BAB II TEORI PENUNJANG

II.1. DASAR-DASAR DARI ALGORITMA METODE SIMPLEX

Metode atau cara simplex merupakan prosedur interasi secara aljabar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah Program Linier (PL). Untuk mendapatkan penyelesaian optimum fungsi Obyektif, metode simplex menelusuri penyelesaian fisibel basis sedemikian hingga selama proses tersebut berlangsung nilai fungsi obyektif pada setiap tahap interasi makin maju (atau lebih baik) dari pada langkah sebelumnya dan pada akhirnya di peroleh penyelesaian optimum yang diinginkan.

II.1.1. SLACK VARIABLE (PERUBAHAN LONGGAR) DAN ARTIFICIAL VARIABLE (PERUBAH SEMU)

Bentuk soal program linier yang bukan kanonik bisa diubah menjadi Kanonik dengan cara sebagai berikut :

- untuk bentuk :

$$\sum_j a_{ij}\ x_j \leq b_i \qquad (1)$$

ditambah perubah-longgar $Si \geq 0$ sedemikian hingga

$$\sum_j a_{ij}\ x_j + s_i = b_i \qquad (2)$$

- untuk bentuk :

$$\sum_j a_{ij}\ x_j \geq b_i \qquad (3)$$

ditambah perobah-longgar $-si$ dengan $si \geq 0$ dan ditambah perubah-semu $vi \geq 0$ sedemikian hingga

$$\sum_j a_{ij} x_j - s_i + v_i = b_i \qquad (4)$$

- untuk bentuk

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Ada 2 cara untuk menjadikan bentuk kanonik:

1. Diubah menjadi :

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \text{ dan} \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (4\text{-}1)$$

   bentuk kanonik :

$$\sum_j a_{ij} x_j - s_i + v_i = b_i \text{ dan} \qquad (4\text{-}2)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

2. Ditambah dengan perubah semu vi sedemikian hingga

$$\sum_j a_{ij} x_j + v_i = b_i \qquad (4\text{-}3)$$

Dengan demikian soal menjadi berbentuk kanonik & fungsi obyektif yang baru berbentuk :

$$Z = \quad C_j X_j + \quad OS_i + \quad MV_i$$

$$Z = \underline{C}\ \underline{X} + \underline{O}\ \underline{S} + \underline{M}\ \underline{V} \qquad (5)$$

dengan M positif untuk kasus minimum dan M negatif terbesar untuk kasus maximum.

Secara umum bentuk kanonik masalah PL :

Carilah $x \geq 0$ yang memenuhi syarat.

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (6)$$

dan memaximumkan/meminimumkan : $Z = \underline{cx}$, dengan :

$$\underline{x} = (x1, x2, x3, \ldots\ldots, xn)$$

$$\underline{c} = (c1, c2, c3, \ldots\ldots, cn)$$

$$\underline{b} = (b1, b2, b3, \ldots\ldots, bm)$$

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, \ldots\ldots, m,\ j = 1 \ldots n$$

Jika $A\underline{x} = \underline{b}$, pangkat $A = m$, $m < n$, mempunyai penyelesaian maka $\underline{b}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier m kolom matrix A yang indenpenden linier sehingga terdapat penyelesaian dengan paling banyak m variabel yang tidak sama dengan nol dan jika penyelesaian fisibel (P.F) bagi persamaan (6) diatas, maka ada penyelesaian fisibel basis (P.F.B).

II.1.2. <u>Memajukan penyelesaian fisibel basis (B.F.S)</u>

Andaikan suatu masalah P.L sudah berbentuk kanonik seperti bentuk (6) dan sudah terdapat matrix basis $D_{m \times m}$ dan BFS : $\bar{\underline{x}} = D^{-1}\underline{b}$ dengan $\bar{\underline{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_m)'$. Disusun Vektor baris ongkos $\bar{\underline{c}}$ sesuai dengan setiap $\bar{\underline{x}}$, $\bar{\underline{c}} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{c}_m)$ (7)

Nilai fungsi obyektif : $z = \bar{\underline{c}}\,\bar{\underline{x}}$ (8)

Definisikan z_j untuk setiap vektor kolom $\underline{a}_j$ matrix A

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\,\bar{c}_i = \bar{\underline{c}}\,\underline{y}_j \qquad (9)$$

Karena : $\underline{y}_j = D^{-1}\underline{a}_j$, maka $z_j = \bar{\underline{c}}\,\underline{y}_j$ dapat dicari (dihitung) untuk setiap kolom matrix A yang diluar matrix basis D. Suatu kolom D akan diganti (mengganti vektor basis), Misalkan penggantinya

$$\underline{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\,\underline{d}_i \qquad (10)$$

sedangkan yang diganti $\underline{d}_r$ asalkan $y_{rj} \neq 0$. Maka :

$$d_r = \frac{1}{y_{rj}} \underline{a}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \underline{d}_i \qquad (11)$$

B.F.S asli $D\,\underline{\bar{x}} = \underline{b}$ atau $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i\, \underline{d}_i = \underline{b}$ (12)

menjadi : $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) \underline{d}_i + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} \underline{a}_j = \underline{b}$ (13)

Supaya penyelesaian inipun fisibel haruslah :

$$\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0,\ i \neq r \qquad (14)$$

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} \geq 0$$

Untuk $x_r \neq 0$ maka $y_{rj} > 0$. Bila $y_{rj} > 0$ dan $y_{ij} \leq 0$, $i \neq r$ maka (14) dipenuhi. Bila $y_{rj} > 0$ dan $y_{ij} \geq 0$, timbul syarat :

$$\frac{\bar{x}_i}{y_{ij}} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} \geq 0$$

supaya dipenuhi (untuk semua $i \neq r$) maka dipilih :

$$\theta = \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ij}},\ y_{ij} > 0 \right\} \qquad (16)$$

Dengan demikian (14) akan dipenuhi. Vektor basis baru :

$$\underline{d}_i = \underline{d}_i\ ,\ i \neq r\ ,\ \underline{d}_r = \underline{a}_j \qquad (17)$$

Jika B.F.S baru dilambangkan dengan : $\hat{\underline{x}}$, maka :

$$\hat{\underline{x}} = D^{-1}\, \underline{b} \qquad (18)$$

Dari (13) didapat variabel basis baru :

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}},\ i \neq r \qquad (19)$$

$$\hat{x}_r = \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} \tag{20}$$

Dalam hal nilai θ yang diperoleh pada persamaan (16) tidak tunggal, maka penggantian kolom dapat dilakukan terhadap sembarang kolom dari kolom-kolom yang menghasilkan nilai minimum tersebut. Prosedur di atas akan membuat nilai $\bar{x}_r$ = 0 bagi kolom-kolom yang menghasilkan nilai θ tersebut, karena : $\bar{x}_i/y_{ij} = \bar{x}_r/y_{rj}$.
Dengan perkataan lain, jika diperoleh lebih dari satu nilai θ, maka BFS yang baru bersifat merosot.

Jika terjadi θ =0 maka $\bar{x}_r$ = 0, BFS lama merosot, akibatnya dari (19) $\hat{x}_i = \bar{x}_i$, $i \neq r$, dan (20) $\hat{x}_r = 0$ berarti BFS baru merosot.

<u>Nilai fungsi obyektif z sesudah ada SFB baru.</u> Menurut: (8)

$$z_{lama} = z = \underline{\bar{c}}\ \underline{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\ \bar{x}_i \tag{21}$$

$$z_{baru} = \hat{z} = \underline{\hat{c}}\ \underline{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i\ \hat{x}_i \tag{22}$$

sedangkan : $\hat{c}_i = \bar{c}_i$, $i \neq r$, $\hat{c}_r = c_j$ (23)

Jadi yang berubah hanya nilai perubah baru dalam basis, sehingga :

$$\hat{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \bar{c}_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}}\ c_j \tag{24}$$

Suku ke i = r dimana $\bar{c}_r \left(\bar{x}_r - \bar{x}_r \dfrac{y_{rj}}{y_{rj}} \right) = 0$

dapat disisipkan sisipkan pada jumlah di atas dan tidak akan mengubah nilai z, sehingga :

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \bar{x}_i - \frac{x_r}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i y_{ij} + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} c_j$$

mengingat 21 dan 19 maka :

$$\hat{z} = z - \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} z_j + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} c_j \quad \text{atau}$$

$$= z + \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} (c_j - z_j) \text{ mengingat (16)}$$

$$\hat{z} = z + \theta (c_j - z_j) \tag{25}$$

Kesimpulan. Supaya tujuan memajukan penyelesaian fisibel basis (BFS) Pada bagian : II.1. 2 tercapai, maka kita harus memilih vektor pengganti yang tepat. Jika a_j masuk ke basis sebagai pengganti, maka z bertambah dengan : (menurut 25) :

$$\theta (c_j - z_j) = \frac{x_r}{y_{rj}} (c_j - z_j) \tag{26}$$

a. Untuk soal maximum. Supaya tambahan z positif, kita pilih a_k dengan :

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} (c_k - z_k) = \max_j \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}} (c_j - z_j), \; z_j - c_j < 0 \tag{27}$$

atau dengan cara lain :

$$z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j), \; z_j - c_j < 0 \tag{28}$$

Khususnya jika $\underline{x}$ tak merosot, $\hat{z} > z$

b. Untuk soal minimum. Supaya tambahan z negatip pilih a_k dengan :

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}(c_k-z_k) = \min_j \frac{\bar{x}_r}{y_{rj}}(c_j-z_j),\ z_j-c_j > 0 \qquad (29)$$

atau dengan cara lain :

$$c_k-z_k = \max_j \ (z_j - c_j),\ z_j - c_j > 0 \qquad (30)$$

Khususnya, jika $\bar{x}$ tak merosot, maka $\hat{z} < z$

Kolom-kolom di luar matrix basis D. untuk sembarang j,

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ d_i .$$

Jika d_r diganti dengan a_k, maka dengan (11) terdapat :

$$d_r = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} d_i + \frac{1}{y_{rk}} a_k$$

$$a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) d_r = \frac{1}{y_{rk}} a_k \qquad (31)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ d_i$$

dengan $\hat{d}_i = d_i$, $i \neq r$ $\hat{d}_r = a_k$

Maka dari (31) :

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{rj}}{y_{rk}},\ i \neq r \qquad (32)$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \qquad (33)$$

Persamaan (32) dan (33) menunjukan cara mencari $\hat{y}_{ij}$ dan $\hat{y}_{rj}$; hal ini ternyata serupa dengan bentuk (19) dan (20) Penggantian basis dapat dikatakan dengan tehnik teransformasi vektor $\hat{x} = \bar{x} + \bar{x}_r \underline{\emptyset}$ dan $\underline{y} = \underline{y} + y_{rj} \underline{\emptyset}$.

Apabila kita andikan bahwa :

$$\bar{x}_i = y_{io},\ i = 1,\dots,m \ ;\ z = y_{m+1,0} \text{ dan } z_j - c_j$$

$$= y_{m+1,j} \qquad (34)$$

maka transformasi untuk z menjadi :

$$\hat{\bar{y}}_{m+1,0} = y_{m+1,0} + y_{ro} \left(- \frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}}\right) \quad (35)$$

dan transformasi $z_j - c_j$ menjadi :

$$\hat{y}_{m+1,j} = y_{m+1,j} + y_{rj} \left(- \frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}}\right) \quad (36)$$

Jika kita definisikan :

$$\underline{Y}_j = (y_{ij}, \ldots, y_{m+1,j})', \; j = 0,1,\ldots,n \quad (37)$$

maka semua rumus transformasi penggantian basis pada cara simplexdapat diwakili oleh transformasi vektor sebagai berikut :

$$\hat{\underline{Y}}_j = \underline{Y}_j + y_{rj} \, \underline{\emptyset} \, , \; j = 0,1,\ldots,n \quad (38)$$

dimana :

$$\underline{Y}_j = (\, \underline{y}_j, \, y_{m+1,j} \,)', \; j = 0,1,\ldots,n \; ; \text{ dan}$$

$$\bar{\underline{\emptyset}} = \left(\underline{\emptyset} \, , \, - \frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}}\right)$$

Jadi :

$$\underline{Y}_o = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, z)' = (y_{1o}, \ldots, y_{m+1,o})' \quad (39)$$

$$\underline{Y}_j = (y_{1j}, \ldots, y_{m,j}, z_j - c_j)' \quad (40)$$

Atau :

$$\underline{Y}_j = (\, y_{1j}, \ldots, y_{mj}, y_{m+1,j} \,)' \text{dan}$$

$$\bar{\underline{\emptyset}} = \left(- \frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, - \frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}} - 1, - \frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \ldots\ldots, - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}, - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\right)' \quad (41)$$

Rumus (38) adalah penting karena banyak membantu bagi penyelesaian soal-soal P.L baik secara manual maupun dengan komputer.

Nilai : $\hat{z}_j - c_j$. Untuk menghitung $\hat{z}_j - c_j$, kita gunakan definisi :

$$\hat{z}_j - c_j = \hat{c}\, y_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i\, y_{ij} - c_j \qquad (42)$$

Tetapi : $\hat{c}_i = c_i$, $i \neq r$; $\hat{c}_r = c_k$

Menggunakan (32) dan (33) didapat :

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \bar{c}_i \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) + \frac{y_{ij}}{y_{rk}}\, c_k - c_k \qquad (43)$$

Kita sisipkan suku ke $i = r$, $\bar{c}_r\,(y_{rj} - y_{rj}) = 0$ pada (44) didapat :

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, y_{ij} - c_j - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, y_{ik} - c_k \right) \qquad (45)$$

$$\text{atau : } \hat{z}_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$$

bersamaan : (51) memperlihatkan cara menghitung $\hat{z}_j - c_j$ dari $z_j - c_j$; $z_k - c_k$; dan y_{rj} , y_{rk}.

<u>Penyelesaian tak terbatas</u>. Jika a_j terpilih masuk dalam basis dan paling sedikit satu $y_{ij} > 0$, maka dapat diadakan peningkatan jawab. Yang menjadi persoalan ialah bagaimana jika $y_{ij} \leq 0$ untuk semua i.

Persoalan menjadi apakah diperbolehkan adanya m + 1 buah perubah (dalam penyelesaian bernilai nol ? (ialah x_i dan x_j)

$$\text{B.F.S yang diketahui : } \sum_{i=1}^{m} x_i\, d_i = b \qquad (46)$$

$$z = \bar{c}\, \bar{x}$$

Persamaan (46) kita jadikan menjadi bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i d_i - n a_j + n a_j = \underline{b} \text{ dengan n sembarang skalar} \quad (47)$$

Mengingat : $a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} d_i$ (31) maka (47) menjadi

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i d_i - n y_{ij}) d_i + n a_j = \underline{b} \qquad (48)$$

Karena $y_{ij} \leqslant 0$ jika $n > 0$ dan $(\bar{x}_i - n y_{ij}) \geqslant 0$, maka (19) dan (20) akan fisibel dengan (m + 1) buah perubah tidak sama dengan nol, meskipun pada umumnya ini bukan B.F.S.

Perhatikan (48) adalah fisibel untuk $n > 0$.

Untuk kejadian $y_{ij} \leqslant 0$, $n > 0$ di atas:

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{m} c_j x_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_j (\bar{x}_i - n y_{ij}) + c_j n \qquad (49)$$

atau : $\hat{z} = z + n (c_j - z_j)$

Maka dengan mengambil n cukup besar, z lalu menjadi besar untuk $c_j - z_j > 0$ dan menjadi kecil jika $c_j - z_j < 0$.

Kejadian di atas dapat kita simpulkan sebagai berikut :

a. Diketahui B.F.S untuk soal maximum, jika ada a_j di luar basis dengan $z_j - c_j < 0$ dan $y_{ij} \leqslant 0$ ($i = 1,\ldots,m$) maka terdapatlah SF dengan (m + 1) perubah mungkin tidak nol dan nilai fungsi obyektifnya menjadi besar tak terhingga. Jawab disebut tak terbatas.

b. Diketahui B.F.S untuk soal minimum. Jika ada a_j di luar basis dengan $z_j - c_j > 0$ dan $y_{ij} \leq 0$ ($i=1,\ldots,m$) maka terdapatlah SF dengan (m + 1) perubah mungkin tidak nol dan nilai fungsi obyektifnya menjadi kecil tak terhingga. Jawab disebut tak terbatas.

Dalam pelaksanaan penyelidikan penyelesaian tak terbatas hanya dilakukan terhadap vektor a_k yang masuk kedalam basis.

Syarat - Optimal. Andaikan kita dihadapkan kepada suatu masalah P.L yang akan dicari nilai maximum fungsi obyektifnya. Dengan anggapan bahwa tak terdapat kejadian merosot. Maka dengan melangkah satu basis ke basis yang lain seperti telah kita singgung pada permulaan cara simplex, dengan setiap kali mengganti salah satu vektor basis, sejauh masih ada a_j diluar basis dengan $z_j - c_j < 0$ dan paling sedikit satu $y_{ij} > 0$. Pada tiap - tiap langkah memberi nilai z (fungsi obyektifnya) yang makin maju atau naik. Proses ini akan berakhir karena banyaknya basis adalah berhingga. Tetapi proses ini dapat kita batasi pada salah satu dari dua kejadian berikut :

1. Satu atau lebih $z_j - c_j < 0$, dan untuk setiap $z_j - c_j < 0$ $y_{ij} \leq 0$ untuk semua $i=1,..,m$ (m = pangkat matrix basis D).
2. Semua $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua kolom matrix A diluar matrix basis D.

Kejadian 1) akan menghasilkan jawab tak terbatas, dengan demikian bila kita batasi pada kejadian 2) akan menghasilkan jawab optimum.

<u>Dalil 2-1</u>, Misalkan terdapat B.F.S $\bar{x} = D^{-1} b$ sesuai dengan $z_o = \bar{c}\,\bar{x}$. Jika $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua kolom matrix A diluar matrix basis D maka z_o adalah maksimum.

<u>B u k t i :</u> Ambil sembarang penyelesaian fisibel $\underline{x}$ dengan $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ serta :

$$x_1\, \underline{a}_1 + \ldots + x_n\, \underline{a}_n = \underline{b} \tag{51}$$

sesuai dengan :

$$z^* = c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n \tag{52}$$

Sembarang vektor $\underline{a}_j$ dalam A dapat ditulis sebagai kombinasi linier vektor-vektor basis dalam matrix basis D yaitu :

$$\underline{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, \underline{d}_i \tag{53}$$

Subtitusikan (53) ke dalam (51) di dapat :

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, \underline{d}_i + \ldots\ldots + x_n \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, \underline{d}_i = \underline{b} \tag{54}$$

atau :

$$\left[\sum_{j=1}^{m} x_j\, y_{1j}\right] \underline{d}_1 + \ldots + \left[\sum_{j=1}^{m} x_j\, y_{nj}\right] \underline{d}_m = \underline{b} \tag{55}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, \underline{d}_i = \underline{b}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{d}_i \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\, x_j = \underline{b}$$

Diketahui :

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{d}_i\, \bar{x}_i = \underline{b} \tag{56}$$

Dari (55) dan (56) didapat :

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\, x_j, \quad i = 1, \ldots, m \tag{57}$$

Untuk kolom dalam basis : $\underline{y}_j = D^{-1}\ \underline{a}_j = D^{-1}\ \underline{d}_i = \underline{u}_i$ ($\underline{u}_i$ = vektor satuan) di mana $\underline{a}_j = \underline{d}_i$ = kolom ke i matrix D. Sehingga $z_j = \bar{\underline{c}}\ \underline{y}_j = \bar{\underline{c}}\ \underline{u}_i = \bar{c}_i = c_j$ maka $z_j - c_j = 0$ berarti bahwa syarat : $z_j - c_j \geq 0$ benar untuk semua kolom A .

Jadi : ($z_j - c_j$) $x_j \geq 0$ karena $x_j \geq 0$ atau

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\ x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j = z^* \ (52)$$

Menggunakan definisi : $z_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\ y_{ij}$ (9) didapat

$$\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\ y_{ij}\ \ x_j = \sum_{i=1}^{m}\ \bar{c}_i\ \sum_{j=1}^{n}\ x_j\ \ y_{ij}\ \geq z^* \qquad (57)$$

Karena : $\sum_{j=1}^{n} x_j\ \ y_{ij} = \bar{x}_i$ maka (52) menjadi :

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\ \ x_i \geq z^* \qquad (58)$$

atau : $z_o \geq z^*$. Jadi $z_o \geq z^*$ sehingga $z_o = z_{max}$

Terbukti.

Untuk soal minimisasi buktinya sejalan dengan bukti soal maximisasi.

Disimpulkan :

a. Soal maximum cari $\underline{x} \geq \underline{0}$ memenuhi A $\underline{x} = \underline{b}$, memaximalkan:

$$z = \underline{c}\ \underline{x}$$

Jika ada B.F.S : $\bar{\underline{x}} = D^{-1}\ \underline{b}$ yang sesuai dengan $z_o = \bar{\underline{c}}\ \bar{\underline{x}}$ dan $z_j - c_j \geq$ untuk semua kolom $\underline{a}_j$ dalam A, maka $\bar{\underline{x}}$ adalah B.F.S optimum dengan zo = zmax

b. Soal minimum cari $\underline{x} \geq \underline{0}$, memenuhi $A\ \underline{x} = \underline{b}$, meminimumkan : Jika ada B.F.S : $\bar{\underline{x}} = D^{-1}\ \underline{b}$ yang sesuai dengan $z_o = \underline{c}.\bar{\underline{x}}$ dan $z_j - c_j \leq 0$ untuk semua kolom a_j dalam A, maka $\bar{\underline{x}}$ adalah BFS optimum dengan $z_o = z^{min}$.

Perlu diingat sebagai cacatan bahwa $\bar{\underline{x}}$ di sini masih mungkin merosot.

II.1.3. Ada Pilihan Penyelesaian Optimum (Alternatif).

Nilai optimum fungsi z (obyektif) untuk setiap masalah P.L adalah tunggal, tetapi penyebabnya $\underline{x}$ (penyelesaian optimum) tidak tentu tunggal. Misalnya: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ adalah B.F.S optimum yang berbeda, masing-masing didalam E^n.

Disusun kombinasi konvex sebagai berikut :

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} u_i\ \underline{x}_i,\ u_i \geq 0\ (i=1,\ldots,k),\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1 \qquad (59)$$

Karena setiap $\underline{x}_i \geq \underline{0}$ dan $u_i \geq 0$ maka $\underline{x} \geq \underline{0}$. Lagi pula :

$$A\ \underline{x}_i = \underline{b} \text{ maka } A\ \underline{x} = A \sum_{i=1}^{k} u_i\ \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} u_i\ A\ \underline{x}_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} u_i \right) \underline{b} = \underline{b}$$

Jadi : $A\ \underline{x} = \underline{b}$, sehingga $\underline{x}$ adalah penyelesaian fisibel (yang mungkin bukan basis).

Misalkan: $z_o = z_{optimum} = \underline{c}\ \underline{x}_i, (i=1,..,k)$ (60)

Nilai z untuk $\underline{x}$ ialah :

$$z = \underline{c}\,\underline{x} = \underline{c}\sum_{i=1}^{k} u_i\, \underline{x}_i = \left(\sum_{i=1}^{k} u_i\right) \underline{c}\, \underline{x}_i = z_o \quad (61)$$

Jadi dari (61) $\underline{x}$ pun memberi z optimum.

Disimpulkan jika : $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ adalah B.F.S optimum yang berbeda maka setiap kombinasi konvex dari padanya juga merupakan penyelesaian optimum (meskipun belum tentu basis). Ini berarti pula, jika ada dua atau lebih penyelesaian optimum, maka akan ada tak terhingga penyelesaian optimum.

Misalkan terdapat sebuah B.F.S optimum $\overline{\underline{x}}_o = (\overline{x}_1, .. \overline{x}_m)'$ dan beberapa $\underline{a}_j$ di luar basis, $z_j - c_j = 0$ dan semua $y_{ij} \leq 0$, $i=1,\ldots,m$. Maka dapat disusun penyelesaian fisibel $\underline{x} = (x_j)'$ baru :

$$\sum_{i=1}^{m} (\overline{x}_i - \theta\, y_{ij})\, \underline{a}_i + \theta\, \underline{a}_j = \underline{b},\ \theta > 0 \qquad (62)$$

yang mungkin memuat (m + 1) perubah bukan nol. Nilai z yang sesuai akan sama dengan z yang dihasilkan oleh B.F.S optimum, sehingga penyelesaian (62) di atas adalah optimum, dan ini tetap berlaku untuk θ besar tak berhingga, sedang paling sedikit satu $y_{ij} < 0$, $\underline{a}_j \neq 0$, sehingga terdapatlah penyelesaian optimum dengan paling sedikit dua perubahnya dapat dibawa ke besar tak berhingga. Ternyata, jika ada B.F.S optimum dan untuk beberapa a_j di luar basis, $z_j - c_j = 0$, $y_{ij} \leq 0$ untuk semua i, maka (62) juga merupakan penyelesaian optimal untuk setiap $\theta > 0$.

Jika himpunan perubah-perubah yang menghasilkan nilai optimum fungsi obyektif tidak tunggal, di sebut ada alternatif.

II.1.4. <u>Menyusun B.F.S awal- Artifisial Variable (perubah semu)</u>

a. Misalkan soal asli berbentuk :

$A_o \underline{x}_o \leq \underline{b}$ (63)

dengan A_o matrix (m x n) dan relasi tiap syarat berbentuk ($\leq$), maka untuk setiap syarat ditambahkan satu perubah slack (M buah) lihat bagian (2.1) di muka, sehingga timbul : $A\ \underline{x} = \underline{b}$ dengan $A = (\ A_o,\ \ I)$ dengan I matrix identitas, $\underline{x} = (\underline{x}_o, \underline{x}_s)'$ dengan x_s vektor slck. Untuk susunan ini jelas dapat dipilih B.F.S ialah :

$\bar{\underline{x}} = (\underline{0},\ \underline{x}_s)'$ sehingga : $A\ \bar{\underline{x}} = I\ \underline{x}_s = \underline{b}$ (64)

memberikan : $\underline{x}_s = \underline{b}$ dengan $\underline{b} \geq \underline{0}$ (65)

inilah B.F.S awal dan untuk ini matrix basis D = I, dan $D^{-1} = I$

karena $z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j$ maka $\bar{\underline{c}} = 0$ (66)

artinya : $\underline{c} = (\ c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0$ jadi

$z_j - c_j = \bar{\underline{c}}\ \ z_j - c_j = -\ c_j$ (67)

$z = \bar{\underline{c}}\ \bar{\underline{x}} = 0$ (68)

b. Sesudah terdapat $A\ \underline{x} = \underline{b}$, di dalam A sudah terdapat I tetapi beberapa kolom I berasal dari vektor aseli (bukan perubah slack). Susunan ini jelas mempunyai B.F.S hanya saja perubah basis tidak semuanya perubah slack, sehingga untuk ini pada umumnya : $\underline{\tilde{c}} \neq \underline{0}$ dan $z \neq 0$.

c. Sudah menjadi persamaan $A_o \underline{x}_o = \underline{b}$, tetapi belum tersusun suatu I didalam A_o. Jalan keluarnya ialah dengan menambahkan perubah - perubah semu (artifisial-variable) di mana diperlukan, namakan $\underline{x}_a$ sehingga :

$$\underline{x} = (\underline{x}_o, \underline{x}_a)' \qquad (69)$$

sedang cost yang sesuai dengan perubah semu diisi :

$$c_{aj} = - M \text{ untuk soal maksimum} \qquad (70)$$

$$c_{aj} = + M \text{ untuk soalminimum} \qquad (71)$$

M bilangan positip besar, relatif terhadap koefisien ongkos yang lain. Pada proses secara manual biasanya M tidak diberi nilai secara khusus, tetapi dibiarkan demikian dengan anggapan nilainya cukup besar dibandingkan dengan koefisien ongkos yang lain.

Apabila proses ini dikerjakan dengan komputer, nilai M sering diambil sama dengan seribu kali komponen vektor c yang tersebar. Tujuannya ialah supaya perubah semu yang dalam penerapan P.L disebut kegiatan buatan, tidak muncul dalam usaha maka kegiatan buatan harusdihukum sebesar-besarnya yaitu dengan M yang besar. Misalnya -M dapat diartikan kerugian besar sekali dan +M memberi biaya yang besar sekali dalam kegiatan yang bersangkutan, berarti tidak fisibel kegiatan itu untuk dikerjakan.

Persamaan asli $A_o\ \underline{x}_o = \underline{b}$ berubah menjadi $A\ \underline{x} = \underline{b}$. Penyelesaian optimal $A\ \underline{x} = \underline{b}$ akan menjadi jawab optimal $A_o\ \underline{x}_o = \underline{b}$ (B.F.S optimum) hanya jika $\underline{x}_a = \underline{0}$. Jika tidak, berarti : $A_o\ \underline{x}_o$ tidak fisibel. Jika B.F.S optimum sudah terdapat untuk $A\ \underline{x} = \underline{b}$, maka jawab ini perlu diselidiki apakah ia memberi B.F.S optimum bagi soal aseli $A_o\ \underline{x}_o = \underline{b}$ atau tidak.

Disamping tiga kemungkinan (tanpa bukti) sebagai berikut :

1. Tak ada perubah semu dalam basis berarti B.F.S optimum $A\ \underline{x} = \underline{b}$ merupakan B.F.S optimum $A_o\ \underline{x}_o = \underline{b}$ dan tidak ada redundancy dalam perubah aseli.
2. Ada perubah semu dalam basis tetapi bernilai nol, berarti B.F.S optimum $A\ \underline{x} = \underline{b}$ merupakan B.F.S optimum soal aselinya tetapi ada redudancy dalam syarat aselinya.
3. Ada perubah semu dalam basis dengan nilai positip berarti $A_o\ \underline{x}_o = \underline{b}$ tak punya S.F (Penyelesaian Fisibel)

II.2. ALGORITMA METODE SIMPLEX

Secara umum dapat dirumuskan langkah-langkah metode simplex sebagai berikut :

1. Soal diubah ke bentuk kanonik dengan memasukkan perubah slack.
2. Jika sudah ada matrix identitas I, masukkan dalam tabel simplex awal; jika belum ada I masukkan perubah slack dimana perlu, sampai timbul I, lalu masukkan dalam tabel simplex awal.
3. Koefisien perubah slck dalam z adalah nol.
4. Koefisien perubah semu (artifisial variabel) dalam z adalah -M untuk soal maximum, dan +M untuk soal minimum.
5. Uji optimalitas sebagai berikut :

   a. Pengujian keoptimalan soal maximum :

   Menurut Dalil : 2-1 disimpulkan bahwa jika semua unsur dalam baris $z_j - c_j$ sudah non-negatif maka program sudah optimum dan jika program belum optimum langkah selanjutnya menyusun tabel pendekatan yang baru dengan mengganti salah satu di antara perubah basisnya.

   Kunci I. Pilih $z_j - c_j$ negatif yang terkecil (lihat 28) ini menunjukkan perubah bebas yang harus dimasukkan ke dalam basis, kolom yang sesuai disebut kolom kunci. Untuk memilih perubah bebas yang keluar (yang diganti) tinjau Y_{ij} yang positif, bagikan pada b_i yang sesuai (lihat bentuk 16) pada bagian 2.2).

   Kunci II. Pilih b_i / Y_{ik} yang terkecil (kolom ke k adalah kolom kunci), dan i yang sesuai menunjuk ke variabel ke i yang keluar dari basis yaitu : $\bar{x}_i$. Baris ke i disebut baris kunci dan unsur Y_{ik} disebut unsur kunci.

b. **Pengujian keoptimalan soal minimum** :

Perbedaan dengan soal maximum ialah : ciri optimum jika $z_j - c_j <= 0$ (non-positif) untuk semua j, kunci I (jika belum optimum, pilih $z_j - c_j > 0$ yang terbesar, ini menunjukkan perubah yang masuk sedang langkah-langkah yang lain sama dengan soal maximum.

Contoh Soal Minimum. Carilah x1 , x2 dengan syarat :

$$x_1 + x_2 > 4$$

$$x_1 + 3\,x_2 > 6$$

serta $x_1 , x_2 > 0$

dan meminimumkan $z = 40\,x_1 + 80\,x_2$.

Penyelesaian . Diubah ke kanonik dengan memasukkan perubah slack x3 dan x4 yang tak negatip, bentuk soal menjadi :

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + 3\,x_2 - x_4 = 6$$

~~Tetapi di dalam bentuk ini belum terdapat matrix identitas~~ I. Untuk menimbulkan I ditambah perubah semu x5 dan x6 yang tak negatip sehingga (III-83) menjadi :

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 + 3\,x_2 - x_4 + x_6 = 6$$

dengan fungsi obyektif :

$$z = 40\,x_1 + 80\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + M\,x_5 + x_6$$

dengan M bilangan positip besar. Jelas bahwa untuk suatu solusi dengan $x_5 = x_6 = 0$, jika z mencapai minimum maka z pun juga, karena $\bar{z} = z$. Sekarang soal sudah siap dikerjakan dengan simplex. Sebagai berikut :

c	x_j / c_j / $\bar{x}_i$ \ a_j	x_1 40 a_1	x_2 80 a_2	x_3 0 a_3	x_4 0 a_4	x_5 M g_1	x_6 M g_2	0 b_i	R	
M	x_5	1	1	-1	0	1	0	4	4	T1
M	x_6	1	3	0	-1	0	1	6	2	
	z_j	2M	4M	-M	-M	M	M	10M		
	$z_j - c_j$	2M-40	4M-80	-M	-M	0	0			
M	x_5	2/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2	3	
80	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	2	6	
	z_j	$\frac{2M}{3}+\frac{80}{3}$	80	-M	$\frac{M}{3}-\frac{80}{3}$	M	$-\frac{M}{3}+\frac{80}{3}$	2M+160		
	$z_j - c_j$	$\frac{2M}{3}-\frac{40}{3}$	0	M	$\frac{M}{3}-\frac{80}{3}$	0	$-\frac{4M}{3}+\frac{80}{3}$			
40	x_1	1	0	3/2	1/2	3/2	-1/2	3		
80	x_2	0	1	-1/2	-1/2	-1/2	1/2	1		
	z_j	40	80	-20	-20	20	20	200		T_3
	$z_j - c_j$	0	0	-20	-20	20-M	20-M			

Ternyata pada tabel diatas untuk semua j, j=1,....,6

$z_j - c_j <= 0$, berarti BFS $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)'$ sudah optimum.

Penyelesaian yang dicari adalah :

$\bar{x}_1 = x_1 = 3$ dan $\bar{x}_2 = x_2 = 1$, yang memberi $z_{min} = 200$