BAB III

FUNGSI ANALITIK

3.1 FUNGSI-FUNGSI PERUBAH KOMPLEKS

Suatu fungsi f yang didefinisikan pada daerah G adalah aturan yang mengkawankan setiap $z \in G$ dengan suatu bilangan kompleks $w \in T$, $T \subset \mathbb{C}$.

$$f \ : G \longrightarrow T$$
$$z \longrightarrow w = f(z)$$

G disebut daerah definisi dari f, sedangkan $f(G) = \{f(z) \mid z \in G\}$ disebut daerah hasil (range) dari f. Apabila G terbuka dan terhubung, maka G disebut domain dari f. Agar suatu fungsi terdefinisi dengan baik, maka baik aturan dari f maupun daerah definisinya harus jelas. Jika G sebagai daerah definisi dari f tidak ditentukan, maka G diasumsikan sebagai semua bilangan kompleks yang memberikan harga untuk f. Sebagai contoh , bila hanya disebutkan $f(z) = \frac{1}{z}$, maka diasumsikan $G = \mathbb{C} - \{0\}$ atau f hanya terdefinisi untuk $z \neq 0$.

3.2 LIMIT DAN KONTINUITAS

DEFINISI 3.2.1 :

$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ jika dan hanya jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap $z \neq 0$ dimana $0 < |z-z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Jika $N_\delta(z_0)$ dan $N_\varepsilon(L)$ berturut-turut adalah suatu sekitar dari z_0 dengan jari-jari δ dan sekitar dari L dengan jari-jari ε ,maka menurut definisi di atas f haruslah terdefinisi di $N_\delta(z_0)$ kecuali mungkin di z_0 sendiri.

Bila G daerah definisi dari f maka definisi limit di atas

$\left| f(z) - L \right| < \varepsilon$ perlu dipenuhi hanya untuk $z \in N_{\delta}(z_o)$ yang terletak di G. Jika limit dari f untuk $z \longrightarrow z_o$ ada maka harga dari limit itu pastilah tunggal, dan dalam hal ini tidak tergantung lintasan mana bagi z untuk mendekati z_o.

DEFINISI 3.2.2 :

Fungsi f kontinu di z_o, jika pada setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$. Sedemikian hingga untuk semua z dimana $\left| z-z_o \right| < \delta$, berlaku $\left| f(z) - f(z_o) \right| < \varepsilon$.

Jadi jika f kontinu di z_o , haruslah dipenuhi semua syarat sebagai berikut :

1. $f(z_o)$ ada
2. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)$ ada
3. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada daerah G , jika f kontinu di setiap titik $z \in G$.

Jika f kontinu pada R & f terbatas pada R, yang berarti dapat di peroleh bilangan positif M sedemikian hingga $f(z) \leq M$ untuk semua z di dalam R. Jika f kontinu pada daerah yang tertutup dan terbatas R, maka f kontinu uniform pada daerah R, yaitu pada setiap $\varepsilon > 0$ yang ditentukan, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap titik-titik z_1 dan z_2 di dalam R dimana $\left| z_1 - z_2 \right| < \delta$ berlaku :

$\left| f(z_1) - f(z_2) \right| < \varepsilon$.

Misalkan D daerah definisi fungsi f , untuk semua z di dalam sekitar N dari titik z_o, andaikan daerah jangkau dari fungsi g termuat di dalam D, maka fungsi $f \circ g(z)$ terdefinisi jika z di dalam N. Jika g kontinu di z_o dan f di titik $g(z_o)$, maka $f \circ g(z)$ kontinu di z_o.

Contoh :

1. $f(z) = |z|^2$ kontinu untuk semua harga z.
2. $f(z) = \dfrac{z^2+4}{z-2i}$ tidak kontinu hanya di $z = 2i$.

   Bila sekarang didefinisikan :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+4}{z-2i}, & \text{untuk } z \neq 2i \\ 4i, & \text{untuk } z = 2i \end{cases}$$

   Maka f akan kontinu di $z = 2i$, sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian hingga $|z - 2i| < \delta$ maka $\left| \dfrac{z^2+4}{z-2i} - 4i \right| = \left| \dfrac{(z-2i)(z-2i)}{z-2i} - 4i \right| = |z-2i| < \delta$

   Dengan mengambil $\varepsilon = \delta$, maka berarti $\lim\limits_{z \to 2i} f(z) = 4i = f(2i)$, yaitu f kontinu di $z = 2i$.

3.3 DERIVATIF DARI FUNGSI-FUNGSI PERUBAH KOMPLEKS

Bila $G \subset \mathbb{C}$ dan didefinisikan $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, maka derivatif dari f di titik $z_0 \in G$ diberikan dengan persamaan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Bila $h = z - z_0$, maka persamaan di atas menjadi :

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

DEFINISI 3.3.1 :

Fungsi $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dikatakan differensiabel di titik $z_0 \in G$ apabila $f'(z_0)$ ada.

Selanjutnya jika f differensiabel di setiap titik $z \in G$, maka f dikatakan differensiabel pada G.

THEOREMA 3.3.2 :

kontinu di z_o.

Bukti :

$$\lim_{z \to z_o} f(z) - f(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \cdot \lim_{z \to z_o} (z - z_o)$$

$$= f'(z_o) \cdot 0 = 0$$

berarti $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$, atau f kontinu di z_o.

Tetapi sebaliknya jika f kontinu di z_o, maka belum tentu f akan differensiabel di z_o.

3.4 FUNGSI ANALITIK

DEFINISI 3.4.1 :

Fungsi f dikatakan analitik di titik z_o, apabila terdapat suatu sekitar dari z_o sedemikian hingga f differensiabel di setiap $z \in N_r(z_o)$.

Dengan demikian jika f differensibel di suatu titik, maka belum tentu f analitik di titik tersebut. Jika G suatu domain dan f differensiabel pada G maka f analitik pada G. Fungsi yang analitik di seluruh bidang komplek, dinamakan fungsi seluruh. Suku banyak adalah fungsi seluruh sebab ia mempunyai derivatif di setiap harga z.

H(G) adalah kumpulan dari fungsi-fungsi analitik pada G. Kita pakai H(G) untuk menunjuk fungsi-fungsi analitik pada G adalah lebih baik daripada A(G) karena ini merupakan kebiasaan umum untuk A(G) menunjukkan kumpulan dari fungsi-fungsi kontinu. Dan huruf H dipakai dalam menunjukkan ke" Analitik " karena kata holomorphic biasanya dipakai untuk analitik.

3.5 DERET PANGKAT

Yang dimaksud deret pangkat adalah deret dari bentuk

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\,dt - \varepsilon . \Delta x_i \leq |\gamma'(x_i)|\,\Delta x_i$$

dimana :

$$|\gamma'(x_i)|\,\Delta x_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\ dt \right|$$

maka :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\,dt - \varepsilon . \Delta x_i \leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\ dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right|$$

$$\leq |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + \varepsilon . \Delta x_i$$

Jika kita menghitung pertidaksamaan ini, untuk i=1,2,...,n

kita memperoleh :

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\,\varepsilon\,(b-a)$$

$$\leq V(\gamma;a,b) + 2\varepsilon\,(b-a)$$

Karena ε sembarang , maka :

$$\int |\gamma'| \leq V(\gamma) \qquad .... (2)$$

maka dari (1) & (2) terbukti bahwa :

$$\int |\gamma'| = V(\gamma).$$

3.6.3 KURVA LENTUR

γ suatu kurva lentur jika γ adalah variasi terbatas, dan didefinisikan panjang γ adalah $V(\gamma;a,b)$.

Dimana $V(\gamma;a,b)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$(\ *\ )\quad \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| \qquad (a=x_0 < x_1 \ \ ....< x_n=b)$$

batas ke i di dalam jumlahan ini adalah jarak (dalam R^k) antara titik-titik $\gamma(x_{i-1})$ dan $\gamma(x_i)$, dan (*) adalah jarak dari sebuah poligon yang memiliki puncak di titik-titik $\gamma(x_o), \gamma(x_1), \ldots\ldots, \gamma(x_n)$.

THEOREMA 3.6.3.1 :

Jika γ' kontinu pada $[a,b]$ maka γ adalah kurva lentur dan panjangnya :

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Bukti :

Kita harus membuktikan bahwa $\int |\gamma'| = V(\gamma)$.
Dan ini telah dibuktikan dalam preposisi 3.6.2.

Contoh :

1. $\gamma_1(t) = e^{it}$ dan $\gamma_2(t) = e^{2it}$ pada $[0,2\pi]$ adalah suatu kurva lentur.
2. Jika γ suatu kurva lentur dalam bidang kompleks, didefinisikan pada $[0,1]$ dan jika f adalah sebuah fungsi kontinu pada range dari γ, didefinisikan:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\, d\gamma(t)$$

ditentukan :

$$\gamma(0) = A \quad , \quad \gamma(1) = B$$

Buktikan bahwa :

$$(n+1) \int z^n\, dz = B^{n+1} - A^{n+1} \qquad (n=0,1,\ldots)$$

Bukti :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\, d\gamma(t)$$

maka jika :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma z^n\, dz \quad \text{berlaku :}$$

$$\int_\gamma z^n\, dz = \int_0^1 \gamma^n(t)\, d\gamma(t)$$

$$\int_{\gamma} z^n = \frac{\gamma^{n+1}(t)}{n+1} \Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}\left[\gamma^{n+1}(1) - \gamma^{n+1}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[B^{n+1} - A^{n+1}\right]$$

$$(n+1) \int_{\gamma} z^n \, dz = \left[B^{n+1} - A^{n+1}\right] \quad \text{terbukti.}$$

3.6.4 KURVA LENTUR TERTUTUP

γ suatu kurva lentur yang disajikan dalam bentuk :

$x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, $a \leq t \leq b$.

Jika $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ dan $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$ maka γ disebut kurva lentur tertutup .

3.6.5 THEOREMA MODULUS MAKSIMUM

Jika $f(z)$ analitik dalam domain G dan kontinu dalam penutupan G , dan M harga maksimum dari $|f(z)|$ di dalam G, maka $|f(z)| < M$ untuk semua titik interior z di dalam G. Jadi harga maksimum dicapai di suatu titik pada perbatasan dari G.

3.6.6 TEST M. WEIRSTRASS

Yaitu bila $Un : X \longrightarrow \mathbb{C}$ adalah suatu fungsi sedemikian hingga $|Un(x)| \leq Mn$, semua $x \in X$ dan dipenuhi $\sum_{n=1}^{\infty} Mn < \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} Un$ adalah konvergen uniform.

3.6.7 THEOREMA CAUCHY

Jika fungsi f analitik dan f' kontinu di dalam dan pada kurva lentur tertutup maka :

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

3.6.8 RUMUS INTEGRAL CAUCHY

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kurva lentur tertutup γ, dan z_o sembarang titik di dalam γ, maka :

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_o}\, dz$$

disebut rumus integral Cauchy.

Ini memperlihatkan bahwa suatu fungsi yang analitik dalam suatu daerah yang dibatasi oleh kurva lentur tertutup γ, harga fungsi di seluruh daerah itu ditentukan oleh harga-harganya pada γ yaitu pada perbatasan daerah itu.

3.7 SINGULARITAS DAN KUTUB

Titik z_o disebut titik singular terasing dari fungsi f , jika terdapat suatu sekitar dari z_o sedemikian hingga f, analitik dalam sekitar itu kecuali di z_o.

Jadi apabila z_o suatu titik singular terasing dari f maka terdapatlah $r > 0$ sedemikian hingga f(z) analitik untuk $0 < |z - z_o| < r$.

Contoh :

1. Titik $z = 0$ adalah titik singular terasing dari $f(z) = \frac{1}{z}$.

2. Titik $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dimana $k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$ adalah titik singular terasing dari $f(z) = \operatorname{tg} z$

Pada penderetan Laurent di sekitar titik singular terasing z_o dai fungsi f, yaitu :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n + \frac{b_1}{z-z_o} + \frac{b_2}{(z-z_o)^2} + \ldots\ldots$$

dimana : $0 < |z-z_o| < r$

deret dengan suku-suku pangkat negatif dari $(z-z_o)$ dinamakan bagian utama dari f(z) di sekitar z_o .

Jika bagian utama dari f di sekitar titik singular z_o mempunyai tak berhingga suku, titik itu dinamakan titik singu-

Sebagai contoh : $\cosh \frac{1}{z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{(2n)!}$ untuk $|z| > 0$,

maka titik $z=0$ merupakan titik singular esensiil.

Jika bagian utama hanya terdiri dari beberapa suku, maka terdapat bilangan positif bulat m sedemikian hingga $b_m \neq 0$ dan $b_n = 0$ untuk semua n m.

Dalam hal ini titik singular z_0 dinamakan kutub tingkat m dari fungsi f. Kutub tingkat satu,yaitu jika m=1, dinamakan kutub tunggal.Fungsi $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ mempunyai kutub tingkat dua di titik z=1.

Jika suatu fungsi yang tidak analitik di z_0, tetapi dapat dijadikan analitik dengan memberikan harga yang sesuai untuk titik itu, fungsi itu dikatakan mempunyai titik singular yang dapat dihapus di z_0. Jika f mempunyai kutub tingkat m di z_0, maka fungsi :

$Q(z) = (z-z_0)^m f(z)$ mempunyai titik singular yang dapat dihapus di z_0 dan $Q(z_0) \neq 0$.

3.8 FUNGSI MEROMORPHIS

Suatu fungsi disebut meromorphis pada suatu daerah, apabila dalam daerah itu fungsi analitik kecuali pada kutub kutubnya. Jadi singularitas suatu fungsi meromorphis hanyalah kutub.

Contoh : $f(z) = \sec z$, $f(z) = \operatorname{tg} z$.

3.9 FUNGSI RASIONAL

Suatu fungsi rasional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, diberikan sebagai hasil bagi dua polinomial.

Kita asumsikan, bahwa P(z) dan Q(z) tidak memiliki faktor-

Q(z). Harga-harga nol dari Q(z) dinamakan kutub-kutub dari R(z), dan tingkat dari sebuah kutub didefinisikan sama dengan tingkat dari harga nol yang bersesuaian dari Q(z).