BAB II

MATERI DASAR

2.1. SISTIM BILANGAN KOMPLEKS

2.1.1. Bilangan Kompleks

DEFINISI : 2

Suatu bilangan kompleks z adalah suatu pasangan berurutan dari bilangan riil yang ditulis dengan (x,y) atau dengan bentuk x + iy dimana x adalah bagian riil dan y adalah bagian imaginair.

DEFINISI : 3

Dua bilaagan kompleks z_1 dan z_2 sama yaitu :

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ atau $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$

jika dan hanya jika $x_1 = X_2$ dan $y_1 = y_2$

DEFINISI : 4

Penjumlahan dan perkalian antara dua bilangan kompleks :

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$ atau

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+ x_2,y_1+ y_2).$

$z_1 . z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$ atau

$(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$

Maka i.i = (-1,0)

= -1

DEFINISI : 5

Harga mutlak dari bilangan kompleks z = (x,y) atau z = (x + iy) adalah bilangan riil non negatif yaitu

$\sqrt{x2+y2}$ maka dapat ditulis $| z | = \sqrt{x2+y2}$

THEOREMA : 1

Untuk sembarang bilangan kompleks z_1 dan z_2 berlaku

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

Bukti :

Misalkan $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$

Menurut definisi 4 diperoleh :

$$\begin{aligned}
|z_1.z_2|^2 &= |(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)|^2 \\
&= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_2 + y_1^2y_2^2 \\
&\quad + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \\
&= x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
|z_1.z_2|^2 &= |z|^2.|z_2|^2
\end{aligned}$$

jadi :

$$\begin{aligned}
|z_1.z_2| &= \sqrt{|z_1|^2.|z_2|^2} \\
&= |z_1|.|z_2|
\end{aligned}$$

DEFINISI 6

Bilangan kompleks sekawan dari bilangan kompleks $z = x + iy$ dinyatakan dengan $\bar{z}$ yaitu $\bar{z} = x - iy$.

Untuk bilangan riil x dan y dalam bilangan kompleks $z = x + iy$, maka $x = \text{Re}(z)$ dan $y = \text{Im}(z)$ yaitu sebagai komponen riil dan komponen imaginair dari bilangan kompleks z.

THEOREMA : 2

Untuk sembarangan bilangan kompleks z_1 dan z_2 berlaku kitidaksamaan segitiga $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

Bukti :

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$$

$$= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1.z_2)$$

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2|$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

Jadi :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

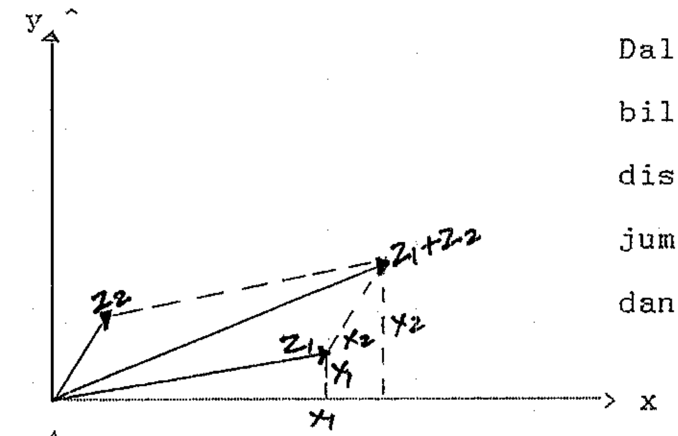
2.2.2.BIDANG KOMLEKS

DEFINISI : 7

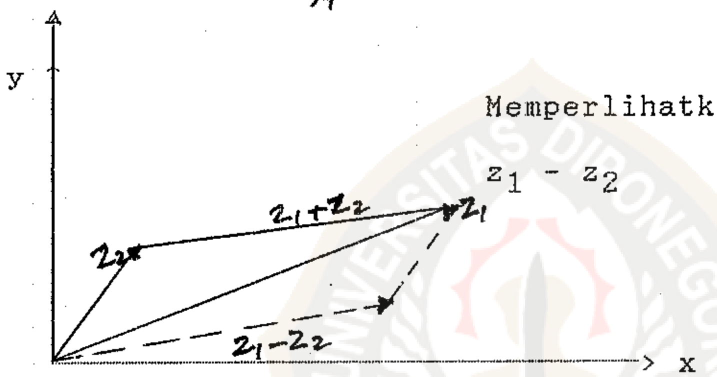
Bilangan kompleks menggunakan bidang xoy dalam menyajikan bilangan kompleks dengan x sebagai sumbu riil dan y sebagai sumbu imaginair.

Dalam hal ini pasangan bilangan riil disajikan sebagai suatu titik dengan koordinat cartesius tegak dalam bidang xoy. Titik pangkal O menyajikan bilangan kompleks z = o , sehingga setiap bilangan kompleks disajikan dengan tepat satu titik, sedangkan setiap titik tepat bersesuaian dengan satu bilangan kompleks. Dengan demikian ada korespondensi satu-satu antara himpunan bilangan-bilangan kompleks dan himpunan titik-titik dibidang xoy.

Kecuali sebagai suatu titik (x,y) bilangan kompleks dapat dipikirkan sebagi suatu vektor, dari titik pangkal O sampai ke titik (x,y) dan juga sebagai vektor yang diperoleh dengan mengadakan penggeseran atau translasi vektor tersebut dalam bidang kompleks.



Dalam gambar diperlihatkan bilangan kompleks z_1+z_2 disajikan sebagai vektor jumlah dari vektor z_1 dan dan vektor z_2.



Memperlihatkan bilangan kompleks $z_1 - z_2$

2.2. KONSEP TOPOLOGI DALAM RUANG METRIK

2.2.1. DEFINISI RUANG METRIK

DEFINISI : 8

Jika X adalah suatu himpunan yang tidak kosong dan d adalah fungsi jarak suatu metrik dari X dimana : fungsi $d = X \times X \longrightarrow R$, dengan sifat untuk sebarang $x, y, z \in X$ berlaku :

a). $d(x,y) \geq 0$

$d(x,y) > 0$ untuk $x \neq y$

$d(x,y) = 0$ untuk $x = y$

b). $d(x,y) = d(y,x)$

c). $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

dimana nilai $d(x,y)$ dinamakan jarak dari x ke y, sehingga pasangan (X,d) disebut ruang metrik.

DEFINISI : 9

Jika (X,d) adalah ruang metrik dan G himpunan bagian dari X merupakan ruang metrik yang terbuka, jika untuk setiap x di dalam G dan $\varepsilon > 0$ sehingga $B(x,\varepsilon) < G$, dimana $B(x,\varepsilon)$ adalah bola terbuka dengan pusat x dan jari-jari ε

CONTOH : 3

a). Jika (R^2,d) adalah suatu ruang metrik, dimana untuk sebarang $x = (x_1,x_2)$ dan $y = (y_1,y_2)$, maka didefinisikan sebagai :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)2+(x_2-y_2)2}$$

b). Ambil $X = ¢$ dan didefinisikan $d(x+iy,a+ib)=|x-a|+|y-b|$, maka $(¢,d)$ adalah sebuah ruang metrik.

2.2.2.HIMPUNAN TERTUTUP DAN TERBUKA

Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik

DEFINISI :10

Untuk sebarang titik $a \in X$ dan setiap $r > 0$, maka berlaku :

a). B [a,r] disebut bola tertutup jika didefinisikan

$B[a,r] = \{b \in X, d(a,b) \leq r\}$

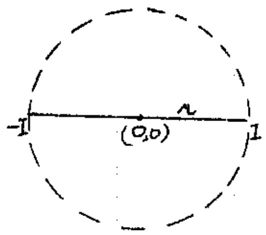
b). B (a,r) disebut bola terbuka jika didefinisikan

$B(a,r) = \{b \in X, d(a,b) < r\}$ dimana a disebut pusat dan r adalah radius.

CONTOH : 4

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ dengan $x = (x_1,x_2)$ dan $y = (y_1,y_2)$ adalah metrik dalam bidang R^2.

Bila $a = (0,0)$ dan $r = 1$ maka $B(a,1)$ adalah cakram satuan yang terbuka .



Bisa ditunjukkan $B(a,r) = \{y \in X, d(a,y) < 1\}$ adalah cakram satuan yang tebuka.

Dimana $a = (0,0)$ dan $y = (y_1, y_2)$

untuk $y = (1,0) \longrightarrow d(a,y) = \sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2}$

$d(a,y) = 1$

karena $d \geq 0$, maka $d(a,y) = r$

untuk $y = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \longrightarrow d(a,y) = \sqrt{(0-\frac{1}{2})^2 + (0+\frac{1}{2})^2}$

$d(a,y) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$d(a,y) = \pm 0,7$

karena $d \geq 0$, maka $d(a,y) = 0,7 < r$

$y = (-1,1) \longrightarrow d(x,y) = \sqrt{(0+1)^2+(0-1)^2}$

$d(x,y) = \pm 1,4$

karena $d \geq 0$, maka $d(a,y) = 1,4 > r$

Dengan memeriksa titik-titik yang lain terlihat bahwa $B(a,r)$ adalah cakram satuan yang terbuka.

DEFINISI : 11

Titik $x \in X$ disebut titik limit himpunan E subset X bila setiap persekitaran dari titik x memuat suatu titik dari E yang berlainan dengan x.

Dimana E adalah himpunan bagian dari ruang metrik (X,d), definisi ini ekuivalen dengan ditunjukkan : titik $x \in X$ disebut titik limit dari E jika untuk setiap $r > 0$ berlaku $B(x,r) \cap E - \{x\} \neq \emptyset$

CONTOH : 5

$E = \{x \in R \mid 0 < x \leq 1\}$, R adalah himpunan bilangan riil

Semua titik di dalam E termasuk titik limit demikian juga titik-titik perbatasannya.

DEFINISI : 12

Jika X suatu ruang metrik dan E^d menyatakan himpunan semua titik limit dari E maka penutup E adalah himpunan $\overline{E} = E \cup E^d$

Jadi $\overline{E}$ dapat didefinisikan sebagai gabungan E dan E^d.

CONTOH : 6

$E = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$

$E^d = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$,

maka $\overline{E} = E \cup E^d = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$

DEFINISI : 13

Titik $x \in E$ disebut titik dalam dari E jika ada bola terbuka dengan pusat x yang terkandung di E .

Atau titik $x \in E$ disebut titik dalam dari E jika $B(x,r) \subset E$ untuk suatu $r > 0$.

CONTOH : 7

Misal (R,d) suatu ruang metrik dengan $d(x,y) = |x-y|$ dan R adalah sistim bilangan riil.

$E = \{x \in R \mid -1 \leq x < 1\}$

Maka $B(0,1) = \{x \in R \mid -1<x<1\}$ adalah bola terbuka dari titik 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (R,d) sehingga titik-titik terdapat pada bola terbuka merupakan titik dalam dari E.

Himpunan semua titik dalam dari E disebut interior dari E dan ditulis dengan notasi E°

DIFINISI : 14

Himpunan E disebut terbuka jika setiap titik dari E adalah titik dalam dari E atau $E = E^{\circ}$

DEFINISI : 15

Himpunan E disebut tertutup jika setiap limit dari E adalah titik dari E atau $E^{d} \subseteq E$.

2.2.3. HIMPUNAN TERHUBUNG

DEFINISI : 16

Dua himpunan A dan B dalam suatu ruang metrik X disebut terpisah jika $\bar{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Dalam definisi ini terlihat dua himpunan yang terpisah pasti saling asing. Tetapi himpuanan yang saling asing belum tentu terpisah.

CONTOH : 8

a). Bila $A = (0,1)$ dan $B = [1,2)$

Maka A dan B saling asing tetapi tidak terpisah.

Keterangan : Penutup A ditulis dengan notasi $\bar{A}$

$\bar{A} = [0,1]$ dan $\bar{B} = [1,2]$

$A \cap B = \emptyset$ berarti dua himpunan A dan B adalah saling asing.

Sedangkan $\bar{A} \cap B = 1$ dan $A \cap \bar{B} = \emptyset$

Sehingga dua himpunan A dan B tidak terpisah meskipun saling asing.

b). Bila $C = (0,1)$ dan $D = (2,3)$

Maka C dan D terpisah pasti saling asing.

Keterangan : Penutup $(\bar{C})=[0,1]$ dan penutup $(\bar{D}) = [2,3]$

$\bar{C} \cap D = \emptyset$ dan $C \cap \bar{D} = \emptyset$ berarti dua himpunan terpisah, $C \cap D = \emptyset$ berarti 2 himpuan saling asing

DEFINISI : 17

Himpunan E dalam ruang metrik X adalah terhubung jika E tidak dapat disajikan sebagai gabungan dua himpunan yang terpisah dan tidak kosong.

Dengan kata lain apabila E disajikan sebagai dua himpunan tidak kosong yang terpisah maka E tidak terhubung.

CONTOH : 9

Bila $A = \{ z \in C; |z| \leq 1 \}$ dan $B = \{z \in C; |z-3| < 1\}$

Maka himpunan A dan B tidak kosong.

Keterangan : Penutup A ditulis dengan notasi $\bar{A}$

$\bar{A} = \{z \in C; |z| \leq 1\}$ dan $\bar{B} = \{z \in C; |z-3| \leq 1\}$

$\bar{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \bar{B} = \emptyset$ berarti himpunan A dan B adalah terpisah sehingga bila $E = A \cup B$ ada maka E tidak terhubung.

2.2.4. BARISAN KONVERGEN

DEFINISI : 18

Suatu barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen ke $x \in X$, ditulis $x_n \longrightarrow x$ atau $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positip N sedemikian hingga untuk semua $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$

CONTOH : 10

Barisan $\{x_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ konvergen ke 1

sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $|x_n - 1|$

$$= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

Untuk $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ atau $n \geq N$ dengan N merupakan bilangan bulat positip yang menjadi bagian bilangan bulat $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ (N bilangan bulat positip terbesar yang memenuhi $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 > N$)

THEOREMA : 3

Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen di ruang metrik, maka barisan $\{x_n\}$ adalah terbatas.

Bukti :

Misalkan $x_n \longrightarrow x$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah bilangan asli N sehingga berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk $n > N$.

Ambil $\varepsilon = 1$, sehingga $d(x_n, x) < 1$

Misal $r = \text{maks}\,\{1, d(x_1,x), d(x_2,x), d(x_3,x), \ldots d(x_n,x)\}$

Maka jelas $d(x_n,x) < r$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$ terbatas.

2.3. FUNGSI PERUBAH KOMPLEKS DAN ANALITIK

2.3.1. FUNGSI-FUNGSI PERUBAH KOMPLEKS

DEFINISI : 19

Suatu fungsi f yang didefinisikan pada daerah G adalah aturan yang mengkawankan setiap $z \in G$ untuk suatu bilangan kompleks $W \in T$ dan $T \subset \mathbb{C}$

$$f : G \longrightarrow T$$

$$z \longrightarrow W = f(z)$$

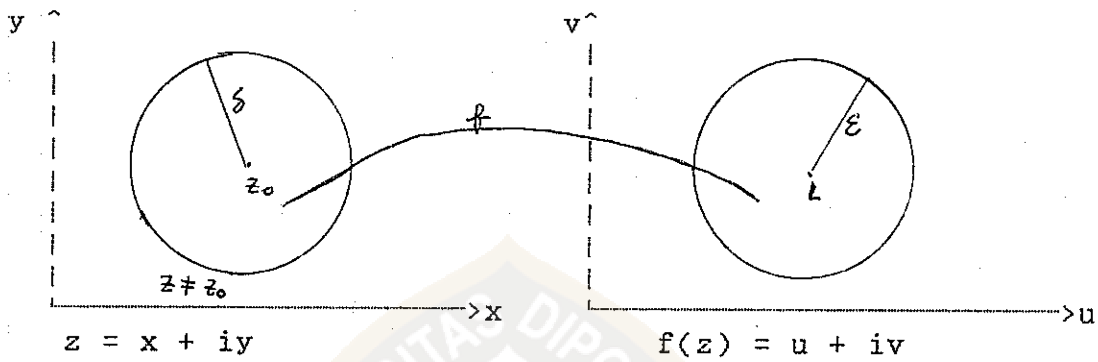
G disebut daerah definisi dari f, sedangkan $f(G) = \{ f(z) | z \in G \}$ disebut daerah hasil (range) dari f. Apabila G (terbuka dan terhubung), maka G disebut domain dari f. Agar suatu fungsi terdefinisi dengan baik maka baik aturan dari f maupun daerah definisinya harus jelas. Jika G sebagai daerah definisi dari f tidak ditentukan, maka G diasumsikan sebagai semua bilangan kompleks yang memberikan harga untuk f.

2.3.2. LIMIT DAN KONTINUITAS

DEFINISI : 20

Bilangan L disebut limit fungsi f(z) untuk z mendekati z_0, dan ditulis $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, apabila pada setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedimikian hingga untuk semua z dimana $0 < |z-z_0| < \delta$ berlaku $|f(z)-L| < \varepsilon$

Jadi untuk harga-harga z disekitar z_o dengan jari-jari δ kecuali di titik z_o itu sendiri, harga f(z) ada di sekitar L dengan jari-jari ε.



CONTOH : 11

$$\lim_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + i} = \lim_{z \to i} \frac{z - i}{(z-i)(z+i)}$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

DEFINISI : 21

Fungsi f dikatakan kontinu di z_o, jika pada setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua z dimana $|z - z_o| < \delta$ berlaku $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$

Jadi jika f kontinu di z_o, haruslah dipenuhi syarat berikut :

1. $f(z_o)$ ada
2. $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada
3. $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Fungsi f dikatakan kontinu pada suatu domain, jika f kontinu di setiap titik dari domain itu.

Untuk dua fungsi yang kontinu maka jumlah hasil kalinya juga kontinu, sedangkan hasil baginya juga kontinu kecuali untuk harga-harga z dimana pembagi menjadi nol.

CONTOH : 12

Buktikan $f(z) = z^2$ kontinu di z_0

Penyelesaian :

1. $f(z) = z^2$

   $f(z_0) = z_0^2$

2. $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$ (ditunjukkan dengan ε dan δ).

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dapat dicari δ (yang bergantung pada ε),sehingga $|f(z)-f(z_0)|=|z^2-z_0^2|<\varepsilon$ bila $0<|z-z_0|<\delta$

jika $\delta \leq 1$ maka $0<|z-z_0|<\delta$ mengakibatkan :

$$\begin{aligned} |z^2-z_0^2| &= |z-z_0||z+z_0| \\ &= |z-z_0||z-z_0+2z_0| \\ &< \delta\ |z-z_0+2z_0| \\ &< \delta\ (1+2|z_0|) \end{aligned}$$

$$|z^2-z_0^2| < \delta\ (1+2|z_0|)$$

padahal $|z^2-z_0^2| < \varepsilon$

maka

$$\varepsilon = \delta\ (1+2|z_0|)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}$$

Ambillah δ sebesar 1 atau $\dfrac{\varepsilon}{1+2|z_0|}$, yang mana saja diantaranya yang lebih kecil.

Maka diperoleh $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ bilamana $0<|z-z_0|<\delta$

Jadi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada juga $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=f(z_0)$

karena semua syarat kontinu telah dipenuhi maka $f(z)=z^2$ kontinu di z_o.

2.2.3. DERIVATIF DARI FUNGSI-FUNGSI PERUBAH KOMPLEKS

DEFINISI : 22

$G \subset \mathbb{C}$ atau G adl himp bagian yg terbuka di $\mathbb{C}$

Jika G (terbuka) di dalam $\mathbb{C}$ (bilangan kompleks) dan $f : G \longrightarrow C$, sehingga fungsi f terdifferensialkan di titik z_o di dalam G jika $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$ ada

DEFINISI : 23

Harga $\lim\limits_{z > z_o} \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$ disebut derivatif dari fungsi f di titik z_o dan diberi notasi $f'(z_o)$

Jadi $f'(z_o) = \lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$

Misal $\Delta z = z - z_o$,

maka $f'(z_o) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_o+\Delta z)-f(z_o)}{\Delta z}$

Dari definisi ini dapat juga dijelaskan : jika f terdifrensialkan pada G maka $f'(z_o)$ didefinisikan suatu fungsi $f' : G \longrightarrow C$ juga jika f' adalah kontinu maka f dikatakan mempunyai differensial kontinu.

THEOREMA : 4

Jika $f : G \longrightarrow C$ adalah terdifferensialkan pada titik z_o di dalam G maka f kontinu pada titik z_o

Bukti :

Misal G (terbuka) di dalam C

Jika f terdifferensialkan pada titik z_o di dalam G yang didefinisikan :

$$\lim_{z \to z_o} |f(z)-f(z_o)| = \lim_{z \to z_o} \frac{|f(z)-f(z_o)|}{|z-z_o|} \cdot \lim_{z \to z_o} |z-z_o|$$

Menurut definisi 22 didapatkan

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} = f'(z_o)$$

$$\lim_{z \to z_o} |f(z)-f(z_o)| = |f'(z_o)| \cdot 0$$

$$\lim_{z \to z_o} |f(z)-f(z_o)| = 0$$

Jadi $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$ yang berarti bahwa fungsi f kontinu di z_o.

Dari hasil theorema 4 maka dapat diperoleh bahwa :

Syarat perlu untuk fungsi f agaar mempunyai derivatif di titik z_o adalah f kontinu di z_o.

Tetapi kontinuitas suatu fungsi tidak menjamin bahwa fungsi itu mempunyai derivatif. Jadi kontinuitas suatu fungsi di suatu titik bukanlah syarat yang cukup untuk adanya derivatif di titik itu.

CONTOH : 13

Tunjukkan bahwa fungsi $g(z)=|z|^2$ kontinu untuk semua harga z tetapi hanya mempunyai derivatif di titik z= 0 saja

Penyelesaian :

Misalkan $g(z)= x^2+y^2$ sehingga $u(x,y)= x^2+y^2$ dan v=0. karena u dan v adalah fungsi dua perubah riil yang kontinu untuk semua (x,y) maka g juga kontinu untuk semua harga z.

$$\text{Selanjutnya } \lim_{z \to 0} \frac{g(z)-g(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 - 0}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{z\,\bar{z}}{z}$$

$$= \lim_{x \to 0} \bar{z}$$

$$= 0$$

Sehingga derivatif di titik $z=0$ ada dan $g'(o)=0$ untuk $z \neq 0$.

$$\frac{\Delta g}{\Delta z} = \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\,\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \frac{z\,\bar{z} + z\,\overline{\Delta z} + \bar{z}\,.\,\Delta z + \Delta z\;\overline{\Delta z} - z\,\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \frac{z\;\overline{\Delta z} + \bar{z}\,.\,\Delta z + \Delta z\;\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\,\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Jika $g'(z)$ ada, maka $\frac{\Delta g}{\Delta z}$ harus mempunyai limit yang tunggal bagaimanapun caranya Δz mendekati nol.

Khusunya jika diambil Δz riil, jadi $\Delta z = \Delta x$ dimana $\overline{\Delta z} = \Delta x$, maka harga limit itu sama dengan $\bar{z} + z$

Misalkan Δz adalah imaginair murni yaitu $\Delta z = i\Delta y$, maka $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$ dan limitnya adalah $\bar{z} - z$

karena $z \neq 0$ maka $\bar{z} + z \neq \bar{z} - z$ sehingga limit tidak ada.

jadi $g(z) = |z|^2$ tidak mempunyai derivatif untuk $z \neq 0$.

2.3.4. DERIVATIF PARSIAL

DEFINISI : 24

Fungsi $u(x,y)$ dikatakan mempunyai derivatif parsial terhadap x apabila $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x}$ ada .

Derivatif parsial dari fungssi $u(x,y)$ terhadap x diberi notasi $\frac{\partial u}{\partial x}$ atau u_x

Jadi $$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x}$$

Hal ini berlaku juga untuk derivatif parsial dari $u(x,y)$ terhadap y dan diberi notasi $\frac{\partial u}{\partial y}$ atau u_y

Demikian juga untuk derivatif pasrsial kedua dari fungsi $u(x,y)$ terhadap x dan diberi notasi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ atau u_{xx} yang dinyatakan :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x(x+\Delta x,y) - u_x(x,y)}{\Delta x}$$

2.3.5. FUNGSI ANALITIK

DEFINSI : 25

Fungsi f dikatakan analitik di titik z_o , apabila terdapat suatu sekitar dari z_o sedemikian hingga derivatifnya ada untuk setiap titik z didalam sekitar itu.

Dari definisi ini dijelaskan daerah sekitar dari titik z_o dengan radius $r > 0$ adalah himpunan titik z dengan sifat $|z-z_o| < r$.

Jadi himpunan $N_r(z\ ) = \{z : |z-z_o| < r\}$

Dengan demikian jika f differensiabel di suatu titik, maka belum tentu f analitik di titik tersebut. Jika G suatu domain dan f defferensiabel pada G maka f analitik pada G. Kecuali istilah " analitik " kadang-kadang juga dipakai istilah " regular " dan " holomorphic ". Untuk istilah holomorphic akan dipakai simbol H dalam menunjukkan ke " analitik ".

Jika H(G)adalah kumpulan dari fungsi-fungsi analitik pada G kita pakai H(G) untuk menunjukkan fungsi-fungsi analitik pada G adalah lebih baik daripada A(G) menunjukkan kumpulan dari fungsi-fungsi kontinu.

DEFINISI : 26

Suatu fungsi $f:G \longrightarrow C$ adalah analitik jika f terdifferensialkan kontinu pada G.

Dari definisi ini ditunjukkan: dua fungsi f dan G yang analitik pada G dan G_1 akan berlaku :

$$\left.\begin{array}{l} f(z) + g(z) \\ f(z) - g(z) \\ f(z) \,.\, g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)} \quad \text{dimana } g(z) \neq 0 \\ f[g(z)] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{masing-masing analitik} \\ \\ \text{pada } z_o \end{array}$$

Maka derivatifnya juga analitik pada z_o.

Karena fungsi tersebut terdifferensialkan di titik z_o maka masing-masing juga kontinu di z_o.

THEOREMA : 5

Fungsi f dan g adalah analitik pada G dan Ω.

andaikan $f(G) \subset \Omega$ sehingga gof adalah analitik pada G dan $(gof)'(z) = g'[f(z)]\, f'(z)$ untuk $\forall z \in G$.

Bukti :

Dengan mengambil $f(z) \neq f(z_o)$ untuk $0 < |z-z_o| < r$

Jika $0 < |h| < r$ sehingga $f(z_o+h) \neq f(z_o)$ dan$(gof)'(z)$

$$\text{untuk } (gof)'(z) = \lim_{h \to o} \frac{[gof](z_o+h) - gof(z_o)}{h}$$

(sesuai definisi 23).

$$\lim_{h \to o} \frac{[gof](z_o+h) - gof(z_o)}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{g[f(z_o+h)] - g[f(z_o)]}{h} \cdot \frac{f(z_o+h) - f(z_o)}{f(z_o+h) - f(z_o)}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{g[f(z_o+h)] - g[f(z_o)]}{f(z_o+h) - f(z_o)} \cdot \lim_{h \to o} \frac{f(z_o+h) - f(z_o)}{h}$$

sesuai dengan definisi 23 maka akan diperoleh :

$$\lim_{h \to o} \frac{[gof](z_o+h) - [gof](z_o)}{h} = g^1\,[f(z)\,].\; f^1\,(z)$$

Jadi : $(gof)^1\,(z) = g^1\,[f(z)]\,.\,f^1\,(z)$

CONTOH : 14

Memperlihatkan bahwa fungsi $f(z) = \bar{z}$ tidak analitik dimanapun.

Penyelesaian :

Menurut definisi 23 didapatkan :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\overline{z+\Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Jika $f'(z)$ ada, maka $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ harus mempunyai limit yang tunggal bagaimanapun caranya Δz mendekati nol.

Jika diambil lintasan pada sumbu riil x maka $\Delta z = \Delta x$,

atau Δz riil

$\overline{\Delta z} = \Delta x$ untuk $\Delta y = 0$

Sehingga

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 1$$

atau Δz [illegible]

Jika diambil lintasan sumbu imaginair murni atau sumbu y maka $\Delta z = i \Delta y$ dan $\overline{\Delta z} = - i \Delta y$ untuk $\Delta x = 0$, sehingga diperoleh :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{- i \Delta y}{i \Delta y}$$

$$= -1$$

Karena harga kedua limit tidak sama atau tidak terdapat limit yang tunggal maka $f'(z)$ tidak ada.

Jadi terbukti $f(z) = \bar{z}$ tidak mempunyai derivatif di titik manapun, berarti tidak analitik dimanapun.

2.4. FUNGSI HARMONIK

THEOREMA : 6

Jika fungsi $f : G \to C$ adalah analitik dimana $f(z) = u(z)+iv(z)$ dengan u dan v adalah nilai fungsi riil yang didefinisikan pada daerah G, maka terdapat derivatif parsiil kontinu u dan v yang memenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Bukti :

Misalkan diketahui fungsi f mempunyai derivatif di titik $z_0 = x_0 + iy_0$ jika fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Maka $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$

$\Delta v = v(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$

Misalkan $f'(z_0) = a + ib$

$$\text{Jadi } \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib$$

Dengan demikian maka :

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} R\left\{\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}\right\} = a \text{ dan}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} I\left\{\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}\right\} = b$$

Jika diambil $\Delta y = 0$ dan $\Delta z = \Delta x$, maka kedua limit ini menjadi limit fungsi dari satu perubah riil Δx, untuk $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_o + \Delta x, y_o) - u(x_o, y_o)}{\Delta x} = a$$

(harga $\frac{\partial u}{\partial x}$ di titik $(x_o, y_o) = a$).

dan

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{v(x_o + \Delta x, y_o) - v(x_o, y_o)}{\Delta x} = b$$

(harga $\frac{\partial v}{\partial x}$ di titik (x_o, y_o) adalah b)

Berarti bahwa $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial x}$ ada di (x_o, y_o) dan harganya berturut-turut a dan b.

Jadi diperoleh : $u_x(x_o, y_o) = a$ dan $v_x(x_o, y_o) = b$ ....(1)

Demikian juga jika diambil $\Delta x = 0$ dan $\Delta z = i \; \Delta y$ sehingga diperoleh :

$$\lim_{\Delta y \to o} \frac{v(x_o, y_o + \Delta y) - v(x_o, y_o)}{\Delta y} = a \quad \text{dan}$$

$$\lim_{\Delta y \to o} \frac{u(x_o, y_o + \Delta y) - u(x_o, y_o)}{-\Delta y} = b$$

Sehingga derivatif-derivatif parsiil dari u dan v terhadap y ada di titik (x_o, y_o) dan

$v_y(x_o, y_o) = -b$ ..dan...$V_y.(x_o,.y_o.) = a$....................(2)

Dari persamaan differensial (1) dan (2) dapat diambil kesimpulan : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ berlaku di titik (x_o, y_o).

Dengan demikian suatu fungsi f pada daerah G analitik jika Re f = u dan Im f = v adalah fungsi harmonik yang memenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{sehingga} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$ berlaku untuk semua titik pada daerah G.

DEFINISI : 27

Fungsi u : G–>R adalah harmonik jika u mempunyai derivatif parsiil kedua yang kontinu dan yang memenuhi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ dinamakan persamaan differensial Laplace.

Dalam definisi ini G adalah daerah definisi u dimana G(terbuka) di dalam $\mathbb{C}$ (bidang kompleks) dan R adalah riil yang merupakan daerah hasil dari u.

THEOREMA : 7

Jika u : G —> R adalah fungsi harmonik dan v :G—>R adalah fungsi harmonik maka f = u +iv adalah analitik pada G.

Bukti :

bukti dibalik

Menurut hasil dari theorema 6 diperoleh : suatu fungsi f yang analitik pada daerah G jika u = Re{f} dan v = Im{f} adalah fungsi harmonik. Sedangkan U : G–>R ditentukan oleh $U(x,y) = \text{Log}|f(x+iy)| = \text{Log}[u(x,y)^2 + iv(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}$ maka U adalah harmonik. Demikian pula untuk V adalah fungsi harmonik pada G, sehingga g : U + iV adalah analitik pada daerah G.

Misal $h(z) = \exp g(z)$ dimana $h(z)$ adalah analitik dan

$$\left| \frac{f(z)}{h(z)} \right| = 1 \text{ untuk setiap } z \in G$$

Misal $\dfrac{f(z)}{h(z)} = C$

$$f(z) = C\ h(z)$$
$$= C \exp g(z)$$
$$= \exp [g(z) + C_1]$$
$$\log f(z) = \log \exp [g(z) + C_1]$$
$$\log f(z) = g(z) + C_1$$

Karena $U = \log f(z)$ harmonik maka $\log f(z)$ adalah harmonik dan U adalah fungsi harmonik.

DEFINISI : 28

Jika $f : G \longrightarrow C$ a dalah fungsi analitik maka $u = \mathrm{Re}\ f$ dan $v = \mathrm{Im}\ f$ disebut fungsi harmonik sekawan (konjugate) .

CONTOH : 15

Buktikan bahwa fungsi u adalah fungsi harmonik dalam suatu domain dan tentukan fungsi harmonik sekawannya u jika $u = 2x\ (1-y)$.

Penyelesaian :

$$u = 2x\ (1-y)$$
$$u = 2x - 2xy$$
$$u_x = 2 - 2y\ ,\ u_y = -2x$$
$$u_{xx} = 0\ ,\ u_{yy} = 0$$

Jadi : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Sehingga u merupakan fungsi harmonik.

Syarat-syarat Cauchy-Reamann $u_x = v_y$ dan $u_y = - v_x$

$$u_x = 2 - 2y = v_y \longrightarrow v = \int (2 - 2y)\, dy$$

$$v = 2y - y^2 + g(x)$$

$$u_y = -2x = - v_x$$

$$v_x = 2x = g\,(x) \longrightarrow g(x) = \int 2x\, dx$$

$$= x^2 + c$$

Jadi $v = 2y - y^2 + g(x)$

$= 2y-y^2 + x^2 + c$ dimana c = konstanta komplex

$$f = v + iv$$

$$= 2x - 2xy + i(\,2y - y^2 + x^2) + ic$$

Untuk $y = 0$ maka

$$f = 2z + iz^2 + iC$$

2.5. TRANSFORMASI MOBIUS

DEFINISI : 29

Suatu fungsi f yang didefinikan pada $D \subset W$ adalah aturan yang mengkawankan $\forall z \in D$ dengan suatu bilangan kompleks $W = f(z)$ yang didefinisikan dengan

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$ disebut transformasi mobius, jika bilangan-bilangan kompleks a,b,c dan d memenuhi sifat $ad - bc \neq 0$

Karena $W = \dfrac{az + b}{cz + d}$ akan equivalen dengan $cwz - az + dw - b=0$

Maka $W = f(z)$ disebut juga dengan transformasi bilinier.

DEFINISI : 30

Jika transformasi mobius f mempunyai sifat :

$f : C_\infty \longrightarrow C_\infty$

$z \longrightarrow f(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ untuk $z_2, z_3, z_4 \in C$

dimana titik z_2 dipetakan ke 1, titik z_3 dipetakan ke 0 dan titik z_4 dipetakan ke ∞ dan dapat ditulis :

$f(z_2) = (z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$

$f(z_3) = (z_3, z_2, z_3, z_4) = 0$

$f(z_4) = (z_4, z_2, z_3, z_4) = \infty$

Definisi ini akan aquivalen dengan : jika g suatu transformasi mobius dan w_2, w_3, w_4 adalah titik sedemikian hingga $g(w_2) = 1$, $g(w_3) = 0$, $g(w_4) = \infty$ maka $g(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$.

Dalam transformasi mobius ini fungsi f mempunyai sifat pemetaan adalah aturan yang mengkawankan $\forall z \in C_\infty$ dengan suatu bilangan kompleks $f(z) \in C_\infty$.

Disini $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ dimana C adalah bilangan kompleks dan C_∞ adalah perluasan bidang kompleks.

THEOREMA : 8

Jika z_2, z_3, z_4 adalah titik-titik tertentu yang berlaianan dan f sebarang transformasi mobius maka berlaku : $(z_1, z_2, z_3, z_4) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ untuk sebarang z_1.

Bukti :

Misalkan $g(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ suatu transformasi mobius

Jika $h = gof^{-1}$ maka $h\,[f(z_2)] = gof^{-1}[f(z_2)]$

$= g(z_2)$

$h\,[f(z_2)] = 1$

Untuk $h\,[f\,(z_3\,]\ = gof^{-1}[f(z_3)]$

$= g(z_3)$

$= 0$

Untuk $h\,[f(z_4)] = gof^{-1}[f(z_4)]$

$= g(z_4)$

$= \infty$

Jadi $(gof^{-1})(z) = [z, f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ untuk $\forall z \in C_\infty$

Jika kita substitusikan $z = f(z_1)$ maka theorema ini akan terbukti.

THEOREMA : 9

Suatu transformasi mobius selalumemetakan lingkaran menjadi lingkaran lagi.

Bukti :

Misalkan T adalah suatu lingkaran di bidang kompleks dengan pusat z_0 dan jari-jari ρ

$T : |z - z_0| = \rho$

$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \rho^2$

$z\,\bar{z} - \bar{z}_0\,z - z_0\,\bar{z} + z_0\,\bar{z}_0 = \rho^2$

Jika $B = -z_o$ dan $\bar{B} = -\bar{z}_o$ maka persamaannya menjadi :

$$T : z\,\bar{z} + \bar{B}\,z + B\,\bar{z} + B\,\bar{B} = \rho^2$$

$$|z|^2 + \bar{B}\,z + B\,\bar{z} + |B|^2 = \rho^2 \text{ atau } |z + B| = \rho$$

$$|z|^2 + \bar{B}\,z + B\,\bar{z} + |B|^2 - \rho^2 = 0$$

Substitusi $C = |B|^2 - \rho^2$

$$\rho^2 = |B|^2 - C$$

$\rho = \sqrt{|B|^2 - C}$ merupakan jari-jari lingkaran dari $|z + B| = \rho$

Maka akan didapat persamaan lingkaran

$= |z|^2 + \bar{B}\,z + B\,\bar{z} + C = 0$ dengan pusat $B = -z_o$ dan

jari-jari $\rho = \sqrt{|B|^2 - C}$

Misalkan z_2, z_3, z_4 adalah 3 titik yang berlainan pada persamaan lingkaran $T : z\,\bar{z} + \bar{B}\,z + B\,\bar{z} + C = 0$ dan ambil $w_j = f(z_j)$ untuk $j = 2, 3, 4$

maka w_2, w_3, w_4 menentukan suatu lingkaran

$T' : w\,\bar{w} + \bar{B}\,w + B\,\bar{w} + C = 0$ untuk sebarang $z \in C$.

Menurut theorema berlaku$(z_1, z_2, z_3, z_4) = [f(z), w_2, w_3, w_4]$

Dengan theorema ini, jika $z \in T$ maka kedua ruas persamaan tersebut adalah riil yaitu $f(z) \in T^1$

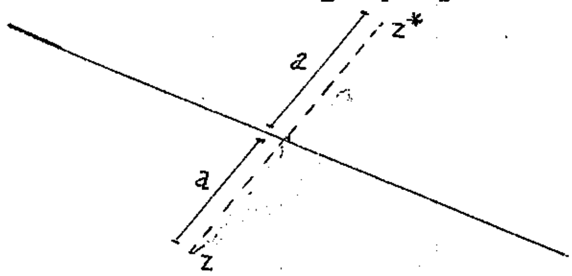
Jadi $f(T) = T^1$

SIMETRI

DIFINISI : 31

Jika T suatu lingkarang yang melalui titik z_2, z_3, z_4 sedangkan titik z dan z^* didalam C_∞ dikatakan simetri terhadap T, jika $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$ dimana (z^*, z_2, z_3, z_4) sekawan dengan $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$.

Dalam hal ini tidak hanya tergantung pada lingkaran tetapi juga pada titik-titik z_2, z_3, z_4



Titik z dan z^* adalah simetri terhadap T jika garis yang menghubungkan z dan z^* adalah tegak lurus terhadap T.

Disini z dan z^* mempunyai jarak yang sama dari T dan berlainan arah.

THEOREMA : 1Ø

JIka T : $\{ z : |z - a| = R\}$ dimana $0 < R < \infty$ dan ambil titik-titik z_2, z_3, z_4 pada T maka akan mendapatkan $(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$

Bukti:

Dengan memggunakan definisi 31 dan theorema 8, maka untuk bilangan transformasi mobius diberikan :

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \text{ sesuai definisi 31}$$

$$= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \text{ karena T: } \{z : |z-a| = R|$$

$$= \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a} \right)$$

$$= \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}}{R^2}, \frac{1}{z_2 - a}, \frac{1}{z_3 - a}, \frac{1}{z_4 - a} \right)$$

$$= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a \right)$$

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_2, z_3, z_4 \right)$$

Dengan demikian $z^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$

$$(z^* - a) = \frac{R^2}{(\bar{z}-\bar{a})}$$

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

THEOREMA : 11

Jika transformasi mobius T memetakkan lingkaran T_1 ke lingkaran T_2 sehingga sebarang pasangan titik-titik akan simetri terhadap lingkaran T_2 hasil transformasi.

Bukti :

Misalkan $z_2, z_3, z_4 \in T_1$

Jika z dan z^* adalah simetri terhadap T_1 maka

$(Tz^*, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z^*, z_2, z_3, z_4)$

Menurut definisi 3.1 diperoleh (z^*, z_2, z_3, z_4)

$= (\overline{z, z_2, z_3, z_4})$ artinya sekawan sehingga,

$(Tz^*, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z^*, z_2, z_3, z_4)$

$= (\overline{z, z_2, z_3, z_4})$

Sedangkan $(Tz^*, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (\overline{Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4})$

Dengan demikian Tz^* dan Tz adalah simetri terhadap T_2

CONTOH : 16

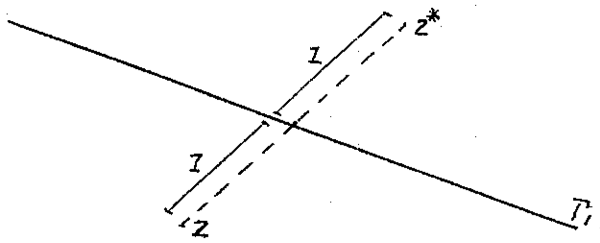
Bila diberikan 2 lingkaran $T_1 : |z| = 1$ dan $T_2 : |w| = 1$, maka akan dicari transformasi mobius yang memetakan T_1 ke T_2.

PENYELESAIAN :

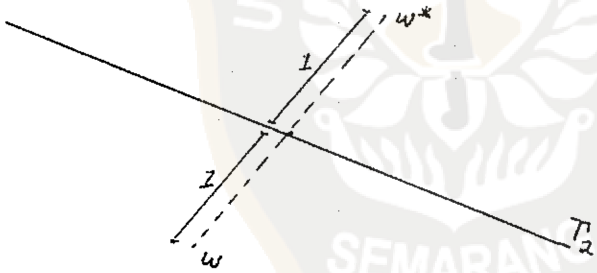
Syarat perlu (===>)

Misalkan $z = a_k \notin T_1$ sedemikian hingga $|a_k| \neq 1$ dipetakan ke $w = 0$. Syarat z dan z^* simetri terhadap T_1 jika garis yang menghubungkan z dan z^* adalah tegak lurus terhadap T_1

jika jarak z terhadap T_1 adalah 1, maka jarak z^* terhadap T_1 juga sama yaitu 1 tetapi arahnya berlainan sehingga $z \cdot z^* = 1 \cdot 1 = 1$



Dari $z \cdot z^* = 1$ maka titik simetri dari $z = a_k$ adalah $z^* = \dfrac{1}{\bar{a}_k}$ sedangkan syarat titik w dan w^* simetri terhadap T_2 jika garis yang menghubungkan w dan w^* adalah tegak lurus terhadap T_2. Misalkan jarak w terhadap T_2 adalah 1 dan jarak w^* terhadap T_2 juga 1 sehingga $w \cdot w^* = 1$



Maka titik simetri dari w = 0 adalah $w^* = \dfrac{1}{0}$

$$w^* = \infty$$

Dengan demikian maka titik $z^* = \dfrac{1}{\bar{a}_k}$ akan dipetakan ke $w^* = \infty$

Misalkan titik $z = \gamma \in T_1$ dipetakan ke $w = r \in T_2$ maka titik-titik $(z, \gamma, a_k, \dfrac{1}{\bar{a}_k})$ dipetakan ke titik $(w, 1, 0, \infty)$

Menurut definisi [illegible] maka ditentukan transformasi $f : T_1 \longrightarrow T_2$ oleh :

$$f(z) = \frac{z-z_3}{z-z_4} \Bigg/ \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

$$\frac{w}{1} = \frac{z-z_3}{z-z_4} \cdot \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

$$w = \frac{z-a_k}{z-\frac{1}{\bar{a}_k}} \cdot \frac{\gamma - \frac{1}{\bar{a}_k}}{\gamma - a_k}$$

$$= \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \cdot \frac{\bar{a}_k\gamma-1}{\gamma-a_k}$$

$$= \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \cdot \beta \text{ dimana } \beta = \frac{\bar{a}_k\gamma-1}{\gamma-a_k}$$

$$w = \beta \cdot \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \quad \text{dengan } |a_k| < 1$$

Selanjutnya karena $|z| = 1$ dipetakan ke $|w| = 1$ maka :

$$|w| = \left| \beta \cdot \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \right|$$

$$= |\beta| \cdot \left| \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \right|$$

$$= |\beta| \cdot 1$$

$$|w| = |\beta|$$

$$w = \beta = 1$$

Jadi dengan memngambil $\beta = 1$ diperoleh syarat perlu yaitu transformasi mobius yang memetakan daerah T_1 : $|z| = 1$ ke daerah T_2 : $|w| = 1$ adalah :

$$w = f(z) = \beta \cdot \left| \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \right| \text{dengan harga } |a_k|<1 \text{ dan} |\beta| = 1$$

Syarat cukup (<===)

Syarat titik w dan w^* simetri terhadap T_2 adalah $w.w^* = 1^2$

atau $|w|^2 = 1$

$$|w|^2 = 1$$

$$|w|^2 - 1 = w\,\bar{w} - 1$$

$$= \beta \cdot \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \cdot \bar{\beta} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}_k}{a_k \bar{z}-1} - 1$$

$$= \beta\bar{\beta} \cdot \frac{z-a_k}{\bar{a}_k z-1} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}_k}{a_k \bar{z}-1} - 1$$

$$= |\beta|^2 \frac{z\,\bar{z} - \bar{a}_k z - a_k\,\bar{z} + a_k \cdot \bar{a}_k}{|\,\bar{a}_k\,z - 1|^2}$$

$$= \frac{(z\,\bar{z}-\bar{a}_k\,z-a_k\,\bar{z}+a_k.\bar{a}_k\,)-(a_k\,\bar{a}_k\,z\,\bar{z}\,-\bar{a}_k\,z-a_k\,\bar{z}+1)}{|\,\bar{a}_k\,z - 1\,|^2}$$

$$= \frac{z\,\bar{z} + a_k \cdot \bar{a}_k - a_k \cdot \bar{a}_k\,z\,\bar{z} - 1}{|\,\bar{a}_k\,z - 1\,|^2}$$

$$= \frac{|z|^2 + |a_k|^2 - |a_k|^2\,|z|^2 - 1}{|\,\bar{a}_k\,z - 1\,|^2}$$

$$|w|^2 - 1 = \frac{(\,1-|a_k|^2\,)(|z|^2-1)}{|\,\bar{a}_k\,z - 1\,|^2}$$

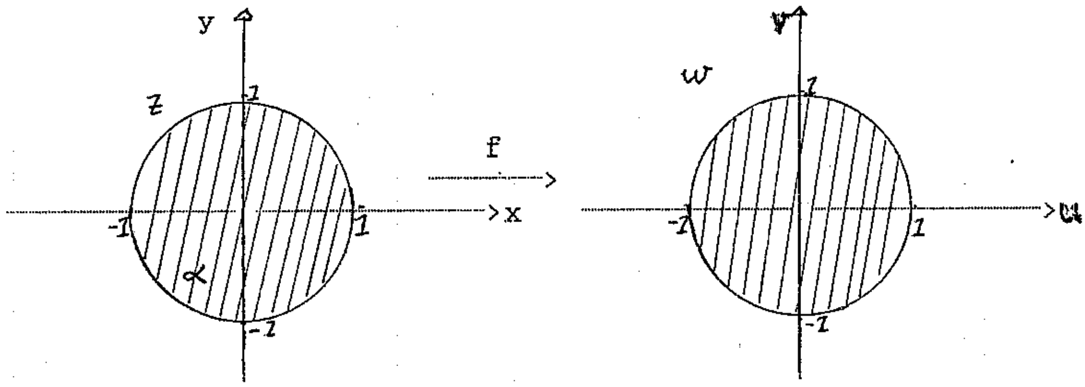
Karena $|a_k| \neq 1$ maka dari persamaan tersebut tampak :

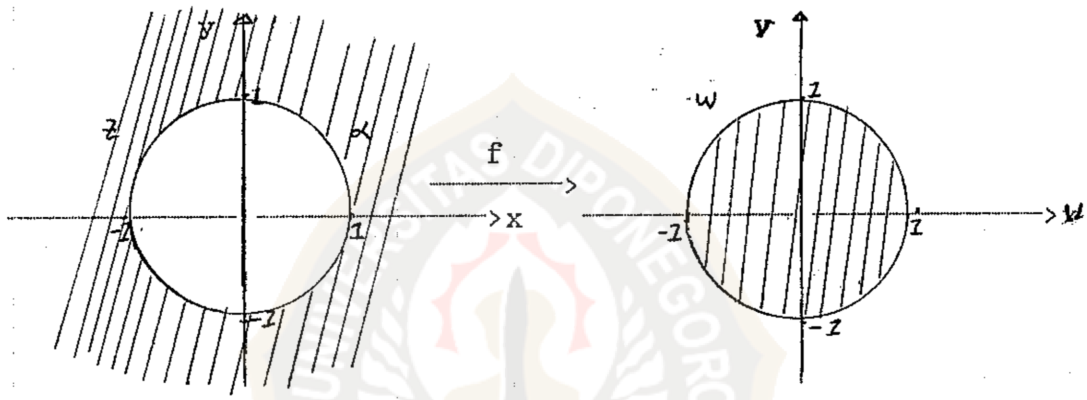
$$|w| = 1 \iff |z| = 1$$

Sedangkan f akan memetakan :

$|z| > 1 \longrightarrow |w| < 1$ jika $|a_k| > 1$

$|z| < 1 \longrightarrow |w| < 1$ jika $|a_k| < 1$


y
z
1
-1
1
α
-1
x
f
w
1
-1
1
-1
u


y
z
1
α
f
-1
1
-1
x
y
w
1
-1
1
-1
u

2 . 6 INTEGRAL KOMPLEKS

2.6.1 THEOREMA CAUCHY GOURSAT

THEOREMA : 12

Jika fungsi f analitik dan f^1 kontinu di dalam dan pada kontur tertutup C maka $\oint_C f(z)\,dz = 0$

Bukti :

Jika R daerah tertutup yaitu daerah yang terdiri dari semua titik dalam dari C dan titik-titik pada C .

Karena fungsi f analitik dimana $f(z)= u(x,y)+iv(x,y)$, maka pada daerah R, u dan v kontinu yang memenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Menurut hasil dari theorema 6 didapatkan hasil derivatif dari f yaitu

$f^1(z) = u_x(x,y)+iv_x(x,y) = v_y(x,y)-iu_y(x,y)$ kontinu pada R maka derivatif-derivatif parsiil

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y$$

kontinu juga pada R .

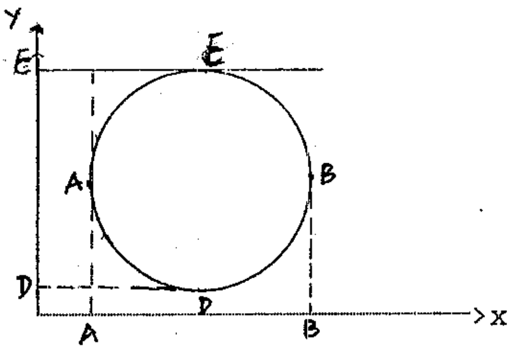
Integral kompleks dari fungsi f(z) yaitu

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx-vdy)+i\int_C (vdx+udy)$$

$$= \int u(x,y)dx-v(x,y)dy$$

$$+i\int v(x,y)dx+u(x,y)dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$



Persamaan kurva tertutup C dapat disajikan

$y = h_1(x)$ $\quad (a \leq x \leq b)$ untuk busur bawah ADB

$y = h_2(x)$ $\quad (a \leq x \leq b)$ untuk busur atas AEB atau

atau

$x = q_1(y)$ $\quad (c \leq y \leq d)$ untuk busur kiri DAE

$x = q_2(y)$ $\quad (c \leq y \leq d)$ untuk busur kanan DBE

Jika fungsi u (x,y) dan v (x,y) beserta derivatif parsiil pertama kontinu di seluruh daerah tertutup R yang dibatasi oleh kontur tertutup C maka dapat dibuktikan

$$\int_C u\, dx = - \iint_R \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$-\iint_R \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy = - \int_a^b \int_{y=h_1x}^{h_2x} \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= - \int_a^b \left[u(x,y) \right]_{h_1(x)}^{h_2(x)} dx$$

$$= - \int_a^b u(x,h_2(x))\, dx + \int_a^b u(x,h_1(x))\, dx$$

$$= - \int_{AEB} u(x,y)\, dx + \int_{ADB} u(x,y)\, dx = \int_C u(x,y)\, dx$$

$$\int_C v\, dy = \iint_R \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy$$

Bukti dibalik :

$$\iint_R \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \int_{q_1(y)}^{q_2(y)} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy$$

$$= \int_c^d \left[V(x,y)\right]_{q_1(y)}^{q_2(y)} dy$$

$$= \int_c^d V(q_2(y),y)\, dy - \int_c^d V(q_1(y),y) dy$$

$$= \int_{DBE} V(x,y)\, dy - \int_{DAE} V(x,y)\, dy$$

$$= \int_C V(x,y)\, dy$$

$$\iint_R \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C V\, dy$$

$$-\iint_R \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\, dx = -\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= -\int_a^b \left[\, V(x,y)\, \right]_{h_1(x)}^{h_2(x)} dx$$

$$= -\int_a^b V(x,h_2(x))\, dx + \int_a^b V(x,h_1(x))\, dx$$

$$= -\int_{AEB} V(x,y)\, dx + \int_{ADB} V(x,y)\, dx$$

$$= \int_C V(x,y)\, dx$$

$$= \int_C V\, dx$$

$$\iint_R \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \int_{q_1(y)}^{q_2(y)} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy$$

$$= \int_c^d [u(x,y)]_{q_1(y)}^{q_2(y)}\, dy$$

$$= \int_c^d u\{q_2(y),y\}\, dy - \int_c^d u\{q_1(y),y\}\, dy$$

$$= \int_{DBE} u(x,y)\, dy - \int_{DBE} u(x,y)\, dy$$

$$= \int_C u(x,y)\, dy = \int_C u\, dy$$

Dari persamaan (1) didapatkan

$$\int_c f(z)\, dz = \int_C [u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy] + i\int_C [v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy]$$

$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Karena integral rangkap memenuhi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

maka $\int_C f(z)\, dz = 0$

THEOREMA : 13

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, maka :

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Bukti :

Diberikan untuk ε positif dan misalkan $C_j(j=1,2,\ldots,n)$ adalah perbatasan dari bujursangkar-bujursangkar atau bagian bujursangkar dimana daerah R dapat dibagi menjadi n bujursangkarr sehingga terdapat titik-titik z_j di dalam atau pada c_j dan berlaku ketidaksamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk lain yaitu masing-masing dari fungsi :

$$S_j(z) = \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j) \text{ untuk } j = 1,2,3,\ldots, n$$

Memenuhi ketidaksamaan $|S_j(z)| < \varepsilon$

Karena masing-masing fungsi $S_j(z)$ adalah kontinu, dan khususnya jika z mendekati z_j limitnya sama dengan nol dan akan kita difinisikan $S_j(z_j) = 0$

Misalkan z sembarang titik pada titik C_j maka :

$$S_j(z) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z-z_j} - f^1(z_j)$$

$$(z-z_j)S_j(z) = f(z)-(f(z_j)-(zf^1(z_j)+z_jf^1(z_j)$$

$$f(z) = f(z_j)-z_jf^1(z_j)+zf^1(z_j)+(z-z_j)s_j(z)$$

Karena menurut theorema 12 didapatkan bahwa untuk sembarang kontur tertutup C_j maka :

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = o \text{ dan } \oint_{C_j} z\,dz = o \text{ sehingga}$$

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = \oint_{C_j} f(z_j)dz - \oint_{C_j} z_jf'(z_j)dz + \oint_{C_j} zf^1(z_j)dz + \oint_{C_j} (z-z_j)S_j(z)\,dz$$

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = \oint_{C_j} (z-z_j)\,S_j(z)\,dz$$

Jumlah semua integral sekeliling C_j ($j = 1,2,3,\ldots,n$) ini sama dengan integral sekeliling C yang diambil dengan arah positif, sebab integral garis sepanjang perbatasan bersama dari setiap pasang daerah dbagian yang berbatasan akan saling melenyapkan, arah integral sepanjang garis perbatasan untuk daerah bagian yang satu berlawanan dengan arah untuk daerah bagian yang lain. Yang tingga hanyalah integral-integral sepanjang busur bagian dari kontur C.

jadi :

$$\sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz$$

maka
$$\oint_{C} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz$$

Sehingga
$$\left| \oint_{C} f(z)\,dz \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right|$$

Setiap C_j berimpit seluruhnya atau sebagian dengan batas dari bujursangkar dan misalkan a_j panjang sisi bujursangkar itu, karena z pada C_j dan z_j di dalam atau pada C_j maka

→ Rumus jarak

$| z-z_j | \leq a_j \sqrt{2}$ dan karena masing-masing fungsi $S_j(z)$ adalah kontinu pada kontur C_j yang panjangnya k_j maka diperoleh :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right| \leq \varepsilon\, a_j k_k \sqrt{2}$$

JIka C_j suatu bujursangkar maka $k_j = 4\, a_j$; dan jika C_j merupakan perbatasan dari bagian bujursangkar, maka K_j tidak lebih dari $4\, a_j + \ell_j$ dimana ℓ_j panjang bagian dari C yang ikut membentuk C_j. Jika C_j suatu bujursangkar yang luasnya A_j maka :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\ S_j(z)\ dz \right| \leq 4\ \varepsilon\ a_j\ .\ a_j\ \sqrt{2}$$

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\ S_j(z)\ dz \right| \leq 4\ \varepsilon\ a_j\ .a_j\ \sqrt{2}$$

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\ S_j(z)\ dz \right| \leq 4\ \varepsilon\ A_j\ \sqrt{2}$$

Jika fungsi C_j perbatasan dari bujursngkar maka :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j) S_j(z)\ dz \right| \leq \varepsilon\ a_j\ (\ 4a_j + L_j\ )\ \sqrt{2} < (\ 4A_j\ aL_j\ )\ \varepsilon\ \sqrt{2}$$

dimana a panjang sisi bujursangkar yang memnghubungi kontur C dan juga semua bujursangkar yang menutup daerah R. Jadi jumlah semua A_j tidak lebih dari pada a^2 dan jika L panjang kontur C maka :

$$\left| \oint_C f(z)\ dz \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{C_j} (z-z_j) S_j(z)\ dz \right| < \varepsilon\ (4a^2 + aL)\ \sqrt{2}$$

karena ε bilangan positif sembarang, maka $\oint_C f(z)\ dz = 0$

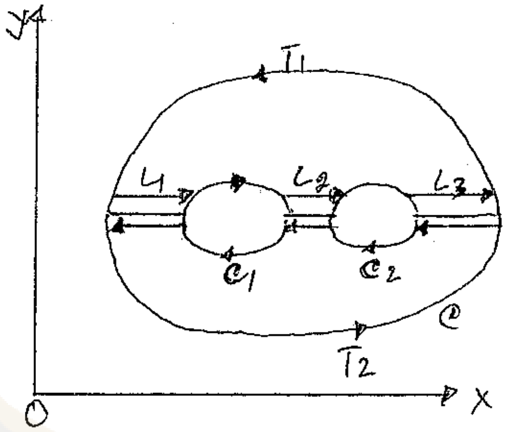
2.6.2. THEOREMA CAUCHY - GOURSAT UNTUK DOMIN TERHUBUNG GANDA

THEOREMA : 14

Diketahui C suatu kontur tertutup dan Cj(j=1,2,3,..n) Sejumlah berhingga kontur tertutup di daerah interior C, sedemikian hingga interior-interior dari Cj tidak mempunyai titik berserikat. Jika fungsi f analitik di dalam daerah tertutup yang terdiri atas titik-titik di dalam dan pada C; kecuali titik-titik interior dari Cj maka $\oint_C f(z)\ dz - \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\ dz = 0$

Bukti :

Menghubungkan suatu titik dari C dari suatu titik dari C_1 dengan penggal garis lurus L_1, suatu titik dari C_1 dan suatu dari C_2 dengan penggal garis L_2, demikian seterusnya akhirnya dapat dihubungkan suatu titik dari C_n dan suatu titik dari C dengan penggal garis lurus L_{n+1} . Semua penggal garis Lj seluruhnya harus terletak pada daerah yang ditentukan pada theorema dimana fungsi f analitik.



Dengan demikian dapat diperoleh dua kontur tertutup T_1 dan T_2 dimana f analitik di dalam daripada kontur-kontur itu. Karena fungsi f analitik di dalam dan pada kontur-kontur T_1 dan T_2 maka menurut theorema 13 diperoleh integral sekeliling kontur T_1 dan T_2 itu sama dengan nol sehingga jumlah kontur T_1 dan T_2 sama dengan jumlah integral suatu kontur tertutup C dan sejumlah berhingga kontur tertutup di daerah interior C yaitu :

$$\oint_{T_1} f(z)\,dz + \oint_{T_2} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \oint_{Cj} f(z)\,dz$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad = \oint_{C} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \oint_{Cj} f(z)\,dz$$

$$\oint_{C} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\,dz = 0$$

Karena integral sepanjang Lj yang dilalui dua kali tetapi dengan arah yang berlawanan akan saling melenyapkan sehingga diperoleh :

$$\oint_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} \oint_{Cj} f(z)\,dz = 0$$

2.6.3 INTEGRAL CAUCHY

THEOREMA : 15

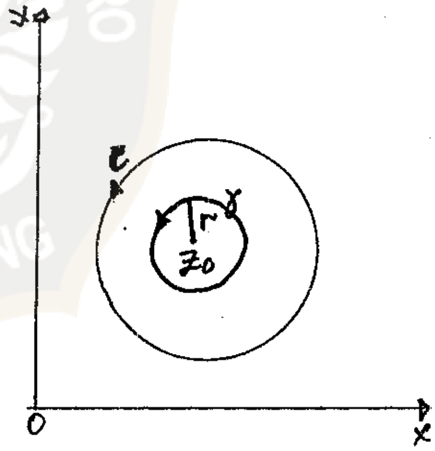
Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, dan z_o sebarang titik di dalam C, maka

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$$

Bukti :

Menurut theorema 14

fungsi f analitik di dalam daerah tertutup yang terdiri atas titik-titik di dalam dan kontur tertutup C.



Sehingga diperoleh :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$$

Karena fungsi f analitik pada C dan γ dalam daerah diantara kedua kontur tertutup itu.

Sehingga ditulis

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o} = dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz = f(z_o) \oint_\gamma \frac{dz}{z-z_o} + \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}\,dz \quad \ldots\ldots (1)$$

Integral ruas kanan dapat dijelaskan sebagai berikut :

untuk $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_o}$

ambil $z_o = x_o + iy_o$ maka lingkaran γ dapat ditulis

$$x = x_o + r\cos\theta$$

$$y = y_o + r\sin\theta \quad \text{dimana } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

maka $z = x + iy$

$$z = x_o + r\cos\theta + i(y_o + r\sin\theta)$$

$$dz = -r\sin\theta + ir\cos\theta\, d\theta$$

$$= ir(\cos\theta + i\sin\theta)\, d\theta$$

$$dz = ir\, e^{i\theta}\, d\theta$$

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f\{(x_o + r\cos\theta) + i(y_o + r\sin\theta)\}\, i\, r\, e^{i\theta}\, d\theta$$

Dengan mengambil $f(z) = \frac{1}{z-z_o}$ sehingga diperoleh

$$z-z_o = [x_o + r\cos\theta + i(y_o + r\sin\theta)] - (x_o + iy_o) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\, e^{i\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-z_o} = i\, r \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} d\theta$$

$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-z_o} = 2\pi i$ berlaku untuk semua lingkaran γ di dalam C berpusat z_o.

Karena f analitik di z_o, maka kontinu di z_o.

Menurut definisi 21 diperoleh fungsi dikatakan kontinu di z_o, jika pada setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga berlaku :

jika $|z - z_0| < \delta$ maka $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Misal jari-jari $r < \delta$, maka ketidaksamaan itu berlaku untuk semua z yang terletak pada γ dan lintasan γ berupa lingkaran sehingga diperoleh juga :

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{r}\, 2\pi r$$

keliling lingkaran γ

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| < 2\pi\varepsilon \quad \text{dengan } r \text{ cukup kecil}$$

Karena integral dalam theorema ini tidak tergantung kepada r maka

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| = 0$$

Dengan demikian persamaan (1) dapat diperoleh :

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} + \left| \oint \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right|$$

$$= f(z_0)\, 2\pi i + 0$$

$$= f(z_0)\, 2\pi i$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

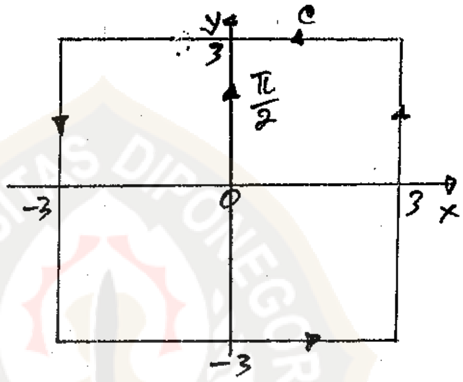
Maka terbuktilah rumus Integral Cauchy yang memperlihatkan bahwa suatu fungsi yang analitik dalam suatu daerah yang dibatasi oleh kontur tertutup C, harga fungsi di seluruh daerah itu ditentukan oleh harga-harga pada C yaitu pada perbatasan daerah itu.

CONTOH : 27

Jika C adalah keliling bujur sangkar yang sisinya berimpit dengan garis-garis $x = \pm 3$, $y = \pm 3$ hitunglah integral Cauchy :

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2} i} \, dz$$

Penyelesaian



$f(z) = e^{-z}$

$f'(z) = - e^{-z}$

Jadi f terdefferensialkan pada setiap harga z, maka f(z) analitik dimana-mana termasuk di dalam dan pada C sehingga:

$$\oint \frac{e^{1-z}}{z - \frac{\pi}{2} i} \, dz = 2 \pi i \, f(z_0)$$
(menurut theorema 15)

karena $z = \frac{\pi}{2} i$ di dalam C maka

$$\oint \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2} i} \, dz = 2 \pi i \, f\left(\frac{\pi}{2} i\right)$$

$$= 2 \pi i \; e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

$$= 2 \pi i \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\oint \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz = 2\pi i \left[\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \,[\, 0 - i \,.\, 1 \,]$$

$$= 2\pi i\,(-i)$$

$$\oint \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz = 2\pi.$$