# BAB III

# METODE BEALE

## 3.1. PENGERTIAN DAN BATASAN PERMASALAHAN

Metode Beale merupakan perluasan dari metode simplex dalam program linier. Metode ini dipakai untuk menyelesaikan permasalahan meminimalkan suatu fungsi kwadratik konvex dengan kendala fungsi linier. Bentuk standart dari Metode Beale adalah :

Meminimalkan $Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

dengan kendala :

$$A\,x = b \text{ dan } \quad x \geqslant 0$$

di mana :

$Q(x)$ = fungsi kwadratik konvex

$A$ = matrix berukuran $m \times n$

$m$ = jumlah persamaan kendala

$n$ = jumlah variable fungsi sasaran

dan $m < n$

Metode Beale ini adalah salah satu metode yang digunakan apabila program kwadratik tidak memenuhi kondisi Khun - Tucker. Cara penyelesaian dengan metode Beale ada dua cara yaitu :

1. Cara Iterasi
2. Cara Tabel Simplex Obyektif

Kedua cara tersebut di atas akan menghasilkan penyelesaian optimal yang sama.

DEFINISI 21 :

Masalah program kwadratik konvex akan degerate jika variable-variable basis = 0



Dan bila terjadi degerate maka program tidak feasible.

Penyelesaian dengan menggunakan Metode Beale akan diawali de ngan adanya penyelesaian feasible basis yang memenuhi Ax=b dan $x \geqslant 0$ sebagai titik awal Iterasi.

Dan secara garis besar ke dua cara tersebut adalah :

CARA ITERASI :

Cara ini akan diawali dengan mencoba beberapa titik yang memungkinkan akan menjadi titik optimal . Dan pada iterasi pertama selalu dicoba

$x_i = 0$ di mana $i = 1,2,\ldots\ldots n$

$x_i$ = perubah/variable pada fungsi kendala

Begitu seterusnya sampai iterasi ke-n sehingga didapat titik optimal.

CARA TABEL SIMPLEX OBYEKTIF

Cara ini akan memudahkan pembentukan harga fungsi obyektif pada setiap titik Iterasi.

Pada cara tabel simplex obyektif ini dibuat sebuah tabel yang terdiri dua bagian yaitu :

1. Bagian atas yang disebut bagian simplex. Bagian ini elemen-elemen matrixnya merupakan koefisien-koefisien fungsi kendala.
2. Bagian bawah yang disebut bagian obyektif. Bagian ini elemen-elemen matrixnya merupakan koefisien-koefisien fungsi obyektif.

Langkah dari tabel pertama ke tabel berikutnya dihubungkan oleh suatu tabel perantara yaitu tabel intermediate Begitu seterusnya sampai tabel ke-n sehingga didapat tabel optimal.

## 3.2. DEFINISI DAN TEOREMA

DEFINISI 22 :

Jika $Q(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ : fungsi kwadratik concav.

Maka $-Q(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ adalah fungsi kwadratik convex.



Sehingga $\text{Min } Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = -(\text{Max}(-Q(x)))$

Jika dalam fungsi kendala belum berbentuk standart, maka harus diubah ke bentuk standart dengan jalan menambah perubah slack.

CONTOH :

1. $3x_1 - 6x_2 \geq -6$ maka $-3x_1 + 6x_2 \leq -6$

   Dan untuk mengubah menjadi bentuk standart perlu ditambah perubah slack ( $s_1$ )

   Sehingga didapat :

   $-3x_1 + 6x_2 + s_1 = -6$

2. $4x_1 + 5x_2 \leq 10$ maka $4x_1 + 5x_2 + s_1 = 10$

DEFINISI 23 :

Jika m : jumlah persamaan fungsi kendala

n : jumlah variabel fungsi obyektif

Maka akan ada

m : buah variable basis

n-m ; buah variable non basis

DEFINISI 24 :

$X_g$ dengan $g = 1,2,\ldots\ldots m$ : adalah titik feasibel dari persamaan $Ax = b$

$d^1_{gh}$ : koefisien variabel dependen persamaan kendala.

$Z_h$ dengan $h = 1, 2, \ldots\ldots n-m$ adalah variabel non basis.

Maka harga variabel basis dapat ditulis :

$$X_g = d^1_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$

Dan harga variabel basis pada Iterasi pertama $= d^1_{go} > 0$

Index 1 pada $d^1_{go}$ menunjukan iterasi ke-1.

DEFINISI 25 :

Dari bentuk definisi 24

$$X_g = d^1_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$ , Untuk selanjutnya

$X_g$ : disebut variabel dependen

$d^1_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$ : disebut variabel independen.

TEOREMA 5 :

Setiap fungsi $Q(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi dari independen variabel.

Bukti :

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = Q^1(z_1, z_2, \ldots z_{n-m})$$

Menurut definisi 11

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = (C^1_{oo} + 2\sum_{i=1}^{n-m} C^1_{oi} Z_i + \sum_{h=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{hi} Z_i Z_h$$

$$= (C^1_{oo} + \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{oi} Z_i).1 + \sum_{h=1}^{n-m} (C^1_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{hi} Z_i)\ Z_h$$

Jika harga sigma ( $\Sigma$ ) di operasikan didapat :

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = (C^1_{oo} + C_{o1}Z_1 + C_{o2}Z_2 + \ldots + C^1_{o\ n-m}Z_{n-m}).1$$

$$+ (C^1_{1o} + C^1_{11}Z_1 + C_{12}Z_2 + \ldots + C^1_{1\ n-m}Z_{n-m})\ Z_1$$

$$\vdots$$

$$+ (C^1_{ho} + C^1_{h1}Z_1 + C_{h2}Z_2 + \ldots + C^1_{1\ n-m}Z_{n-m})\ Z_h$$

$$\vdots$$

$$+ (C^1_{n-m\ o} + C^1_{n-m\ 1}Z_1 \ldots + \ldots + C_{n-m\ n-m}Z_{n-m})\ Z_{n-m}$$

Terbukti bahwa $Q(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi dari independen variabel.

DEFINISI 26 :

Harga titik iterasi dari teorema 5 didapat dari

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q^1}{\partial Z_h} = C^1_{ho} \quad \text{dan}$$

Harga fungsi Q ( x ) pada iterasi titik tersebut adalah $C^1_{oo}$

DEFINISI 27 :

Jika semua $\frac{\partial Q^1}{\partial Z_h} \geqslant 0$ maka

Iterasi titik tersebut merupakan titik solusi dan jika Q ( x ) merupakan fungsi kwadratik konvex maka penembahan pada beberapa variabel tidak akan mengurangi harga fungsi Q ( x ).

TEOREMA 6 :

Harga $Q^2(x)$ yaitu harga fungsi sasaran pada iterasi kedua ditentukan oleh titik iterasi pertama.

Sehingga variabel $x_1$ menggantikan variabel dependen pada iterasi ke-2.

Untuk membuktikan teorema di atas ada 2 kemungkinan kejadian

1. Jika $\frac{\partial Q^1}{\partial Z_1}$ =0 sebelum variabel dependen ($Z_h$) berada dalam daerah feasibel.
2. Jika $\frac{\partial Q^1}{\partial Z_1}$ = 0 dan variabel dependen ( $Z_h$ ) sudah berada dalam daerah feasibel.

Bukti 1 :

Asumsikan $x_1$=0 sebelum dilakukan $\frac{\partial Q^1}{\partial Z_1}$

Maka pada iterasi ke-2 dipilih salah satu titik dari

$Z_1 = \lambda > 0$ , $Z_2 = 0$ , .... $Z_{n-m}$ =0 yang membuat $X_1$=0

Pada iterasi ke-2 ini $X_1$ , $Z_2$ , $Z_3$ , .... $Z_{n-m}$ = 0 sehingga

$X_1 , Z_2 , \ldots . Z_{n-m}$ merupakan variabel independen

dan $Z_1 , X_2 , \ldots . X_m$ merupakan variabel dependen

Menurut definisi 24 :

$$X_g = d^1_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h \qquad , g = 1 , 2 , \ldots . m \ldots \ldots (1)$$

$$\sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h = X_g - d^1_{go}$$

Untuk g = 1

$$d^1_{11} Z_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d_{1h} Z_h = X_1 - d^1_{go}$$

$$d^1_{11} Z_1 = X_1 - d^1_{10} - \sum_{h=2}^{n-m} d_{1h} Z_h$$

$$Z_1 = \frac{X_1}{d^1_{11}} - \frac{d^1_{10}}{d^1_{11}} - \sum_{h=2}^{n-m} \frac{d^1_{1h}}{d^1_{11}} Z_h$$

$$Z_1 = d^2_{11} X_1 - d^2_{10} + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{1h} Z_h \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) maka :

$$X_g = d^1_{g0} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$

$$= d^1_{g0} + d^1_{g1} Z_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$

$$= d^1_{go} + d^1_{g1} \left[ d^1_{11} X_1 - d^2_{10} + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{1h} Z_h \right] + \sum_{h=2}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$



$$= d^1_{g0} + d^1_{g1} d^2_{11} X_1 - d^1_{g1} d^1_{10} + d^2_{g1} \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{1h} Z_h + \sum_{h=2}^{n-m} d^1_{gh} Z_h$$

$$X_g = d^2_{g0} + d^2_{g1}X_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{gh}Z_h \quad , \quad g = 2,3,\ldots m,m+1$$

$$X_g = d^2_{g0} + d^2_{g1}X_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{gh}Z_h \quad , \quad g = 2,3,\ldots m,m+1 \quad \ldots\ldots(3)$$

Persamaan (2) dan (3) di substitusikan ke persamaan :

$$Q^1 = \left( C^1_{oo} + \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{oi}Z_i \right) 1 + \sum_{h=1}^{n-m} \left( C^1_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{hi}Z_i \right) Z_h$$

$$= \left( C^1_{oo} + C^1_{oi}Z_1 + \sum_{i=2}^{n-m} C^1_{oi}Z_i \right) 1 + \left( C^1_{1o} + C^1_{11}Z_1 \right) Z_1$$

$$+ \sum_{h=1}^{n-m} \left( C^1_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} C^1_{hi}Z_i \right) Z_h$$

Harga-harga $Z_1$ dan $X_1$ dimasukkan ke persamaan di atas.

Sehingga didapat :

$$Q^2 = \left( C^2_{oo} + C^2_{o1}X_1 + \sum_{i=2}^{n-m} C^2_{oi}Z_i \right) 1 + \left( C^2_{10} + C^2_{11}X_1 + \right.$$

$$\left. \sum_{i=2}^{n-m} C_{1i}Z_i \right) X_1 + \ldots\ldots + \sum_{h=2}^{n-m} \left( C^2_{ho} + C^2_{h1}X_1 + \right.$$

$$\left. \sum_{i=2}^{n-m} C^2_{hi} Z_i \right) Z_h$$

Variabel C dengan pangkat 2 menunjukkan bilangan tetap pada iterasi ke-2.

$Q^2$ : fungsi pada iterasi ke-2.

Jadi terbukti bahwa harga iterasi ke-2 dipengaruhi iterasi ke-1.



Sehingga didapat :

$$Q^2 = \left( C^2_{oo} + C^2_{o1}X_1 + \sum_{i=2}^{n-m} C^2_{o1}Z_i \right) 1 + \left( C^2_{10} + C^2_{11}X_1 + \right.$$

$$\sum_{i=2}^{n-m} C^2_{1i} Z_i \;) \; X_1 + \ldots\ldots + \sum_{h=2}^{n-m} ( \; C^2_{ho} + C^2_{h1} X_1 +$$

$$\sum_{i=2}^{n-m} C^2_{hi} \; Z_i \;) \; Z_h$$

Variable C dengan pangkat 2 menunjukkan bilangan tetap pada iterasi ke-2.

$Q^2$ : fungsi pada iterasi ke-2

Jadi terbukti bahwa harga iterasi ke-2 dipengaruhi iterasi ke-1.

BUKTI 2:

Bila $\frac{\partial Q^1}{\partial Z_1} = 0$ dan sudah berada pada daerah feasibel.

Pada kejadian ini kita awali dengan variable baru yang tidak ada pada fungsi kendala, yaitu $\mu_1$

Untuk selanjutnya $\mu_1$ disebut improper-variable; yang berharga :

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2} \frac{\partial Q^1}{\partial Z_1}$$

Dari definisi 26 $\mu_1 = \tfrac{1}{2} \frac{\partial Q^1}{\partial Z_1} = C^1_{1o} + \sum_{h=1}^{n-m} C^1_{1h} \; Z_h$

$\mu_1 = C^1_{1o} + \sum_{h=1}^{n-m} C^1_{1h} \; Z_h$ , index 1 pada $\mu_1$ menunjukkan bahwa $\mu_1$ proper-variable pertama yang digunakan.

Untuk iterasi ke-2 dipilih titik-titik yang menjadikan $\mu_1 = 0$ titik-titik tersebut adalah dari variable independent.

Sehingga pada iterasi ke-2 variable independent adalah :

$\mu_1$ , $Z_2$ , $Z_3$ .... $Z_{n-m}$ sedangkan $Z_1$ yang sudah menjadi variable basis menjadi dependen variable.



$$\mu_1 = C^1_{1o} + \sum_{h=1}^{n-m} C^1_{1h} \; Z_h$$

$$\mu_1 = c^1_{1o} + c^1_{11} z_1 + \sum_{h=2}^{n-m} c^1_{1h} z_h$$

$$z_1 = \frac{\mu_1}{c^1_{11}} - \frac{c^1_{1o}}{c^1_{11}} - \sum_{h=2}^{n-m} \frac{c^1_{1h}}{c^1_{11}} z_h$$

$$z_1 = d^2_{11} \mu_1 + d^2_{1o} + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{1h} z_h \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Padahal :

$$X_g = d^1_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^1_{gh} z_h, \; g = 1,2, \ldots\ldots m \; \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_g = d^1_{1o} + d^1_{11} z_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d^1_{gh} z_h, \; g = 2,3,\ldots\ldots m \ldots\ldots (3)$$

Berdasarkan persamaan 1 dan 3 didapat :

$$X_g = d^2_{go} + d^2_{g1} \mu_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d^2_{gh} z_h \, ,$$

$$g = 1 \, , \, 2 \, , \, \ldots\ldots \, m \, , \, m + 1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Menurut teorema 5 :

Maka persamaan $Q^2$ dapat dinyatakan dengan variable independen baru yaitu $z_2, z_3, \ldots\ldots z_{n-m}$ ( $z_1$ menjadi basis )

Sehingga dengan menggunakan persamaan (4) kita dapatkan harga $z_2, z_3, \ldots\ldots z_{n-m}$ dan setelah dieleminasikan ke persamaan $Q^2$ didapat :

$$Q^2 = ( c^2_{oo} + c^2_{o1} \mu_1 + \sum_{i=2}^{n-m} c^2_{oi} z_i ) \, 1 + ( c^2_{1o} + c^2_{11} \mu_1$$



$$+ \sum_{i=1}^{n-m} c^2_{1i} z_i ) \mu_1 + \ldots\ldots + \sum_{h=2}^{n-m} ( c^2_{h0} + c^2_{hi} \mu_i$$

$$\sum_{i=2}^{n-m} C_{hi}^{2} \quad Z_i \;) \; Z_h$$

Sehingga terbukti bahwa harga iterasi ke-2 dipengaruhi harga iterasi ke-1.

Pada Pembuktian 1 :

$$X_g = d_{go}^2 + d_{gl}^2 X_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d_{gh}^2 Z_h \quad \text{dengan } g = 2,3,\ldots m,m+1$$

Pada pembuktian 2 :

$$X_g = d_{go}^2 + d_{gl}^2 \mu_1 + \sum_{h=2}^{n-m} d_{gh}^2 Z_h \quad \text{dengan } g = 1,2,\ldots m,m+1$$

Terhadap ke-dua pembuktian tersebut terdapat perbedaan batas g . Hal ini disebabkan adanya tambahan variabel $\mu_1$ (improper variable ). Sehingga timbul satu lagi variable basis.

3.3. PENYELESAIAN PROGRAM DENGAN METODE BEALE

Dalam sub bab ini akan dibahas dua cara yang merupakan Metode Beale. Kedua cara itu adalah sebagai berikut :

3.3.1. PENYELESAIAN PROGRAM KWADRATIK KONVEK DENGAN ITERASI

Dalam iterasi ini akan diawali dengan pengambilan harga iterasi I yaitu harga $X_i = 0$ , $i = 1 , 2 , \ldots\ldots\ldots n$
Hal ini dengan pertimbangan bahwa fungsi kendala $A\bar{x}=b$ dan $x \geqslant 0$.

Anggap bahwa Q(x) terwakili pada iterasi ke-k sebagai suatu fungsi dengan variabel independen ( n - m ) buah. Misalkan variabel independen tersebut : $Z_1^k$ , $Z_2^k$ , ... $Z_{n-m}^k$

yang berharga sama dengan 0 pada iterasi ke-k.

Maka :

$$Q ( x ) = Q^k ( Z_1^k , Z_2^k , \ldots\ldots Z_{n-m}^k )$$

menurut teorema 5 :

Maka :

$$Q(x) = \left( C_{oo}^{k} + \sum_{i=1}^{n-m} C_{oi}^{k} Z_i \right) 1 + \sum_{h=1}^{n-m} \left( C_{ho}^{k} + \sum_{i=1}^{n-m} C_{hi}^{k} Z_i \right) Z_h$$

dimana $C_{hi}^{k} = C_{ih}^{k}$ , $i = h = 0 , 1 , \ldots n-m$

$C_{hh}^{k} \geqslant 0$ , $h = 1 , 2 , \ldots\ldots n-m$

( karena Q = konvex )

DEFINISI 28 :

Jika s buah variabel $Z_h^k$ dapat dinyatakan dengan free-variabel yang telah muncul pada iterasi sebelumnya , maka : ( n - m - s ) buah variabel $Z_h^k$ dapat dinyatakan dengan proper-variabel.

DEFINISI 29 :

Jika $X_{vg}$ : ( $g = 1 , 2, \ldots\ldots m + s$ ) proper-variabel yang berharga positip pada iterasi ke-k dan sebagai basis . Maka :

$$X_{vg} = d_{go}^{k} + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^{k} Z_h^{k} \quad , g = 1 , 2 , \ldots m + s$$

DEFINISI 30 :

Jika pada iterasi ke-k dipenuhi

$\dfrac{\partial Q^k}{\partial Z_h^k} \geqslant 0$ untuk $Z_h^k$ = variabel pada persamaan kendala.

dan

$\dfrac{\partial Q^k}{\partial Z_h^k} = 0$ untuk $Z_h^k$ = free variabel.

Maka Iterasi telah mencapai optimal.

DEFINISI 31 :

Jika definisi 30 tidak dipenuhi

yang lebih kecil pada semua harga Z kecuali $Z_p^k = 0$

DEFINISI 32 :

$Z_p^k = 0$ pada definisi 31 harus dinyatakan dengan variabel lain yang menjadikan $Z_p^k = 0$ yaitu salah satu variabel basis atau free variabel baru yang didapat dari :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial Q^k}{\partial Z_p^k}\,.$$

Langkah Iterasi selanjutnya dapat dibuat sebagai berikut

Ambil $Z_p^k$ : variabel yang tidak memenuhi.

$$\frac{\partial Q^k}{\partial Z_h^k} \geqslant 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Q^k}{\partial Z_h^k} = 0$$

Sehingga $\frac{1}{2}\,\frac{\partial Q^k}{\partial Z_p^k} = C_{po}^k < 0$

$\frac{1}{2}\,\frac{\partial Q^k}{\partial Z_p^k} = C_{po}^k > 0$ , tetapi $Z_p^k$ : free variabel

DEFINISI 33 :

Jika salah satu dari variabel yang tidak memenuhi definisi adalah free variabel maka free variabel tersebut dipilih sebagai variabel yang akan diubah ( dinyatakan dengan variabel lain ) atau dijadikan variabel basis.

Harga $Z_p^k$ dapat positip dan dapat pula negatip, hal ini didapat dari perubahan dependent variabel dan $\frac{\partial Q^k}{\partial Z_p^k}$.

Harga $Z_p^k$ dapat bertambah atau berkurang tanpa menyebabkan salah dari dependent variabel atau $\frac{\partial Q^k}{\partial Z_p^k} = 0$. Hal ini terjadi



jika : $d_{gp}^k \geqslant 0$ atau $d_{gp}^k \leqslant 0$ untuk semua g dan $C_{pp}^k = 0$

Jika hal ini sampai terjadi maka program tidak dapat diselesaikan dengan cara ini.

Dengan cara lain kita selidiki kemungkinan-kemungkinan untuk dapat diselesaikan.

KEMUNGKINAN I.

$$C^k_{pp} = 0 \text{ atau } \frac{|C^k_{po}|}{C^k_{pp}} \geq \text{Min} \left\{ \frac{d^k_{go}}{|d^k_{gp}|} \quad d^k_{gp} < 0 \right\}$$

( Jika $C^k_{po} > 0$ maka $Z^k_p$ akan berkurang sampai harga minimum yang diperoleh dari harga $d^k_{gp} > 0$ untuk semua harga g )

Dalam kemungkinan I ini $\frac{\partial Q^k}{\partial Z^k_p} \neq 0$ untuk semua titik di dalam daerah feasibel.

$$\text{Minimum} \left\{ \frac{d^k_{go}}{|d^k_{gp}|} \;\middle|\; d^k_{gp} < 0 \right\} \text{ berlaku untuk } g = q$$

Maka iterasi berikutnya dibentuk variabel basis $X_{vq}$ dan semua $Z^k_h$ di mana $h \neq p$ berharga nol.

Jika definisi 29

$$X_{vq} = d^k_{go} + \sum_{h=1}^{n-m} d^k_{gh} Z^k_h \quad , g = 1 , 2 , \ldots\ldots m + s$$

dinyatakan dalam $Z^k_p$ maka akan diperoleh :

$$Z^k_p = - \frac{d^k_{go}}{d^k_{gp}} + \frac{1}{d^k_{gp}} X_{vq} - \sum_{h \neq p} \frac{d^k_{gh}}{d^k_{gp}} \cdot Z^k_h$$

KEMUNGKINAN II.

Harga-harga $\frac{\partial Q^k}{\partial Z^k_p} = 0$ , sebelum semua dependen variabel terletak dalam daerah feasibel.



Hal ini dapat terjadi jika :

$$C^k_{pp} > 0 \text{ dan } \frac{|C^k_{po}|}{C^k_{pp}} < \text{Min} \left\{ \frac{d^k_{go}}{|d^k_{gp}|} \;\middle|\; d^k_{gp} < 0 \right.$$

$$\left. \text{atau } d^k_{gp} > 0 \right\}$$

Dalam kemungkinan II ini diawali dengan free variabel baru $\mu_r$ yang didefinisikan pada Teorema 6 bukti 2 :

$$\mu_r = \tfrac{1}{2} \frac{\partial Q^k}{\partial Z^k_p} = C^k_{po} + \sum_{h=1}^{n-m} C^k_{ph} Z^k_h$$

Sehingga :

$$Z^k_p = -\frac{C^k_{po}}{C^k_{pp}} + \frac{1}{C^k_{pp}} \mu_r - \sum_{h \neq p} \frac{C^k_{ph}}{C^k_{pp}} Z^k_h$$

Pada iterasi ke- ( k + 1 ) , $\mu_r = 0$ untuk semua harga $Z^k_h$ ( $h \neq p$ ) dan menggantikan $Z^k_p$ sebagai independen variabel.

DEFINISI 34 :

Pada iterasi ke- ( k + 1 ) berlaku :

1. kemungkinan I :

$$Z^{k+1}_p = X_{vq}$$

2. kemungkinan II:

$$Z^{k+1}_p = \mu_r \text{ dan } Z^{k+1}_h = Z^k_h \text{ untuk } h \neq p$$

DEFINISI 35 :

Maka langkah berikutnya akan didapatkan persamaan $Z^k_p$ yang tidak mungkin berharga nol. Sehingga $Z^k_p$ dapat di - nyatakan sebagai variabel basis, sebagai fungsi dari variabel independen : $Z^{k+1}_1, \dots Z^{k+1}_{n-m}$



$$Z^k_p = e_o + \sum^{n-m} e_h Z^{k+1}_h$$

di mana :

1. $e_h = - \dfrac{d^k_{gh}}{d^k_{gp}}$ untuk $h \neq p$

$e_p = \dfrac{1}{d^k_{gp}}$

ini berlaku jika $Z^{k+1}_p$ variabel independen dari $X_{vq}$

( KEMUNGKINAN I )

2. $e_h = - \dfrac{C^k_{ph}}{C^k_{pp}}$ untuk $h \neq p$

$e_p = \dfrac{1}{C^k_{pp}}$

berlaku jika : $Z^{k+1}_p$ free-variabel dari $\mathcal{M}_r$

( KEMUNGKINAN II )

**TEOREMA 7 :**

$Q^k$ : harga fungsi sasaran pada iterasi ke-k

Maka :

$$Q^k = Q^{k+1} ( Z^{k+1}_1 , Z^{k+1}_2 , \ldots\ldots Z^{k+1}_{n-m} )$$

BUKTI :

$$Q^k = Q^k ( Z^k_1 , Z^k_2 , \ldots Z^k_{n-m} )$$

Menurut teorema 5 :

$$Q^k = ( C^k_{oo} + \sum_{i=1}^{n-m} C^k_{oi} Z^k_i ) 1 + \sum_{h=1}^{n-m} ( C^k_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} C^k_{hi} Z^k_i ) \cdot Z^k_h$$

Menurut definsi 34 : kemungkinan II :

$$Z^{k+1}_h = Z^k_h \qquad \text{untuk } h \neq p$$

Maka :

$$Q^k = ( \bar{C}_{oo} + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{C}_{oi} Z_i^{k+1} ) 1 + \sum_{h=1}^{n-m} ( \bar{C}_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{C}_{hi} Z^{k+1}_i ) Z^k_h$$



di mana :

$\bar{C}_{hi} = C^k_{hi} + C^k_{hp}\, e_i$ $\quad h , i = 0 , 1 , \ldots . m - m$

dengan $i \neq p$

Menurut definisi 35 :

$$Z_p^k = e_o + \sum_{h=1}^{n-m} e_h\ Z_h^{k+1}$$

Maka :

$$Q^k = \left( \bar{C}_{oo} + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{C}_{oi}\ Z_i^{k+1} \right) 1 + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq p}}^{n-m} \left( \bar{C}_{ho} + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{C}_{hi}\ Z_i^{k+1} \right) Z_h^{k+1}$$

$$+ \left( \bar{C}_{po} + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{C}_{pi}\ Z_i^{k+1} \right) \left( e_o + \sum_{h=1}^{n-m} e_h\ Z_i^{k+1} \right)$$

$$Q^k = \left( C_{oo}^{k+1} + \sum_{i=1}^{n-m} C_{oi}^{k+1} Z_i^{k+1} \right) 1 + \sum_{h=1}^{n-m} \left( C_{ho}^{k+1} + \sum_{i=1}^{n-m} C_{hi}^{k+1}\ Z_i^{k+1} \right) Z_h^{k+1}$$

$$= Q^{k+1} \left( Z_1^{k+1} , Z_2^{k+1} , \ldots\ldots, Z_{n-m}^{k+1} \right)$$

di mana :

$$\left. \begin{array}{l} C_{hi}^{k+1} = \bar{C}_{hi} + \bar{C}_{pi}\ e_h \\ \text{dan} \\ C_{pi}^{k+1} = \bar{C}_{pi}\ e_p \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} h , i = 1 , 2 , \ldots\ldots n-m \\ h \neq p \end{array}$$

Jadi terbukti $Q^k = Q^{k+1} \left( Z_1^{k+1} , Z_2^{k+1}, \ldots\ Z_{n-m}^{k+1} \right)$

Terbukti.

TEOREMA 8 :

Pada iterasi ke-( k + 1 ) maka variabel-variabel kendala dapat ditulis :



$$X_g = d_{go}^{k+1} + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^{k+1}\ Z_h^{k+1}$$

Menurut definisi 24 :

Pada iterasi ke-1 :

$$X_g = d_{go}^1 + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^1 Z_h^1$$

Menurut teoerema 6 :

$$X_g = d_{go}^2 + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^2 \; Z_h^2 \qquad \text{pada iterasi ke-2}$$

$$X_g = d_{go}^k + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^k \; Z_h^k \qquad \text{pada iterasi ke-k}$$

Jadi pada iterasi ke-(k+1)

$$X_g = d_{go}^{k+1} + \sum_{h=1}^{n-m} d_{gh}^{k+1} \; Z_h^{k+1}$$

di mana :

$$\left.\begin{aligned} d_{gh}^{k+1} &= d_{gh}^k + d_{gp}^k \; e_h \\ d_{gp}^{k+1} &= d_{gp}^k \; e_p \end{aligned}\right\} \text{untuk } h \neq p$$

Terbukti.

DEFINISI 36 :

Jika independen pada iterasi ke-(k+1) adalah $Z_p^{k+1}$ merupakan free variabel, maka :

$$C_{hp}^{k+1} = C_{pi}^{k+1} = 0 \text{ untuk } h \neq p \text{ dan } i \neq p$$

DEFINISI 37 :

Jika independen variabel yang baru ( $Z_p^{k+1}$ ) merupakan free variabel maka :

$$C_{pi}^{k+1} = C_{hp}^{k+1} = 0 \;\; \text{untuk } h \neq p \text{ dan } i \neq p$$



DEFINISI 38 :

$C^k_{hi} = C^k_{ih} = 0$ untuk semua $h \neq i$ dan

Jika $Z^{k+1}_p$ merupakan free variabel

maka :

$C^{k+1}_{hi} = C^{k+1}_{ih} = 0$ untuk semua $h \neq i$

DEFINISI 39 :

Pada iterasi ke-k matrix $C^k_{hi}$ merupakan matrix normal jika :

$C^k_{oh} = C^k_{ho} = o$ untuk semua free variabel $Z^k_h$.

TEOREMA 9 :

Titik optimal akan didapat setelah sejumlah iterasi tertentu yang berhingga

BUKTI :

Misal kita sudah sampai pada iterasi ke-k

Menurut definisi 39 matrix $C^k_{hi}$ : normal maka :

fungsi sasaran Q akan dapat dinyatakan dengan free variabel yang non linier. Akibatnya harga Q tidak dapat berkurang lagi meskipun salah satu dari $Z^k_h$ ( independen variabel ) menjadi positip.

Jika tidak terjadi degerate, maka harga Q akan selalu berkurang pada setiap iterasi.

Berdasarkan ke-2 hal tersebut diatas maka tidak mungkin membentuk dua matrix normal dengan kombinasi yang sama dari independen variabel.

Akibatnya :

Kombinasi tersebut tetap ( tunggal ) maka sesudah beberapa langkah tertentu ( iterasi tertentu ) akan selalu didapat matrix $C^k_{hi}$ dalam bentuk normal.

Sehingga iterasi akan berakhir pada bilangan bulat tertentu.

Terbukti.

### 3.3.2. PENYELESAIAN PROGRAM KWADRATIK KONVEX DENGAN TABEL SIMPLEX OBYEKTIF

Dengan cara tabel simplex obyektif ini akan diperoleh perhitungan yang sistematis. Hal ini ditempuh untuk memudahkan pembentukan harga-harga $d_{gh}$ dan $C_{hi}$ pada setiah iterasi. Jadi rumus-rumus yang berlaku pada iterasi berlaku juga di sini. Dan urutan langkah pada cara tabel simplex ini merupakan cara penggunaan rumus pada cara iterasi secara lebih sederhana dan cepat.

Tabel simplex obyektif ini dibagi menjadi 2 bagian :

1. Bagian simplex.

   Letaknya ; bagian atas dari tabel simplex obyektif

   Elemennya: terdiri dari $d_{gh}$
   yaitu koefisien dari dependen basis variabel sebagai fungsi dari independen variabel.

2. Bagian obyektif .

   Letaknya : bagian bawah dari tabel simplex obyektif.

   Elemennya: terdiri dari $C_{hi}$
   yaitu koefisien dari independen variabel fungsi Q ( X ) : fungsi sasaran / obyektif

Pada iterasi ke-k tabel lengkapnya dapat ditulis sebagai berikut :

| | $1$ | $Z_1^k$ .......... $Z_{n-m}^k$ | |
|---|---|---|---|
| **BAGIAN SIMPLEX** $X_1$ | $d_{1o}^k$ | $d_{11}^k$ .......... | $d_{1\ n-m}^k$ |
| $X_2$ | $d_{2o}^k$ | $d_{21}^k$ .......... | $d_{2\ n-m}^k$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $X_n$ | $d_{no}^k$ | $d_{n1}^k$ .......... | $d_{n\ n-m}^k$ |
| **BAGIAN OBYEKTIF** $1$ | $C_{oo}^k$ | $C_{o1}^k$ .......... | $C_{o\ n-m}^k$ |
| $Z_1^k$ | $C_{10}^k$ | $C_{11}^k$ .......... | $C_{1\ n-m}^k$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Z_{n-m}^k$ | $C_{n-m\ o}^k$ | $C_{n-m\ 1}^k$ ...... | $C_{n-m\ n-m}^k$ |

TABEL 1

Untuk mengisi baris 1 bagian simplex :

$d_{1o}^k$ , $d_{11}^k$ , ........ $d_{1\ n-m}^k$ adalah sebagai berikut :

Tulis persamaan kendala : $X_1$ sebagai fungsi dari

$1$ , $Z_1^k$ , $Z_2^k$ , ....... $Z_{n-m}^k$

Kemudian tulis $d_{1o}^k$ , $d_{11}^k$ , ..... $d_{n-m}^k$ yang merupakan koefisien dari $1$ , $Z_1^k$ , $Z_2^k$ , ....... $Z_{n-m}^k$

Untuk mengisi baris ke-2 bagian obyektif :

Fungsi obyektid sebagai fungsi dari $1$ , $Z_1^k$ , $Z_2^k$,.... $Z_{n-m}^k$

Tulis koefisien dari variabel $Z_1^k$ yaitu :

$C_{1o}^k$ , $C_{11}^k$ , ...... $C_{1\ n-m}^k$

Begitu juga untuk baris-baris yang lainnya.

DEFINISI 40 :

Untuk setiap $X_g$ dari tabel yang salah satunya adalah $Z_h^k$ berlaku $X_g = Z_\ell$ maka $d_{gh} = 0$ untuk $h \neq \ell$ dan $d_{g\ell} = 1$

DEFINISI 41 :

Kolom tabel disebut kolom X

Jika variabel kolom $Z_h$ diisi oleh proper variabel $X_g$.

Kolom tabel kolom $\mu$

Jika variabel kolom $Z_h$ diisi oleh improper varia - bel $\mu_j$

Perubahan dari tabel final ke tabel final berikutnya akan lebih mudah dengan didahului pembentukan tabel interme - diate.

Tabel intermediate juga terdiri dua bagian ; simplex dan obyektif.

1. Bagian simplex elemennya terdiri elemen $d_{gh}^{k+1}$
2. Bagian obyektif elemennya terdiri $\bar{C}_{hi}$

$\bar{C}_{hi}$ : koefisien dari dependen variabel baru dari persamaan Q setelah diadakan substitusi dengan $Z_p^k$

Sesuai dengan teorema 7

$$\bar{C}_{hp} = C_{hp}^k \cdot e_p$$

$$\bar{C}_{hi} = C_{hi}^k + C_{hp}^k \, e_i \qquad \text{dan}$$

Sesuai dengan teorema 8

$$d_{gp}^{k+1} = d_{gp}^k \cdot e_p$$

$$d_{gh}^{k+1} = d_{gh}^k + d_{gp}^k \, e_h$$

Kita akan dapat mengisi tabel intermediate.

Tabel intermediate dapat ditulis sebagai berikut :

| | | 1 | $Z_1^{k+1}$ | .......... | $Z_{n-m}^{k+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| TABEL SIMPLEX | $X_1$ | $d_{1o}^{k+1}$ | $d_{11}^{k+1}$ | .......... | $d_{1\ n-m}^{k+1}$ |
| | $X_2$ | $d_{20}^{k+1}$ | $d_{21}^{k+1}$ | .......... | $d_{2\ n-m}^{k+1}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| | $X_n$ | $d_{no}^{k+1}$ | $d_{n1}^{k+1}$ | .......... | $d_{n\ n-m}^{k+1}$ |
| TABEL OBYEKTIF | 1 | $\bar{C}_{oo}$ | $\bar{C}_{o1}$ | .......... | $\bar{C}_{o\ n-m}$ |
| | $Z_1^k$ | $\bar{C}_{1o}$ | $\bar{C}_{11}$ | .......... | $\bar{C}_{1\ n-m}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| | $Z_{n-m}^k$ | $\bar{C}_{n-m\ 0}$ | $\bar{C}_{n-m\ 1}$ | .......... | $\bar{C}_{n-m\ n-m}$ |

TABEL 2

( TABEL INTERMEDIATE )

Kemudian dari tabel intermediate ke tabel final berikutnya :

1. Elemen bagian simplex tidak berubah.
2. Elemen bagian obyektif berubah menurut :

   rumus :

$$C_{pi}^{k+1} = \bar{C}_{pi} \cdot e_p$$

LANGKAH-LANGKAH PENYELESAIAN DENGAN TABEL SIMPLEX-OBYEKTIF

1. Lihat elemen $C_{oh}^k$ setelah elemen pertama ( $h > 0$ )

   a. Jika baris pertama dari semua kolom $\mu$ = o dan semua kolom X berharga non-negatip maka tabel optimal ( langkah ini sesuai dengan definisi 30 )

   b. Jika elemen perta ma dari beberapa kolom $\mu \neq 0$ maka salah satu dari kolom $\mu$ tersebut dipilih sebagai kolom yang akan diubah.

c. Jika elemen pertama dari kolom $\mu$ = 0 atau tidak ada kolom $\mu$ sementara masih ada beberapa kolom X mempunyai elemen negatif maka salah satu dari kolom X tersebut dipilih untuk diubah.

(langkah ini sesuai dengan definisi 32 )

2. Bagilah $|C^k_{op}|$ yang terpilih dalam aturan 1 dengan elemen diagonal yang sekolom yaitu $C^k_{pp}$.

( Langkah ini sesuai dengan kemungkinan I )

Bagilah elemen kolom pertama bagian simplex : $d^k_{go}$ dengan elemen $|d^k_{gp}|$ dengan syarat tanda $C^k_{op}$ harus sama dengan tanda $d^k_{gp}$

( kedua-duanya positip atau negatif )

( langkah ini sesuai dengan kemungkinan II )

Jika :

a. $\dfrac{|C^k_{op}|}{C^k_{pp}} < \dfrac{d^k_{go}}{|d^k_{gp}|}$, maka baris ke-p pada bagian obyektif dipilih sebagai baris yang akan diubah.

b. $\dfrac{|C^k_{op}|}{C^k_{pp}} \geqslant \dfrac{d^k_{go}}{|d^k_{gp}|}$, maka baris ke-g pada bagian simplex dipilih sebagai baris yang diubah.

DEFINISI 42 :

Elemen interseksi dari baris dan kolom yang diubah disebut elemen pivot.

Untuk kejadian 2a. elemen pivot = $C^k_{pp}$

Untuk kejadian 2b. elemen pivot = $d^k_{gp}$

DEFINISI 43 :

Jika perubah baris terjadi pada bagian simplex maka dalam tabel intermediate variabel $Z^k_p$ diganti oleh variabel pada baris yang berubah.

DEFINISI 44 :

Jika perubahan baris terjadi pada bagian obyektif maka dalam intermediate variabel $Z_p^k$ diganti oleh variabel baru $\mu_r$.

3. Langkah ini untuk mengisi tabel intermediate.

Elemen-elemen pada kolom tabel intermediate yang sesuai dengan kolom yang berubah diperoleh dengan membagi elemen kolom tersebut dengan elemen pivot.

( langkah ini sesuai dengan definisi 35 )

Langkah berikutnya sesuai dengan rumus :

a. $d_{gp}^{k+1} = d_{gp}^k \; e_p$

b. $\bar{C}_{hp} = C_{hp}^k \; e_p$ dan

$\bar{C}_{hi} = C_{hi}^k + C_{hp}^k \; e_i$ dimana h , i = 0,1,.... n-m

dengan i=p

Ini sesuai dengan teorema 7 dan teorema 8.

4. Kolom sisa pada tabel intermediate diperoleh dengan jalan sebagai berikut :

a. Carilah elemen interseksi antara kolom yang berubah ( kolom ke-p ) dengan baris ke-g ( g : urutan kolom yang akan diisi ).

b. Kalikan elemen pada a. dengan elemen kolom yang diperoleh pada no. 3 di atas.

c. Hasil perkalian point b. digunakan untuk mengurangi elemen pada kolom dari tabel final sebelumnya, sesuai kolom yang akan diisi.

langkah ini merupakan kombinasi antara :

definisi 35 $\quad Z_p^k = e_o + \sum_{h=1}^{n-m} e_h \; Z_h^{k+1}$ dan



teorema 8 $\quad d_{gh}^{k+1} = d_{gh}^k + d_{gp}^k \; e_h$

$$d_{gp}^{k+1} = d_{gp}^{k}\, e_p \quad \text{untuk } h \neq p$$

serta rumus

$$\bar{C}_{hi} = C_{hi}^{k} + C_{hp}^{k}\, e_i \qquad i = h = 0,1,..n-m$$

dengan $i \neq p$

$$\bar{C}_{hp} = C_{hp}^{k}\, e_p$$

5. Langkah ini untuk mengisi tabel final berikutnya ( tabel ke- ( k + 1 ) )

   a. Untuk mengisi bagian simplex :

      Elemen bagian simplex tabel intermediate dipindah ke bagian simplex tabel final.

   b. Untuk mengisi bagian obyektif :

      Baris yang berubah ke-2 ( baris berubah pada tabel intermediate ) memotong kolom berubah pada diagonal utama bagian obyektif.

   c. Setiap elemen pada baris berubah ke-2 tabel intermediate dibagi elemen privot. Hasil ini merupakan baris pada tabel final.

   d. Variabel baris berubah ke-2 diganti dengan variabel kolom berubah tabel intermediate.

      ( sesuai definisi 43 dan definisi 44 )

Langkah ini berdasarkan pada :

$$C_{hi}^{k+1} = \bar{C}_{hi} + \bar{C}_{pi}\, e_h$$

$$C_{pi}^{k+1} = \bar{C}_{pi}\, e_p \quad \text{dengan } h = p$$

DEFINISI 45 :

Jika baris berubah asli berada pada bagian obyektif maka baris berubah ke-2 sama dengan yang pertama.

6. Untuk mengisi elemen baris sisa pada tabel final misal baris ke-h adalah sebagai berikut :

   a. Lihat tabel final sebelumnya

Carilah elemen interseksi baris berubah dengan kolom ke-h.

b. Kalikan elemen pada a. dengan baris berubah ke-2 tabel final.

c. Hasil point b. untuk mengurangi baris ke-h bagian obyektif tabel intermediate.

d. Hasil d.merupakan elemen baris sisa final tabel yang baru.

Langkah ini sesuai dengan rumus :

$$C_{hi}^{k+1} = \bar{C}_{hi} + \bar{\bar{C}}_{pi} \cdot e_h$$

7. Untuk langkah berikutnya sama dengan langkah 1. sampai didapat tabel optimal seperti definisi 30.