BAB. II

KONSEP - DASAR

## 2.1. MATRIKS

Matriks mempunyai peran yang sangat penting dalam penyelesaian program kwadratik konvex ini. Dan sebelum melangkah ke program tersebut akan dibahas terlebih dahulu konsep dasar tentang matriks.

DEFINISI : 1

Matriks adalah suatu tabel bilangan yang diatur oleh baris dan kolom yang berbentuk empat persegi panjang .

Sehingga dapat ditulis :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut terdiri dari : m baris dan n kolom

$a_{ij}$ adalah elemen matriks baris ke-i kolom ke-j

dimana $i = 1,2,\ldots\ldots m$

$j = 1,2,\ldots\ldots n$

DEFINISI : 2

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom sama. Jadi berdasar definisi 1 berlaku $m = n$

DEFINISI : 3

Diagonal utama suatu matriks bujur sangkar adalah elemen $a_{ij}$ dimana $i = j$ .

Sehingga dapat ditulis :

Sehingga dapat ditulis :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonal utama

DEFINISI : 4

Jika di luar diagonal utama elemen matriks tersebut adalah 0 maka matriks disebut matriks diagonal .

DEFINISI : 5

Determinan adalah tabel bilangan yang disusun oleh baris dan kolom yang berbentuk bujur sangkar dan mempunyai harga numerik.

DEFINISI : 6

Minor ( $M_{ij}$ ) dari elemen $a_{ij}$ adalah determinan suatu matriks A yang dihilangkan baris ke-i dan kolom ke-j

DEFINISI : 7

Kofaktor ( $A_{ij}$ ) dari elemen $a_{ij}$ adalah $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$

DEFINISI : 8

Harga determinan dari suatu matriks bujur sangkar A dapat ditulis :

$$\det A = |A| = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$
$$= \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}\ (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

DEFINISI : 9

Matriks simetri adalah suatu matriks dimana elemen $a_{ij}$ ( $i \neq j$ ) matriks tersebut berlaku $a_{ij} = a_{ji}$

DEFINISI : 10

Transpose matriks A ditulis A' adalah matriks A dimana elemen baris dan kolomnya saling ditukar.

## 2.2. FUNGSI KWADRATIK KONVEX

Suatu fungsi kwadratik dengan n buah variabel yaitu : $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ dapat ditulis sbb.

DEFINISI : 11

$$
\begin{aligned}
Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) &= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_{1n}x_n)x_1 \\
&+ (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_{2n}x_n)x_2 \\
&\vdots \\
&+ (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_{nn}x_n)x_n
\end{aligned}
$$

dimana $c_{ij}$ : bilangan real sebagai koefisiennya.

DEFINISI : 12

Berdasar pada definisi 11 maka fungsi kwadratik dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks.

$Q(x) = X' \cdot C \cdot X$ dimana :

C : matriks simetri

X': transpose matriks X

Contoh definisi 12 :

$$Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_2x_1$$

Dalam perkalian matriks ditulis :

$$Q(x) = (x_1 \;\; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = X' \cdot C \cdot X$$

DEFINISI : 13

Matriks A definit positip jika det $A = |A| \geqslant 0$

Matriks A definit negatif jika det $A = |A| \leqslant 0$

DEFINISI : 14

Suatu himpunan K disebut konvex

jika untuk setiap $x_i$, $x_j \in K$ $(i \neq j)$ dapat ditemukan

$\bar{x} \in K$ sehingga berlaku :

$$\bar{x} = \lambda x_i + (1-\lambda) x_j \quad , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

DEFINISI : 15

Suatu fungsi $f(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

$R^n$ : ruang berdemensi n dan $x \in R^n$

Adalah fungsi konvex dalam himpunan konvex K ,

jika :

Untuk setiap $x_i$, $x_j \in K$ $(i \neq j)$ berlaku :

$f(\lambda x_i + (1-\lambda) x_j) \leqslant \lambda f(x_i) + (1-\lambda) f(x_j)$

dimana : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

DEFINISI : 16

Suatu fungsi $f(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

$R^n$ : ruang berdemensi n dan $x \in R^n$

Adalah fungsi konkaf dalam himpunan konvex K ,

jika :

Untuk setiap $x_i$, $x_j \in K$ $(i \neq j)$ berlaku :

$f(\lambda x_i + (1-\lambda) x_j) \geqslant \lambda f(x_i) + (1-\lambda) \cdot f(x_j)$

dimana : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

TEOREMA : 1

$f(x)$ : fungsi konkaf dalam himpunan konvex K

maka $-f(x)$ adalah fungsi konvex.



Bukti :

Ambil $x_1$, $x_2 \in K$

$f(x)$ fungsi konkaf dalam himpunan konvex K

Menurut definisi 16 berlaku :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$- \left\{ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \right\}$$

$$- \left\{ f(x) : \text{dimana } f(x) \text{ konvex} \right\}$$

Terbukti $-f(x)$ : konvex

TEOREMA : 2

$f(x)$ : fungsi konvex dalam himpunan konvex K

Maka $-f(x)$ adalah fungsi konkaf.

Bukti :

Ambil $x_1, x_2 \in K$

$f(x)$ fungsi konvex dalam himpunan konvex K

Menurut definisi 15berlaku :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$- \left\{ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \right\}$$

$$- \left\{ f(x) : \text{dimana } f(x) \text{ konkaf} \right\}$$

Terbukti $-f(x)$ : Konkaf.

TEOREMA : 3

Jika $Q(x) = X'C \cdot X$ fungsi kwadratik dalam himpunan konvex K. Matriks C definite positip maka $Q(x)$ :konvex .

Bukti :

C definite positip.

Menurut definisi 13 maka $|C| \geqslant 0$ sehingga ,

$$\lambda Z'C\,Z \geqslant \lambda^2 Z'C\,Z \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Ambil $x_1, x_2 \in K$

Maka :

$$\lambda Q(x_1)+(1-\lambda)Q(x_2) = \lambda x_1'Cx_1 + (1-\lambda)x_2'Cx_2$$

$$= \lambda x_2'C(x_1-x_2)+\lambda(x_1-x_2)'Cx_2 +$$

$$+\lambda(x_1-x_2)'C(x_1-x_2) + x_2'Cx_2$$

$$\geq \lambda x_2'C(x_1-x_2)+\lambda(x_1-x_2)'Cx_2+\lambda^2(x_1-x_2)'C(x_1-x_2)+$$
$$+ x_2'Cx_2 .$$
$$= \{\lambda(x_1-x_2) + x_2\}' C \{\lambda (x_1-x_2) + x_2\}$$
$$= \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}' C \{\lambda x_1 +(1-\lambda)x_2\}$$
$$= Q\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}$$

Jadi $\lambda Q(x_1) + (1-\lambda) Q(x_2) \geq Q(\lambda x_1+ (1-\lambda)x_2$

$$Q(\lambda x_1+ (1-\lambda)x_2 \leq \lambda Q(x_1) + (1-\lambda)Q(x_2)$$

Menurut defenisi 15 ,ini syarat konvex

Jadi terbukti bhwa $Q(x)$ : kwadratik konvex

Contoh Teorema : 3

$$Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2+ 4x_2^2$$
$$= 2x_1 - x_1x_2+ 4x_2 - x_2x_1$$
$$Q(x) = ( x_1 \quad x_2 ) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det C = |C| = 9 > 0$$

Jadi $Q(x)$ kwadratik konvex

TEOREMA : 4

Jika $Q(x) = x'C\,x$ fungsi kwadratik dalam himpunan kon - vex K dan C : matriks definit negatif

Maka $Q(x)$ : fungsikonkaf.

Bukti :

C : definite negatif

menurut definisi 13 maka $|C| \leq 0$ sehingga ,

$$\lambda Z'C\,Z \leq \lambda^2 Z'C\,Z \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Ambil $x_1, x_2 \in K$



Maka :

$$\lambda Q(x_1) + (1-\lambda)Q(x_2) = \lambda x_1'C\,x_1+ (1-\lambda)x_2'C\,x_2$$

$$= \lambda x_2'C(x_1-x_2) + \lambda(x_1-x_2)'Cx_2+\lambda(x_1-x_2)'C(x_1-x_2)$$
$$+ x_2'C\,x_2 .$$
$$\leqslant \lambda x_2'C(x_1-x_2)+\lambda(x_1-x_2)'Cx_2+\lambda^2(x_1-x_2)'C(x_1-x_2)+$$
$$+ x_2'C\,x_2$$
$$= \{\lambda(x_1-x_2) + x_2\}'\,C\,\{\lambda(x_1-x_2) + x_2\}$$
$$= \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}'C\,\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}$$
$$= Q\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}$$

Jadi $\quad \lambda Q(x_1) + (1-\lambda)\,Q(x_2) \leqslant Q(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$$Q(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geqslant \lambda Q(x_1) + (1-\lambda)Q(x_2)$$

Menurut definisi 16, ini syarat konkaf

Jadi terbukti bahwa $Q(x)$ : Kwadratik Konkaf.

Contoh Teorema : 4

$$Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$= -2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2x_1$$

$$Q(x) = (\,x_1 \quad x_2\,)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \qquad \det C = |C| = -9 < 0$$

Jadi $Q(x)$ kwadratik konkaf .

## 2.3. KONDISI KUNH TUCKER

Progran tidak linier diketahui :

Meminimalkan : $Z = F(\,x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots x_n)$

dengan kendala: $g_i(x) \geqslant 0 \quad i = 1,2 \ldots\ldots m$



Program ini akan dapat diselesaikan bila memenuhi :

1. $Z = F(\,x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$ differensiabel

dan konvex dimana $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots\ldots n$

2. Setiap kendala $g_i$ differensiabel dan konkaf dimana $g_i(x) \geqslant 0$ dan $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2\ldots\ldots n$

3. F(x) memenuhi kondisi Kunh Tucker.

Kondisi Kunh Tucker tersebut dalam no. 3 adalah :

1. $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j} \geqslant 0 \qquad , \qquad x_j \geqslant 0$

   dan $\qquad x_j \left[ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j} \right] = 0$

   $x_j$ : variabel pada fungsi kendala (proper variabek)

2. $\dfrac{\partial F(x)}{\partial \mu_j} \leqslant 0 \qquad , \qquad \mu_j \geqslant 0$

   dan $\qquad \mu_j \left[ \dfrac{\partial F(x)}{\partial \mu_j} \right] = 0$

   : variabel yang tidak ada dalam fungsi kendala (improper variabel)

DEFINISI : 17

Jika $Q^k$ : harga fungsi pada iterasi ke-k.

$x_j^k$ ( $j = 1,2,\ldots\ldots n$ ) merupakan titik iterasi ke-k dan merupakan titik fesibel. Maka $x_j$ harus memenuhi - Kondisi Kunh Tucker.

DEFINISI : 18

Jika $x_j$ adalah titik yang memenuhi $Ax = b$ dan $x \geqslant 0$ pada fungsi kendala maka $x_j$ : merupakan titik fesibel



DEFINISI : 19

DEFINISI : 19

Jika $x_j$ : titik fesibel dan

sekurang-kurangnya $x_j = 0$ $j = 1, 2, \ldots\ldots n-m$

dimana n : jumlah variabel fungsi obyektif

m : jumlah fungsi kendala

Maka penyelesaian disebut Penyelesaian Fesibel Basis.

Sedangkan variabel $x_j \neq 0$ disebut variabel basis.

DEFINISI : 20

Degenerate adalah suatu program dimana dalam penyelesaian optimal ada variabel basis yang berharga nol