BAB II

TEORI PENUNJANG

1. FIELD.

Suatu field adalah suatu himpunan dari elemen-elemen bersama dua buah operasi, yaitu pergandaan dan jumlahan yang didefinisikan sama pada operasi pergandaan dan jumlahan seperti dalam sistem bilangan riil.
Di dalam setiap field F dapat ditemukan secara tunggal elemen-elemen 0 dan 1, yang mana dalam operasi dari jumlahan dan pergandaan berlaku pada semua elemen-elemen yang lain dari F.

<u>DEFINISI</u> :

Suatu struktur aljabar disebut field, apabila memenuhi aksioma :

I. R merupakan abelian group terhadap jumlahan.

1. Untuk semua $a, b \in R$ dapat ditemukan dengan tunggal elemen $c \in R$ juga, sedemikian hingga $a + b = c$.
   (Sifat tertutup terhadap jumlahan)
2. Untuk semua $a, b, c \in R$ berlakulah $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (Sifat asosiatif)
3. Di dalam R terdapat elemen 0 sedemikian rupa sehingga untuk setiap a dari R berlakulah $0 + a = a + 0$.
   (Elemen netral terhadap jumlahan)
4. Untuk setiap $a \in R$ dapat ditemukan elemen $-a \in R$, sedemikian sehingga $-a + a = a + (-a) = 0$.
   (invers terhadap jumlahan)
5. Untuk setiap $a, b \in R$ berlakulah $a + b = b + a$.
   (Sifat komutatif)

II. Terhadap pergandaan.

1. Untuk semua $a,b \in R$ dapat ditemukan dengan tunggal elemen $c \in R$ juga, sedemikian hingga $a\ b = c$.
   (Sifat tertutup terhadap pergandaan)
2. Untuk semua $a,b \in R$ berlakulah $(ab)\ c = a\ (bc)$.
   (Sifat asosiatif)
3. Di dalam R terdapat elemen netral e sedemikian hingga $ae = ea = a$, untuk setiap $a \in R$.
4. Untuk setiap $a,b \in R$ berlakulah $ab = ba$.
   (disebut ring komutatif)
5. Setiap $a \in R$ yang tidak sama dengan nol mempunyai $a^{-1} \in R$, yaitu $a^{-1}\ a = a\ a^{-1} = e$.

III. Aksioma Distributif.

Untuk semua $a,b,c \in R$ berlakulah :

1. $a\ (\ b + c\ ) = ab + ac$.
2. $(\ b + c\ )\ a = ba + ca$.

Contoh:

Himpunan bilangan rasional $(Q) = \{\ x \mid x = a/b\ ,\ a,b \in R,\ b \neq 0\ \}$.

Himpunan bilangan riil, $R = [-\infty, \infty]$.

Himpunan bilangan kompleks, $C = \{x \mid x = a + bi,\ a,b \in R\}$.

2. <u>RUANG VEKTOR</u>.

Pandang V suatu himpunan dengan elemen-elemen $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$ F suatu field dengan elemen-elemen $\alpha, \beta, \ldots$ dan jika setiap $\alpha \in F$ dan $\vec{u} \in V$ maka $\alpha \vec{u}$ merupakan suatu elemen dari V. V disebut ruang vektor pada F jika memenuhi:

1. Untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dan $\alpha \in F$, maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$, $\alpha \vec{u} \in V$. (dikatakan tertutup terhadap jumlahan dan pergandaan skalar).

2. Untuk setiap $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ maka $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$.
3. Untuk setiap $\vec{u},\vec{v} \in V$ dan $\alpha \in F$ maka $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
4. Terdapat $\vec{0} \in V$, disebut vektor nol, sedemikian hingga untuk setiap $\vec{u} \in V$ berlaku $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$.
5. Untuk masing-masing $\vec{u} \in V$ terdapat $-\vec{u} \in V$ sedemikian hingga $(-\vec{u})+\vec{u} = \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.
6. Untuk setiap $\vec{u},\vec{v} \in V$ maka $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.
7. Untuk setiap $\vec{u} \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
8. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$.
9. Untuk setiap $\vec{u} \in V$ berlaku $1\vec{u} = \vec{u}$ dimana 1 adalah elemen satuan dari F.

Anggota-anggota dari suatu ruang vektor disebut vektor.

Contoh :

1. V adalah himpunan semua polynom berderajat 2.

   Apakah V ruang vektor ?.

   Jawab :

   Misal ; $p_1(\vec{u}) = a_{01} + a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{u}^2$.

   $p_2(\vec{u}) = a_{02} + a_{12}\vec{u} + a_{22}\vec{u}^2$.

   Didefinisikan operasi jumlahan, maka :

$$p_1(\vec{u}) + p_2(\vec{u}) = (a_{01} + a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{u}^2) + (a_{02} + a_{12}\vec{u} + a_{22}\vec{u}^2).$$
$$= (a_{01} + a_{02}) + (a_{11} + a_{12})\vec{u} + (a_{21} + a_{22})\vec{u}^2 .$$
$$= (p_1 + p_2)(\vec{u}).$$

   Terhadap perkalian skalar :

$$(p_1(\vec{u})) = (a_{01} + a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{u}^2).$$
$$= a_{01} + a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{u}^2.$$
$$= (\ p_1)(\vec{u}).$$

Karena semua aksioma dipenuhi, maka V merupakan ruang vektor.

2. Himpunan $A = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}$ dengan definisi operasi penjumlahan sebagai berikut :

   $(a,b) + (c,d) = (a,b)$,

   dan operasi perkalian skalar $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$.

   Apakah A ruang vektor ?

   Jawab :

   Misal $\vec{u} = (a,b)$

   $\vec{v} = (c,d)$

   Terhadap aksioma ruang vektor, apabila salah satu tak dipenuhi maka bukan merupakan ruang vektor.

   Terhadap aksioma 1,2,3,4,5 jelas dipenuhi.

   Untuk aksioma 6 ;

   $(a,b) + (c,d) = (a,b)$.

   $(c,d) + (a,b) = (c,d)$.

   Terlihat $\vec{u} + \vec{v} \neq \vec{v} + \vec{u}$.

   Karena salah satu aksioma tak dipenuhi maka A bukan ruang vektor.

Suatu himpunan bagian W dari V disebut ruang vektor bagian (subspace) dari V, jika memenuhi semua aksioma ruang vektor, sehingga merupakan ruang vektor tersendiri. Kadang disebut dengan "ruang vektor di V" atau "ruang bagian dari V".

Untuk menentukan apakah W merupakan ruang bagian cukup diperiksa berikut :

1. $W \neq \emptyset$ (W tidak hampa, untuk itu kita tunjukkan bahwa vektor $0 \in W$).
2. Untuk setiap $\vec{a}, \vec{b} \in W$, maka $\vec{a} + \vec{b} \in W$.
3. Untuk setiap $\vec{a} \in W$ dan $\alpha \in F$ (skalar) maka $\alpha \vec{a} \in W$.

Maka W ruang vektor bagian dari V.

Contoh :

Diketahui : $V = R^3$.

Buktikan bahwa W merupakan ruang vektor bagian dari R^3 bila :

i). $W = \{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \mid \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0\}$.

ii). $W = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in R^3, \vec{x}.\vec{a} = \vec{x}.\vec{b} = 0\}$ dan $\vec{a}$ & $\vec{b}$ vektor tertentu $\in R^3$.

Penyelesaian :

I. Kita tunjukkan W memenuhi ketiga syarat diatas.

1). $W \neq \emptyset$ karena $\vec{0} = [0,0,0]$ memenuhi $0 + 0 + 0 = 0$ berarti $\vec{0} \in W$.

2). Vektor sebarang $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ dan $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] \in W$ berarti $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ dan $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$ jelas $\in W$ karena $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$

$= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$.

$= 0 + 0$.

$= 0$.

3). Bila α skalar riil maka $\alpha\vec{a} = [\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3]$ jelas anggota W karena :

$\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 = \alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha 0 = 0$.

II.

1). $W \neq \emptyset$ karena $\vec{0}.\vec{a} = \vec{0}.\vec{b} = 0$, jadi $\vec{0} \in W$.

2). Ambil sebarang $\vec{u}$ dan $\vec{v} \in W$ berarti $\vec{u}.\vec{a} = \vec{u}.\vec{b} = 0$ dan $\vec{v}.\vec{a} = \vec{v}.\vec{b} = 0$. Jelas bahwa $\vec{u} + \vec{v} \in W$ karena

$(\vec{u} + \vec{v}) . \vec{a} = \vec{u}.\vec{a} + \vec{v}.\vec{a}$.

$= 0 + 0$.

$= 0$.

Jadi $(\vec{u} + \vec{v}) . \vec{a} = (\vec{u} + \vec{v}) . \vec{b} = 0$.

3). Ambil α riil maka $\alpha\vec{u} \in W$, karena :

$$(\alpha \vec{u}).\vec{a} = \alpha (\vec{u}.\vec{a}).$$
$$= \alpha\, 0.$$
$$= 0.$$

dan $(\alpha \vec{u}).\vec{b} = \alpha (\vec{u}.\vec{b}).$
$$= \alpha\ 0.$$
$$= 0.$$

Jadi W ruang vektor bagian dari R^3.

3. VEKTOR YANG BEBAS LINIER DAN YANG BERGANTUNG LINIER.

Dalam suatu ruang vektor V pada suatu field F, vektor-vektor $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ disebut bergantung linier jika terdapat skalar-skalar $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ yang tidak semuanya nol dari F sedemikian hingga $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = 0$ Disebut bebas linier apabila $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_3\vec{u}_3 = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ V yang bebas linier.

$\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n \in V$ disebut suatu sistem penghasil dari V, jika setiap elemen $\vec{u}$ dari V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ yaitu $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u}_i$ untuk suatu sebarang $a_i \in F$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Contoh :

1. Pandang ruang vektor R^3 dengan $\vec{a} = [1,2,1]$ dan $\vec{b} = [3,0,1] \in R^3$

   Apakah vektor-vektor tersebut bebas linier ?

   Jawab :

   $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = 0$.

   $\lambda_1[1,2,1] + \lambda_2[3,0,1] = [0,0,0]$.

   $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$

$2\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0.$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$

Karena $\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$

$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.$

Jadi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, maka vektor-vektor tersebut bebas linier dan dimensinya = 2.

2. Apakah ketiga vektor berikut bebas / bergantung linier?

$\vec{a}_1 = [2,3,-4]$, $\vec{a}_2 = [-3,1,2]$, $\vec{a}_3 = [-2,8,-4]$.

Jawab :

$a_1 = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3$.

$[2,3,-4] = \lambda_1 [-3,1,2] + \lambda_2 [-2,8,-4]$.

$2 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2$ ... (1)

$3 = \lambda_1 + 8\lambda_2$ ... (2)

$-4 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$ ... (3)

(1)x4 $\implies$ $8 = -12\lambda_1 - 8\lambda_2$.

(2)x1 $\implies$ $3 = \lambda_1 + 8\lambda_2$. +

$11 = -11\lambda_1$

$\lambda_1 = -1.$

Dari (2) : $3 = \lambda_1 + 8\lambda_2$.

$3 = -1 + 8\lambda_2$.

$4 = 8\lambda_2$.

$\lambda_2 = 1/2.$

Dari (3) : $-4 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$.

$-4 = 2(-1) - 4.1/2.$

$-4 = -2 - 2.$

$-4 = -4.$

$\vec{a}_1$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{a}_2$ dan $\vec{a}_3$ maka ketiga vektor tersebut bergantung linier.

Atau dilihat determinannya, jika determinannya = 0 maka ketiga vektor tersebut bergantung linier.

THEOREMA 1:

Setiap n vektor-vektor $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ yang bebas linier dari V, ruang vektor yang berdimensi n, pasti merupakan sistem penghasil dari V.

Setiap sistem pembentuk yang bebas linier disebut basis dari ruang vektor tersebut. Atau dengan kata lain, setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ dari ruang vektor yang berdimensi n disebut basis dari ruang vektor.

Suatu s-tuple dari elemen-elemen $(a_1,\ldots,a_n)$ dalam suatu field F disebut vektor baris. Semua s-tuple membentuk suatu ruang vektor, jika didefinisikan sebagai berikut :

i). $(a_1,\ldots,a_s) = (b_1,\ldots,b_s)$ bhb $a_i = b_i$, $i = 1,\ldots,s$.

ii). $(a_1,\ldots,a_s) + (b_1,\ldots,b_s) = (a_1 + b_1,\ldots, a_s + b_s)$.

iii). $b(a_1,\ldots,a_s) = (ba_1,\ldots,ba_s)$ untuk suatu $b \in F$.

s-tuple disebut vektor kolom, bila ditilis secara vertikal yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix}.$$

THEOREMA 2 :

Baris / kolom ruang vektor F^n dari semua n-tuple dari suatu field F adalah suatu ruang vektor dimensi n pada F.

DEFINISI :

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang (menurut

Pandang matriks A berukuran (m x n) dengan elemen elemennya bilangan riil.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tiap-tiap baris dari A dapat kita pandang sebagai sebuah vektor. $\vec{B_1} = [a_{11},\ldots,a_{1n}]$, $\vec{B_2} = [a_{21},\ldots,a_{2n}],\ldots,$ $\vec{B_m} = [a_{m1},\ldots,a_{mn}]$ dapat kita sebut vektor-vektor baris dari matriks A. Maksimum banyaknya vektor-vektor baris / kolom yang bebas linier disebut rank dari matriks tersebut.

Untuk mencari rank suatu matriks dapat dicari lewat operasi (transformasi) elementer pada baris / kolom. Atau dapat pula dilakukan dengan pertolongan determinan. Suatu matriks A $\neq$ O mempunyai rank = r jika paling sedikit satu minor berukuran (r x r) nya $\neq$ 0, sementara setiap minor berukuran (r+1) x (r+1) nya jika ada berharga nol.

PERSAMAAN LINIER.

Bentuk dari persamaan linier :

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$, dimana a_i & b adalah skalar. a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan. $x_1, x_2, \ldots, x_n = k_n$ disebut anu. Sekumpulan harga $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2, \ldots,$ $x_n = k_n$ disebut solusi / jawab dari persamaan apabila terpenuhi $a_1 k_1 + \ldots +$ $a_n k_n = b$.

Pandang m buah persamaan-persamaan linier dengan n anu:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 .$$

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (*)$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n = b_n$$

Persamaan diatas dapat ditulis dengan $AX = B$ dimana

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

berukuran (m x n) dan disebut matriks koefisien, sedang matriks lengkap (A,B) adalah matriks :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

<u>THEOREMA 3</u> :

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab / jawab, jika rank matriks koefisien = rank matriks lengkap atau $r(A) = r(A,B)$.

4.1. PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Persamaan linier disebut persamaan linier homogen jika semua konstanta $b_i = 0$, persamaan menjadi $AX = 0$.

Bentuknya :

$$a_{11}\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{m1}\,x_1 + \dots + a_{mn}\,x_n = 0$$

Atau $A_1\,x_1 + \dots + A_n\,x_n = 0$.

Jelas untuk persamaan homogen berlaku $r(A) = r(A,0)$.

Jadi susunan persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab.

Harga $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ jelas selalu memenuhi persamaan diatas. Maka persamaan linier homogen selalu mempunyai paling sedikit satu jawab $[0,0,\ldots,0]$ yang disebut jawab trivial / nol.

Semua jawab vektor dari persamaan linier homogen membentuk suatu ruang vektor di R^n yang disebut ruang jawab. Dimensi ruang jawab = $(n - r)$, dimana n = banyak anu dan r = rank matriks koefisien A.
Jika $r < n$ berarti ruang jawab $n-r > 0$, maka didapatkan pula jawab yang tidak nol / non-trivial. Sedangkan untuk $r = n$, dimensi ruang jawab $n-r = 0$ maka didapatkan hanya jawab trivial.

Jika persamaan linier homogen terdiri dari m buah vektor-vektor kolom $A_1,\ldots,A_n$ berkomponen m buah. Jadi $\in R^n$ maka jumlah maksimum vektor-vektorkolom matriks A yang bebas linier sama dengan n, atau $r(A) \leq m$. Jadi untuk $m < n$ pasti ada jawab non-trivial.

4.2. PERSAMAAN LINIER NON HOMOGEN .

Susunan persamaan linier non homogen :

$a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$.

. . . .

$a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_n$.

Atau $A_1\, x_1 + \ldots + A_n\, x_n = B$, dimana $A_1,\ldots,A_n$ adalah vektor-vektor kolom dari matriks koefisien A.

Persamaan linier non homogen akan mempunyai jawab bila $r(A) = r(A,B)$.

THEOREMA 4 :

Semua jawab vektor dari susunan persamaan linier non homogen $AX = B$, berbentuk $z = x' + y$, dimana x' adalah jawab khusus non homogen $AX = B$ dan y adalah suatu jawab umum

Persamaan linier non homogen dari $AX = B$ akan mempunyai jawab non trivial jika $r(A) < n$.
Untuk jawab $z = x' + y$, dimana y tidak hanya 0 maka z yaitu jawab non homogen tidak tunggal. Kalau $r(A) = n$, maka persamaan homogennya hanya mempunyai jawab 0.

5. POLYNOMIAL TAK TERURAI (IRREDUCIBLE).

Polynomial dinyatakan dalam bentuk :
$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ dan disebut polynomial derajat n dalam F jika koefisien $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemen dari field F dan $a_n \neq 0$. Pergandaan dan jumlahan dari polynomial-polynomial dikerjakan seperti biasa.

Suatu polynomial di dalam F disebut terurai di dalam F jika polynomial tersebut merupakan hasil kali 2 polynomial dalam F yang masing-masing dengan derajat terkecil 1. Polynomial yang tidak dapat diuraikan disebut tak terurai. Jadi polynomial tak terurai ialah polynomial yang tidak dapat difaktorisasikan atas faktor-faktor yang pangkatnya lebih rendah kecuali unit atau konstan.

Jika $f(x) = g(x)\ h(x)$ merupakan suatu hubungan antara polynomial-polynomial $f(x)$, $g(x)$ dan $h(x)$ dalam F maka $g(x)$ disebut pembagi $f(x)$ dalam field F, atau $g(x)$ merupakan faktor dari $f(x)$.
Telah kita ketahui pula bahwa derajat $f(x)$ adalah sama dengan jumlah derajat $g(x)$ dan $h(x)$, sehingga jika $g(x)$ atau $h(x)$ tidak konstan maka masing-masing mempunyai derajat yang lebih rendah dari $f(x)$.
Dari sini didapat bahwa faktorisasi berhingga dari polynomial dapat dinyatakan sebagai hasil kali polymomial-polynomial tak teruari dalam field F.

Menurut algoritma pembagian, untuk setiap 2 polynomial-polynomial $f(x)$ dan $g(x)$ yaitu $f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$ dimana $q(x)$ dan $r(x)$ polynomial tunggal dalam F dan derajat $r(x)$ adalah lebih rendah / kecil dari derajat $g(x)$. $r(x)$ menentukan pula secara tunggal polynomial dengan derajat lebih kecil dari derajat $g(x)$, sedemikian hingga $f(x) - r(x)$ dapat dibagi oleh $g(x)$. $r(x)$ disebut sisa dari $f(x)$.

Dan jika α adalah suatu akar dari polynomial $f(x)$ dalam F, maka $x - \alpha$ adalah faktor dari $f(x) \in F$. Akibatnya suatu polynomial dalam field tidak mempunyai akar yang lebih dari derajatnya.

<u>LEMMA</u> :

Jika $f(x)$ polynomial tak terurai derajat n dalam F, maka tidak terdapat 2 polynomial yang masing-masing berderajat lebih rendah dari n dalam F yang hasil kalinya dapat dibagi oleh $f(x)$.