \bigcup G_i$. Dengan demikian $X = ( \bigcup G_i ) \cup A^c$, yaitu : $\mathcal{G}^* = \{ G_i \} \cup \{ A^c \}$ adalah cover dari X. Karena $A^c$ open ( diketahui A closed ) maka : $\mathcal{G}^*$ merupakan suatu open cover dari X. Diketahui X kompak, maka $\mathcal{G}^*$ dengan sendirinya memuat suatu finite subcover, misal : $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m}$ sedemikian hingga : $X = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m} \cup A^c$ ; $G_{i_k} \in \mathcal{G}$

A dan $A^c$ terpisah, sehingga : $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$ .

Jadi, open cover dari A memuat finite subcover, dengan kata lain A kompak.

II.9. FUNGSI KONTINYU

II.9.1. Kekontinyusan dalam Ruang Metrik.

Definisi :

Pandang : $(X,d)$ dan $(Y,d^*)$ adalah suatu ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ kontinyus pada $p \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapatlah suatu $\delta > 0$, sedemikian hingga :

$$d(p,x) < \delta \implies d^*( f(p),f(x)) < \varepsilon .$$