BAB II

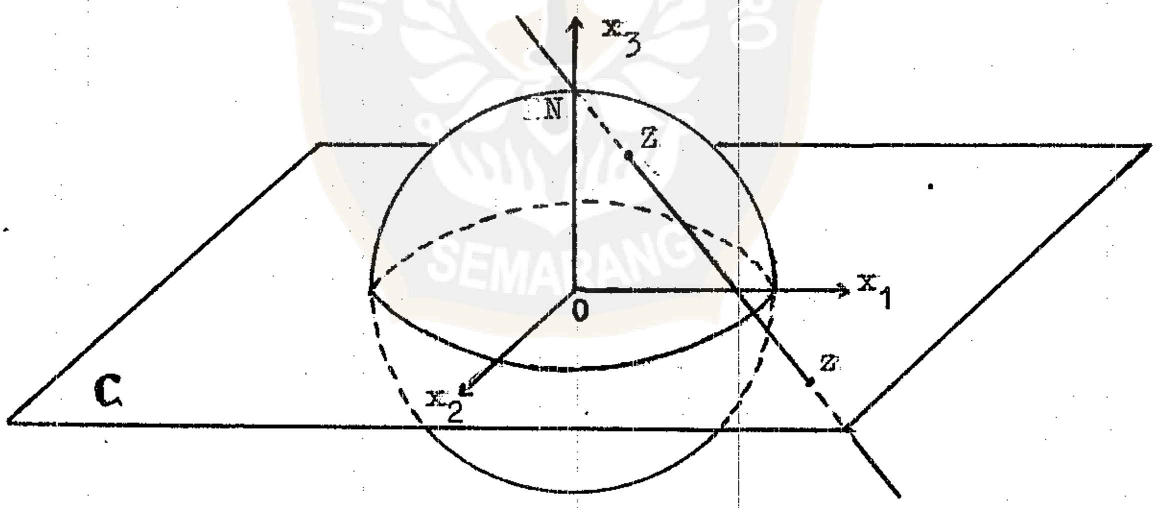
RUANG METRIK DAN TOPOLOGI KOMPLEKS ($\mathbb{C}$)

2.1. BIDANG KOMPLEKS YANG DIPERLUAS ($\mathbb{C}_\infty$)

Jika suatu titik di tak berhingga yang dapat dinotasikan dengan ∞, dimasukkan ke bidang kompleks, maka bidang ini disebut bidang kompleks yang diperluas. Dengan demikian didapat notasi baru $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Untuk memberikan gambaran dari $\mathbb{C}_\infty$, kita pandang suatu bola satuan di R^3 dengan pusat $z = 0$.

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$



Titik $N = (0,0,1)$ adalah kutub utara dari bola S. $\mathbb{C}$ memotong S sepanjang equator dari S, sehingga dapat dituliskan $\mathbb{C} = \left\{ (x_1, x_2, 0) \;\middle|\; x_1, x_2 \in R \right\}$. Selanjutnya untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, dibuat garis lurus melalui z dan N yang memotong S tepat di satu titik $Z \neq N$. Jika $|z| > 1$, maka Z terletak disetengah permukaan bola bagian atas. Jika $|z| < 1$, maka Z disetengah permukaan bola S bagian bawah. Jika $|z| = 1$, $Z = z$. Untuk $|z| \longrightarrow \infty$, maka $Z \longrightarrow N$. Sehingga titik pada permukaan bola S menyajikan titik-titik dari $\mathbb{C}_\infty$, dimana titik N sebagai proyeksi titik $z=\infty$.

Bola satuan S di atas disebut bola Riemann, sedangkan proyeksi yang menghasilkan korespondensi antara titik-titik dari S dengan titik-titik dari $\mathbb{C}_\infty$ disebut proyeksi steoreografis. Bila $Z=(x_1,x_2,x_3)$ berkorespondensi dengan $z=(x,y)$ maka garis lurus yang melalui Z,z dan N adalah :

$$\frac{x_1 - 0}{x - 0} = \frac{x_2 - 0}{y - 0} = \frac{x_3 - 1}{0 - 1} = t \quad , t \in R$$

sehingga tempat kedudukan titik-titik pada garis itu adalah

$$\{(xt, yt, (1-t)) \mid -\infty < t < \infty \}$$

Bila garis lurus ini memotong S di Z, maka t memenuhi :

$$x^2t^2 + y^2t^2 + (1-t)^2 = 1 \text{ , atau}$$

$$(1+ z^2)t^2 - 2t = 0$$

yang merupakan persamaan kwadrat dalam t. Untuk $t\neq 0$ $(Z\neq N)$, maka didapat :

$$t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$$

Jadi :

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} \quad , \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} \quad , \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

atau :

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad , \quad x_2 = \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2 + 1} \quad , \quad x_3 = \frac{z^2 - 1}{|z|^2 + 1} \qquad (*)$$

Jika $Z=(x_1,x_2,x_3)$ diketahui , untuk $Z\neq N$, maka $z=(x,y)$ dapat ditentukan dari $(x_1,x_2,x_3) = (xt, yt, (1-t))$.

Dengan mengambil $t=1-x_3$, maka didapat :

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Contoh :

1. Setiap titik pada lingkaran $|z|= 1$ pada $\mathbb{C}$ akan diproyeksikan ke dirinya sendiri, sebab jika z=x+iy

pada lingkaran $|z| = 1$, maka :

$$x_1 = \frac{2x}{1+1} \quad , \quad x_2 = \frac{2y}{1+1} \quad , \quad x_3 = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

sehingga :

$$Z = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, 0) = z$$

2. Proyeksi dari $z=3+2i$ adalah :

$$Z = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{6}{14}, \frac{4}{14}, \frac{12}{14}\right) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

Sedangkan titik $Z = (0,0,-1)$ adalah proyeksi dari

titik : $z = \dfrac{0 + i0}{1-(-1)} = 0$

Untuk mendefinisikan sebuah fungsi jarak antara titik-titik dalam daerah yang diperluas dengan cara sebagai berikut :

untuk z, z' dalam $\mathbb{C}_\infty$ didefinisikan jarak dari z ke z', $d(z,z')$, suatu jarak antara korespondensi titik-titik z dan z' dalam R^3. Jika $z = (x_1, x_2, x_3)$ dan $z' = (x_1', x_2', x_3')$ maka :

$$d(z,z') = \left[(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + (x_3-x_3')^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (**)$$

Pada kenyataannya bahwa z dan z' pada S, maka (**) memberikan hasil :

$$\left[d(z,z')\right]^2 = \left[(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + (x_3-x_3')^2\right]$$

$$= \left[x_1^2 - 2x_1x_1' + x_1'^2 + x_2^2 - 2x_2x_2' + x_2'^2 + x_3^2 - 2x_3x_3' + x_3'^2\right]$$

$$= \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')\right]$$

$$= \left[2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')\right]$$

Dengan menggunakan persamaan (*) kita dapatkan :

$$\left[d(z,z')\right]^2 = 2-2\left[\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2} \cdot \frac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2} + \frac{(-i)(z-\bar{z})}{|z|^2+1} \cdot \frac{(-i)(z'-\bar{z}')}{|z'|^2+1} + \right.$$

$$\left. \frac{|z|^2-1}{\ldots} \cdot \frac{|z'|^2-1}{\ldots} \right]$$

$$\left[d(z,z')\right]^2 = \frac{2(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} - \frac{2(zz'+z\bar{z}'+\bar{z}z'+\bar{z}\bar{z}'-zz'+z\bar{z}'+\bar{z}z'-}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$\frac{\bar{z}\bar{z}'+|z|^2|z'|^2-|z|^2-|z'|^2+1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$= \frac{2|z|^2+2|z'|^2-4\bar{z}'z-4\bar{z}z'+2|z|^2+2|z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$= \frac{4|z|^2+4|z'|^2-4z\bar{z}'-4\bar{z}z'}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$d(z,z') = \frac{2\left(|z|^2+|z'|^2-z\bar{z}'-\bar{z}z'\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[(1+|z|^2)(1+|z'|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

karena : $|z|^2 = \bar{z}z$ dan $|z'|^2 = \bar{z}'z'$ maka :

$$d(z,z') = \frac{2(\bar{z}z+\bar{z}'z'-\bar{z}'z+\bar{z}z')^{\frac{1}{2}}}{\left[(1+|z|^2)(1+|z'|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

dan $|z-z'|^2 = (\overline{z-z'})(z-z')$

$$= (\bar{z}-\bar{z}')(z-z') = \bar{z}z-\bar{z}z'-z\bar{z}'+\bar{z}'z'$$

sehingga :

$$d(z,z') = \frac{2(|z-z'|^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(1+|z|^2)(1+|z'|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2|z-z'|}{\left[(1+|z|^2)(1+|z'|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad z,z' \in \mathbb{C}.$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan untuk $z \in \mathbb{C}$

$$d(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

2.2. RUANG METRIK

DEFINISI 2.2.1 :

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, yang elemen-elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi bernilai real non negatif d pada X X (jadi d fungsi 2 variabel dengan variabel-variabel pada X) sebagai berikut :

Untuk sembarang titik x dan y di dalam X harus memenuhi :

a. $d(x,y) \quad 0$; $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x=y$

b. $d(x,y) = d(y,x)$

c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk sembarang titik $z \in X$.

Fungsi d yang memenuhi ketiga sifat di atas dinamakan fungsi jarak atau metrik pada X. Nilai d(x,y) dinamakan jarak dari x ke y . Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak disebut " Ruang Metrik ".

Contoh :

1. Ambil $X = \mathbb{C}$ dan didefinisikan $d(x+iy, a+ib) = x-a + y-b$ maka $(\mathbb{C}, d)$ adalah sebuah ruang metrik.
2. (R^1, d) dengan R^1 adalah sistem bilangan riil dan metrik d didefinisikan sebagai $d(x,y) = k\,|x-y|$ semua $x,y \in R^1$ dan k= konstan.
3. (R^n, d) dimana untuk $x,y \in R^n$, metrik d didefinisikan sebagai :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

2.3. SEKITAR DAN TITIK LIMIT

DEFINISI 2.3.1 :

Jika p sembarang titik didalam ruang metrik X , r 0 maka himpunan $N_r(p) = \{ x \in X \mid d(p,x) < r \}$ dinamakan daerah sekitar titik p dengan jari-jari r. Titik p dinamakan pusat sekitar $N_r(p)$.

DEFINISI 2.3.2 :

Titik $p \in X$ disebut titik limit himpunan E, $E \subset X$, bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in E$ dan $q \neq p$.

Contoh :

1. $E = \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \;,\; 0 < y < 1\}$, $X = \mathbb{C}$
   semua titik di dalam E serta titik-titik perbatasannya merupakan titik limit.

2. $E = \{(1 - \frac{1}{n})i \mid n \in N\}$, $E \subset \mathbb{C}$

   $z = i$ adalah titik limit dari E ($z \in E'$)

   tetapi $z = i \notin E$.

Dari definisi titik limit dapat disimpulkan bahwa :

* p adalah titik limit himpunan E jika hanya jika $(\forall r > 0)((N_r(p) \cap E) - \{p\}$ tidak kosong)
* q bukan titik limit himpunan E jika dan hanya jika $(\exists r > 0)((N_r(q) \cap E) - \{q\}$ kosong)

2.4. HIMPUNAN TERBUKA DAN TERTUTUP

DEFINISI 2.4.1 :

Diberikan ruang metrik X. Semua titik & himpunan yang disebut dalam definisi berikut adalah titik di dalam X dan himpunan bagian dari X

a. Titik p disebut suatu titik interior himpunan E jika terdapat $N_r(p) \subset E$
b. Himpunan E disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan E
c. Himpunan E disebut tertutup jika semua titik limitnya termuat di dalam E.

DEFINISI 2.4.2 :

Himpunan semua titik limit himpunan E diberikan notasi E'. Jadi (E tertutup) $\Longleftrightarrow$ ($E' \subset E$)

Contoh :

1. $G = \{ z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Re } z < b \}$ adalah himpunan terbuka
2. $\{ z \mid \text{Re } z < 0 \} \cup \{0\}$ tidak terbuka karena terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $N_{\varepsilon}(0) \not\subset \{ z \mid \text{Re } z < 0 \} \cup \{0\}$
3. $E = \{ z \mid 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 2 \}$ merupakan himpunan tertutup karena semua titik limitnya termuat dalam E
4. $E = \{ z \mid 0 < x < 4 \ , \ 0 < y < 4 \}$ merupakan himpunan tidak tertutup karena ada titik limit dari E yang tidak termuat dalam E.

DEFINISI 2.4.3 :

Jika X suatu ruang metrik dan E' menyatakan himpunan semua titik limit himpunan E, maka penutupan dari E adalah himpunan $\bar{E} = E \cup E'$. Jadi $\bar{E}$ adalah himpunan yang elemen-elemennya anggota E atau titik limit E.

DEFINISI 2.4.5 :

$E \subset X$ maka interior dari E, dinotasikan dengan int E adalah himpunan yang merupakan gabungan dari $\{ G \mid G$ terbuka dan $G \subset E \}$. Sedangkan boundary dari E ditunjukkan dengan ∂E dan didefinisikan dengan $\partial E = \bar{E} \cap (\overline{X-E})$

Contoh :

$E = \{ z \mid |z| < 1 \} \cup \{2i\}$

maka : int $E = \{ z \mid |z| < 1 \}$ dan $\bar{E} = \{ z \mid |z| \leq 1 \} \cup \{2i\}$

$X-E = \{ z \mid |z| \geq 1 \} - \{2i\}$

$\overline{X-E} = \{ z \mid |z| \geq 1 \}$ karena $2i \in (X-E)'$

maka :

$$\partial E = \{ z \mid |z| \leq 1 \} \cup \{2i\} \cap \{ z \mid |z| \geq 1 \}$$
$$= \{ z \mid |z| = 1 \} \cup \{2i\}$$

2.5. HIMPUNAN TERHUBUNG

DEFINISI 2.5.1 :

Dua himpunan A dan B dalam suatu ruang metrik X disebut terpisah jika $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
Dan A & B disebut saling asing jika $A \cap B = \emptyset$. Jadi himpunan yang saling asing belum tentu terpisah. Tetapi himpunan yang terpisah pasti saling asing.

DEFINISI 2.5.2 :

Himpunan A dalam ruang metrik X adalah terhubung jika A tidak dapat disajikan sebagai gabungan dua himpunan yang terpisah dan tidak kosong. Dengan kata lain apabila A dapat disajikan sebagai dua himpunan tidak kosong yang terpisah maka A tidak terhubung

Contoh :

1. $E = \{z \mid |z| \leq 1\} \cup \{|z-2| < 1\}$
   misal : $A = \{z \mid |z| \leq 1\}$ & $B = \{|z-2| < 1\}$ maka
   $\overline{A} = \{z \mid |z| \leq 1\} = A$ dan $\overline{B} = \{|z-2| \leq 1\}$
   $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \overline{B} = 1$
   Sehingga E tidak terpisah meskipun E saling asing. Dengan demikian E terhubung, karena tidak dapat disajikan sebagai gabungan dari dua himpunan yang terpisah.
2. Bila $A = [0,i) = \{(x,y) \mid x=0 , 0 \leq y \leq 1\}$
   $B = \{(1+ \frac{1}{n})i \mid n \geq 1\}$

   maka : $A \cap B = \emptyset$
   $\overline{A} = [0,i] = A \cup \{i\}$ dan $\overline{B} = B \cup \{i\}$
   $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \overline{B} = \emptyset$
   Sehingga bila $E = A \cup B$ maka E saling asing, terpisah dan tidak terhubung (karena dapat disajikan

DEFINISI 2.5.3 :

Diketahui X = ruang metrik.

$D \subset X$, D suatu komponen dari X jika D himpunan terhubung yang menjadi himpunan bagian terbesar dari X. Dalam arti D terhubung dan tidak ada himpunan terhubung yang lain yang termuat dalam X yang memuat D.

Contoh :

1. $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

   Setiap komponen dari X adalah himpunan dengan satu titik dari X.

2. $X = \{z \mid |z| \leq 1\} \quad \{z \mid |z-3| < 1\}$

   $A = \{z \mid |z| \leq 1\}$ dan $B = \{z \mid |z-3| < 1\}$

   Jika $X = A \cup B$, maka A dan B keduanya adalah komponen dari X.

2.6 BARISAN :

DEFINISI 2.6.1 :

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ dengan sifat sebagai berikut : untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif m sedemikian hingga untuk semua $n \geqslant m$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$. Dalam hal ini juga dikatakan bahwa barisan x_n konvergen ke x , atau x adalah titik limit barisan $\langle x_n \rangle$, dan kita tuliskan :

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{atau} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Jika $X = \mathbb{C}$ maka $z = \lim_{n \to \infty} z_n$ artinya setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu m sedemikian hingga untuk semua $n \geqslant m$ berlaku :

$$|z - z_n| < \varepsilon.$$

DEFINISI 2.6.2 :

Barisan yang tidak konvergen disebut divergen.

Contoh :

1. $\langle \frac{i}{n} \rangle$ adalah konvergen ke 0 , $n \in N$.

$S_n = \frac{i}{n}$, $S = 0$

Diberikan $\varepsilon > 0, \exists N$ sehingga $\left|\frac{i}{N}\right| < \varepsilon$,

$\forall n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{i}{n}\right| \leq \left|\frac{i}{N}\right| < \varepsilon$

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N)\ (\forall n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{i}{n} - 0\right| < \varepsilon)$

Jadi $\lim_{n \to \infty} \frac{i}{n} = 0$.

2. $\langle S_n \rangle$, $S_n = (-1)^n$ adalah divergen.

S sembarang elemen dari R dan N suatu konstanta bulat dan diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

S=1 dan $\forall n \in N$ asal $n \geq N$ dan n ganjil maka :

$$\left| S_n - 1 \right| = 2 \geq \frac{1}{2}$$

S=-1 dan $\forall n \in N$, n genap $\geq N$ maka :

$$\left| S_n - (-1) \right| = 2 \geq \frac{1}{2}$$

Jadi (± 1) bukan limit $\langle S_n \rangle$

$S \neq \pm 1$ maka $\varepsilon = \min \{ |S-1|, |S+1| \}$ untuk $\forall n$,

$$\left| S_n - S \right| \geq \varepsilon$$

Jadi S bukan titik limit .

DEFINISI 2.6.3 :

$\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada himpunan E ke suatu fungsi f , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan positif bulat P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $x \in E$ berlaku :

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Jika definisi di atas dituliskan dalam bentuk lambang adalah sebagai berikut :

1. $(f_n \longrightarrow f \text{ pada } E) \Longleftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists P \in N)$
$(\forall n \geqslant P) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ )]$

2. $(f_n \longrightarrow f \text{ seragam pada } E) \Longleftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in N)$
$(\forall n > P, \forall x \in E \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ )]$

Contoh :

1. $\langle f_n \rangle$, $f_n = \frac{1}{n} x$ dan $E = [0,1]$

$f_1 = x$

$f_2 = \frac{1}{2} x$

$f_3 = \frac{1}{3} x$

$\vdots$

$f_n = \frac{1}{n} x$

$f_n(x) \longrightarrow f(x) = 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$.

Ambil $\varepsilon_1 > 0$, sehingga $N_1 = 5$ maka $\forall n \geqslant N_1 = 5$ berlaku : $|f_n(x) - 0| < \varepsilon_1$, $\forall x \in E$.

Ambil $\varepsilon_2 > 0$, dimana $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ sehingga $N_2 = 8$ maka $\forall n \geqslant N_2$ berlaku : $|f_n(x) - 0| \leq \varepsilon_2$, $\forall x \in E$.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} x = 0 = f(x).$$

2.7 HIMPUNAN KOMPAK

DEFINISI 2.7.1 :

Dengan selimut terbuka (open cover) suatu himpunan K di dalam ruang metrik X dimaksudkan suatu keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{G_n\}$ yang merupakan himpunan bagian dari X sedemikian hingga $K \subset \bigcup_n G_n$.

Definisi di atas menunjukkan bahwa untuk setiap $z \in K$ terdapat suatu n sehingga $z \in G_n$.

DEFINISI 2.7.2 :

K himpunan bagian dari suatu ruang metrik disebut kompak jika setiap selimut terbuka untuk K memuat sub selimut berhingga yang masih menyelimuti K.

Untuk lebih jelasnya , jika keluarga himpunan terbuka $\{G_n\}$ suatu selimut terbuka untuk himpunan kompak K , maka dapat dicari indek 1,2,.......,n yang jumlahnya berhingga sehingga $K \subset G_1 \cup G_2 \cup G_3 \ldots\ldots \cup G_n$.

Contoh :

1. $Kn = \{z \mid |z| \leq n\}$, $\{Kn\}$ merupakan keluarga himpunan kompak.

   Bukti :

   Andaikan $\{G_n\}$ sembarang selimut terbuka untuk Kn dimana :

   $$G_n = \{z \mid |z| < n+1\} \text{ , sehingga } Kn \subset \bigcup_n G_n$$

   Untuk n = 1,2,3,.......,p terdapat $G_1, G_2, \ldots, G_p$

   dimana :

   G_1 merupakan tutup untuk K_1

   G_2 merupakan tutup untuk K_2 dst .

   Jadi $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_p$ merupakan sub selimut ber-

2. $K = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{n},\ n \in N \right\}$ tidak kompak dalam R

Untuk membuktikan K tidak kompak, kita harus dapat membuat suatu selimut terbuka untuk K yang tidak memuat sub selimut berhingga, untuk setiap $n \in N$ dibentuk $r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

Jadi keluarga himpunan terbuka $\{G_n\}$, merupakan selimut terbuka K dimana $G_n = \left\{ z \mid \frac{1}{n} - r_n < |z| < \frac{1}{n} + r_n \right\}$

Untuk setiap $n \in N$, $G_n = \left\{ z \mid \frac{1}{n} - r_n < |z| < \frac{1}{n} + r_n \right\}$ hanya memuat satu lingkaran anggota K, yakni $|z| = \frac{1}{n}$.

Karena K himpunan tak terhingga, maka selimut diatas tidak berhingga dan tidak memuat sub selimut yang berhingga. Jadi terbukti K tidak kompak.

THEOREMA 2.7.3 :

Jika K himpunan-bagian kompak sembarang ruang metrik, maka K tertutup dan terbatas.

Bukti :

Dimisalkan $K \subset X$, K kompak.

a. Akan dibuktikan K tertutup dan K^c terbuka.

Diandaikan $p \in X$ dan $p \in K^c$. Untuk setiap titik $x \in K$ dibuat sekitar Vx dengan pusat x dan sekitar Wx dengan pusat p yang jari-jarinya kurang dari $\frac{1}{2} d(x,p)$. Jadi $Vx \cap Wx = \emptyset$ untuk semua $x \in K$ jelas bahwa keluarga $\{Vx \mid x \in K\}$ adalah selimut terbuka untuk K, Karena K kompak maka dapat ditentukan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anggota K sehingga $K \subset Vx_1 \cup Vx_2 \cup \ldots \cup Vx_n = V$.

Kita perhatikan himpunan $W = Wx_1 \cap Wx_2 \cap \ldots \cap Wx_n$.

Himpunan W merupakan suatu sekitar titik p dan himpunan-bagian semua Wx_i untuk $i = 1, 2, \ldots n$ Jadi $W \cap Vx_i = \emptyset$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$, sehingga $W \cap V = \emptyset$. Dengan demikian $W \cap K = \emptyset$ atau $W \subset K^c$. Terbukti p titik interior K^c dan K^c terbuka. Jadi K tertutup.

b. Untuk setiap $x \in K$ dibentuk sekitar $N_1(x)$ dengan pusat x dan jari-jari 1. Keluarga $\{ N_1(x) \mid x \in K \}$ merupakan selimut terbuka untuk K. Karena K kompak maka terdapat $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ sehingga $K \in N_1(x_1) \cup N_1(x_2) \ldots \cup N_1(x_m)$.

Kita tentukan bilangan $M-1 = \text{maks} \{ d(x_1,x_2), d(x_1,x_3) \ldots . d(x_1,x_m) \}$

Untuk sembarang $y \in K$ terdapat x_p dengan $1 \leq p \leq m$ sehingga $y \in N_1(x_p)$. Jadi

$$\begin{aligned} d(x_1,y) &\leq d(x_1,x_p) + d(x_p,y) \\ &\leq (M - 1) + d(x_p,y) \\ &< M \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk semua $y \in K$ berlaku $d(x_1,y) < M$ sehingga K terbatas.

THEOREMA 2.7.4 :

Himpunan-bagian tertutup suatu himpunan kompak adalah kompak.

Bukti :

Diberikan himpunan kompak K dan F himpunan bagian tertutup dari K.

Diandaikan $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk F.

Karena F tertutup maka F^c terbuka. Diperhatikan keluarga $\{G_\alpha\} \cup \{F^c\}$. Keluarga ini menjadi selimut terbuka untuk K, sebab himpunan-bagian K yang belum terselimuti maka selimut ini memuat sub-selimut yang berhingga dengan F^c suatu anggota dalam sub-selimut ini. Dimisalkan sub-selimut berhingga ini $\{G_1, G_2, \ldots\ldots G_n, F^c\}$. Tentu saja $G_1, G_2, \ldots, G_n$ menyelimuti F dan merupakan sub-selimut berhingga dari selimut yang diberikan untuk F. Jadi jika $\{G_n\}$ suatu selimut terbuka untuk F maka $\{G_n\}$ memuat sub-selimut berhingga untuk F, sehingga F kompak.

DEFINISI 2.7.5 :

Jika $A \subset X$ dan $x \in X$ maka jarak dari x ke himpunan A adalah $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ dimana $d(x,a) = |x - a|$.

DEFINISI 2.7.6 :

Jika A dan B himpunan bagian dari X maka jarak dari A ke B adalah $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ dimana $d(a,b) = |a - b|$.