BAB III

UJI LIKELIHOOD RASIO

Disini akan dibicarakan cara menyusun suatu uji hipotesa pada uji likelihood rasio , dimana untuk distribusinya dibatasi khusus untuk distribusi normal .

Theorema 3 :

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel random yang berdistribusi $N(\theta_1, \theta_2)$, dengan $n > 1$ masing - masing bernilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Akan menguji hipotesa H_o: $(\theta_1, \theta_2) \in W$, $\theta_1 = 0$ dan $\theta_2 > 0$, yang menentang hipotesa alternatif H_1 : $(\theta_1, \theta_2) \in \Omega$, $\theta_1 \neq 0$ dan $\theta_2 > 0$.

Maka likelihood rasionya adalah :

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda = \frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{1}{\left\{1 + \left(n\bar{X}^2 / \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right)\right\}^{n/2}}$$

Dimana :

n = ukuran sampel random

$W = \{(\theta_1, \theta_2) ;\ \theta_1 = 0 , 0 < \theta_2 < \infty$ yaitu subset dari $\Omega\}$

$= \{(\theta_1, \theta_2) ;\ -\infty < \theta_1 < \infty , 0 < \theta_2 < \infty\}$

$L(\hat{W})$ = maksimum $L(W)$

$L(\hat{\Omega})$ = maksimum $L(\Omega)$

Bukti :

Untuk mencari likelihood rasio suatu hipotesa statistik , pertama harus ditentukan dahulu fungsi likelihoodnya. Sesuai dengan definisi 11, yaitu fungsi density probabilitas diketahui :

$$\sum^{n} ((x_i - \mu_i))^2$$

Misal untuk setiap σ^2 diganti dengan θ_2 , maka diperoleh :

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{\theta_2}\ldots\sqrt{\theta_2}(2\pi)^{n/2}} \exp - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\theta_2}$$

Karena banyaknya θ_2 adalah n , maka menjadi

$$\frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\theta_2} \qquad (*)$$

Pada hipotesa H_o, karena meannya 0, maka dari sini fungsi likelihood pada W menjadi

$$L\ (W) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta_2}$$

Untuk hipotesa alternatif jika meannya diganti dengan θ_1 , maka fungsi likelihoodnya menjadi

$$L\ (\Omega) = \frac{1}{(2\pi\theta_2)^{n/2}} \exp - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \theta_1)^2}{\theta_2}$$

Kemudian kedua fungsi likelihood ini dideferensialkan parsiel terhadap θ_1 dan θ_2 untuk mencari maksimum kedua fungsi tersebut. Dan untuk mempermudah dibuat ln fungsinya.

$$\ln L\ (W) = -\frac{n}{2} \ln (2\ \theta_2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta_2}$$

Dan

$$\ln L\ (\Omega) = -\frac{n}{2} \ln (2\ \theta_2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \theta_1)^2}{\theta_2}$$

Sehingga

$$\frac{\partial \ln L(W)}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{2\theta_2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2\,\theta_2^2 = 0$$

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n$$

Sehingga fungsi likelihood maksimum dari hipotesa H_o

$$L(\hat{W}) = \left(\frac{1}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n}\right)^{n/2} \exp - \tfrac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / n}$$

$$= \left(\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}$$

$$= \left[\frac{n\, e^{-1}}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]^{n/2}$$

Selanjutnya untuk fungsi $L(\Omega)$,

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2}{\theta_1} = 0$$

Dan

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2}{2\,\theta_2^2} - \frac{n}{2\,\theta_2} = 0$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{n}{\quad} \qquad \frac{n}{\quad}$$

Sehingga fungsi likelihood maksimum pada hipotesa H_1 adalah :

$$L(\hat{\Omega}) = \left[\frac{1}{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n}\right]^{n/2} \exp - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n}$$

$$= \left[\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\right]^{n/2} e^{-n/2}$$

$$L(\hat{\Omega}) = \left[\frac{n\, e^{-1}}{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\right]^{n/2}$$

Maka likelihood rasio untuk theorema ini sesuai dengan definisi 3 adalah :

$$= \frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{n\, e^{-1}}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]^{n/2}}{\left[\dfrac{n\, e^{-1}}{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\right]^{n/2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]^{n/2}$$

Jika

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 + n\bar{x}$$

Sehingga

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 + n\bar{x}^{\,2}} \right]^{n/2}$$

$$= \frac{1}{(1 + (n\bar{x}/\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2\;)} \; n/2$$

Theorema 4 :

Misal x dan y adalah random variabel yang independen stokastik dengan distribusi $n(\theta_1,\theta_3)$ dan $n(\theta_2,\theta_3)$ dimana θ_1 dan θ_2 merupakan mean dan θ_3 adalah varian yang tidak diketahui, dengan $\Omega = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$;
$-\infty < \theta_1 < \infty$, $-\infty < \theta_2 < \infty$, $0 < \theta < \infty$
Misal pula X_1 , X_2 , ... , X_n dan Y_1 , Y_2 , Y_m merupakansampel random independen dari distribusi diatas. Disini akan menguji hipotesa H_o : $\theta_1 = \theta_2$, yang menentang semua hipotesa alternatif .

Bukti :

Dari theorema diatas terlihat bahwa jumlah random sampelnya adalah n = n+m , maka fungsi likelihoodnya adalah , sesuai dengan theorema 3 (*) yaitu dengan meng - gantikan θ_2 dengan θ_3 dan karena disini terdapat 2 random variabel, maka fungsi likelihoodnya adalah jumlah 2 random variabel tersebut, sehingga :

$$L(W) = \frac{1}{2\,\theta_3}^{(n+m)/2} \exp - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_1)^2}{2\,\theta_3}$$

dan

$$L(\Omega) = \frac{1}{2\,\theta_3}^{(n+m)/2} \exp - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_2)^2}{2\,\theta_3}$$

Kemudian kedua fungsi ini dideferensialkan parsiel

$$\frac{\partial \ln L\,(W)}{\partial \theta_1} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)+\sum_{j=1}^{m}(y_i-\theta_1) = 0$$

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i \Big/ n+m$$

$$\frac{\partial \ln L(W)}{\partial \theta_3} = -(n+m) + \frac{1}{\theta_3} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i-\theta_1)^2$$

$$\theta_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i-\theta_1)^2 \Big/ n+m$$

Sehingga maksimum fungsi L(W) yaitu $L(\hat{W})$ adalah :

$$L(\hat{W}) = \left[\frac{1}{2\pi\theta_3}\right]^{(n+m)/2} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i-\theta_1)^2}{2\,\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i-\theta_1)^2}{n+m}}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi\ \theta_3}\right]^{(n+m)/2} \exp -\frac{n+m}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi\theta_3}\right]^{(n+m)/2} e^{-(n+m)/2}$$

$$= \left[\frac{(n+m)\ e^{-1}}{2\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i-\theta_1)^2}\right]^{(n+m)/2}$$

Selanjutnya untuk fungsi $L(\Omega)$ dengan cara yang sama seperti pada fungsi L(W), yaitu dengan mendeferensi- alkan parsiel fungsi $L(\Omega)$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1} = 0 \ ; \quad \frac{\ln L(\Omega)}{\partial \theta_2} = 0 \ ; \quad \frac{\ln L(\Omega)}{\partial \theta_3} = 0$$

didapat :

$$\theta_1 = \sum^{n} x_i / n = \bar{x} \ ; \quad \theta_2 = \sum^{m} y_i / m = \bar{y}$$

$$\theta_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2 \Big/ (n+m)$$

Sehingga maksimum fungsi $L(\Omega)$ yaitu $L(\hat{\Omega})$ adalah :

$$L(\hat{\Omega}) = \left[\frac{1}{2\pi\theta_3}\right]^{(n+m)/2} \exp\left[- \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{2\,\theta_3}\right]$$

$$= \left[\frac{(n+m)\ e^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}\right]^{(n+m)/2}$$

Sesuai dengan definisi 3, maka likelihood rasionya :

$$\frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\theta_1)^2}\right]^{(n+m)/2}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i\right)\right)^2}\right]^{(n+m)/2}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)\right)^2}\right]^{(n+m)/2}$$

Untuk random sampel menjadi

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \quad \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - (\frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m}))^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - (\frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m}))^2} \right]^{(n+m)/2}$$

Misal

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2 = \sum_{i=1}^{n} ((X_i-\bar{X}) + (\bar{X} - \frac{nX+mY}{n+m}))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X} - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2$$

Dan

$$\sum^{m} (Y_i - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2 = \sum_{i=1}^{m} ((Y_i-\bar{Y}) + (\bar{Y} - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m}))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} ((Y_i-\bar{Y})^2 + m(\bar{Y} - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2$$

Padahal

$$n(\bar{X} - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2 = \frac{n}{n+m} (n\bar{X}+m\bar{Y}-n\bar{X}-m\bar{Y})^2 = \frac{m^2 n}{n+m} (\bar{X} - \bar{Y})^2$$

dan

$$m(Y - \frac{n\bar{X}+m\bar{Y}}{n+m})^2 = \frac{m}{n+m} (n\bar{Y}+m\bar{Y}-n\bar{X}-m\bar{Y})^2 = \frac{n^2 m}{n+m} (\bar{X} - \bar{Y})^2$$

Sehingga likelihood rasionya adalah :

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum^{m} (Y_i-\bar{Y})^2 + (mn/(n+m))(\bar{X} - \bar{Y})^2} \right.^{(n+m)/2}$$

$$\lambda = \left[\frac{1}{1 + \dfrac{(nm/(n+m))\ (\overline{X} + \overline{Y}\ )^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2}} \right]^{(n+m)/2}$$

3.1. UJI DARI SEJUMLAH MEAN YANG SAMA

Definisi 22.

Suatu polinomial homogen berderajat dua dengan n variabel didefinisikan sebagai bentuk kwadrat dari variabel tersebut .

Definisi 23.

Misal $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{k+1} + Q_k$, dimana $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ adalah k+1 random variabel dan merupakan bentuk kwadrat random variabel yang independen stokastik dan berdistribusi normal yang mempunyai mean $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ dan varian sama σ^2. Maka Q/σ^2, $Q_1/\sigma^2, \dots, Q_k/\sigma^2$ merupakan distribusi chi kwadrat.

Theorema 5.

Pandanglah sejumlah b random variabel yang independen stokastok dan berdistribusi normal dengan mean $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_b$ tak diketahui dan varian sama σ^2 juga tak diketahui. Misal $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{aj}$ adalah sampel random yang berukuran a dari distribusi normal dengan mean μ_j dan varian σ^2 , $j = 1,2, \dots, b$.

Akan menguji hipotesa $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_b = \mu$, yang menentang semua hipotesa alternatif H_1 .

Maka likelihood rasionya adalah :

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x})^2} \right]^{ab/2}$$

Dimana :

$$\bar{x}_{.j} = \frac{x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{aj}}{a} = \frac{\sum_{i=1}^{b} x_{ij}}{a} \quad , \; j=1,2,\dots,b$$

Bukti :

Dari sini ruang parameternya adalah :

$$\Omega = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_b, \sigma^2) \; ; -\infty < u_j < \infty, \; 0 < \sigma^2 < \infty$$

Dan

$$W = (\mu, \mu, \dots, \mu, \sigma^2) \; ; -\infty < u_1 = \dots = u_b = u \; , \quad 0 < \sigma^2 < \infty$$

Menurut definisi 11 , fungsi likelihood adalah :

$$= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \, (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \mu_i)}{\sigma_i} \right)^2 \right]$$

Karena varian nilainya sama , maka :

$$= \frac{1}{\sigma^n \, (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 \right]$$

Theorema ini merupakan bentuk kwadrat dengan banyaknya variabel n = ab, maka sesuai dengan definisi 23, fungsi likelihoodnya menjadi :

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{ab/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} (x_j - \mu_j)^2 \right] +$$

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{ab/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{a} (x_i - \mu_j)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{ab/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ji} - \mu_j)^2 \right]$$

Sehingga fungsi likelihood pada L (W) dan L (Ω) masing masing adalah :

$$L(W) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{ab/2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu)^2$$

karena nilai semua mean adalah sama , dan

$$L(\Omega) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{ab/2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu_j)^2$$

Kemudian kedua fungsi likelihood ini dideferensialkan parsiel dan dinolkan untuk mendapatkan maksimum dari fungsi likelihood tersebut.

$$\frac{\partial L(W)}{\partial u} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu) / \sigma^2 = 0$$

$$\frac{\partial L(W)}{\sigma^2} = - \frac{ab}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu)^2 = 0$$

Dari sini didapat :

$$ab\,\mu = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} x_{ij} \longrightarrow \mu = \sum^{b} \sum^{a} x_{ij} / ab = \bar{x}$$

dan

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu)^2 / ab = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x})^2 / ab$$

Selanjutnya untuk fungsi L (Ω) dengan cara yang sama seperti pada fungsi L (W) didapat

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial u} = \frac{\sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu_j)}{2} = 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, b$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\sigma^2} = - \frac{ab}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum^{b} \sum^{a} (x_{ij} - \mu_j)^2 = 0$$

Dari sini diperoleh

$$\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-u_j)=0 \quad \text{——} \quad u_j=\sum_{i=1}^{a}\frac{x_{ij}}{a}=\bar{x}_{.j}$$

dengan j = 1,2, ... , b

Dan

$$\sigma^2=\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-u_j)^2}{ab}=\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{ab}$$

Sehingga fungsi maksimum L (W) dan L ( ) yaitu L $(\hat{W})$ dan L $(\hat{\Omega})$ masing - masing adalah :

$$L\ (\hat{W})=\left[\frac{ab}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x})^2}\right]^{ab/2}\exp-\frac{ab\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x})^2}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x})^2}$$

$$=\left[\frac{ab}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x})^2}\right]^{ab/2}e^{-ab/2}$$

Dan

$$L\ (\hat{\Omega})=\left[\frac{ab}{2\sum_{j=1}\sum_{i=1}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}\right]^{ab/2}\exp-\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-x_{.j})^2}$$

$$=\left[\frac{ab}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}\right]^{ab/2}e^{-ab/2}$$

Maka likelihood rasionya sesuai dengan definisi 3 adalah :

$$=\frac{L\ (\hat{W})}{L\ (\hat{\Omega})}$$

$$\lambda = \frac{ab \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{\bar{x}}_{.j})^2}{ab \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{\bar{x}}\ )^2}^{ab/2} \qquad \frac{e^{-ab/2}}{e^{-ab/2}}$$

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{\bar{x}}_{.j})^2}{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2} \right]^{ab/2}$$

3.2. ANALISA VARIAN

Misal X_{ij}, i= 1,2, ... ,a dan j = 1,2, .. ,b merupakan n random variabel yang independen stokastik dan berdistribusi normal dengan mean $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$ dan varian sama σ^2 dimana $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ dan $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$

Theorema 6.

Likelihood rasio pada hipotesa $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$ yang menentang semua hipotesa alternatif yang mungkin dari distribusi di atas adalah :

$$= \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X})^2}{\sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2}$$

Dimana :

$$\overline{X}_{i.} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{ib}}{b} = \frac{\sum_{j=1}^{b} X_{ij}}{b} \quad , \ i=1,2, \ldots,a$$

$$\overline{X}_{.j} = \frac{X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{aj}}{a} = \frac{\sum_{j=1}^{a} X_{ij}}{a} \quad , \ j=1,2,\ldots,b$$

Bukti :

Diambil ruang parameter

$$\Omega = \left\{ (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b, \sigma^2) \begin{array}{l} -\infty < \mu < \infty \\ -\infty < \alpha_i < \infty \quad \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \\ \\ -\infty < \beta_j < \infty \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \\ 0 < \sigma^2 < \infty \end{array} \right.$$

dan

Untuk menentukan fungsi likelihoodnya , seperti pada theorema 4 , tetapi untuk μ_j disini digantikan dengan u_{ij}, dimana untuk hipotesa yang diujikan $H_o, \mu_{ij} = \mu + \alpha_i$ (karena $\beta_j = 0$) dan pada hipotesa alternatif H_1
$u_{ij} = u + \alpha_i + \beta_j$, sehingga

$$L(W) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{ab/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

dan

$$L(\Omega) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2$$

Misal

$$z = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2$$

dan

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} x_{ij} \Big/ ab \quad , \quad \bar{x}_{i.} = \sum_{j=1}^{b} x_{ij} \Big/ b \quad , \text{ serta}$$

$$\bar{x}_{.j} = \sum_{i=1}^{a} x_{ij} \Big/ a$$

Maka

$$z = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} ((x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}) + (\bar{x} - \mu) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x} - \alpha_i) + (\bar{x}_{.j} - \bar{x} - \beta_j))^2$$

Karena tiap - tiap jumlah yang berlainan adalah nol ,

dan $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ $\qquad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$

Sehingga

$$z = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} ((x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 + ab(\bar{x} - \mu)^2 +$$

$$+ b \sum_{i=1}^{a} (\bar{x}_{i.} - \bar{x} - \alpha_i)^2 + a \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_{.j} - \bar{x} - \beta_j)^2$$

Dengan meminimumkan z akan didapat nilai untuk μ , α_i, dan β_j masing - masing adalah :

$\bar{x} - \mu = 0 \rightarrow \mu = \bar{x}$, $\bar{x}_{i.} - \bar{x} - \alpha_i = 0 \rightarrow \alpha_i = \bar{x}_{i.} - \bar{x}$

dan $\bar{x}_{.j} - \bar{x} - \beta_j = 0 \rightarrow \beta_j = \bar{x}_{.j} - \bar{x}$

Selanjutnya akan mendeferensialkan parsiel kedua fungsi likelihood di atas dan mengnolkannya, untuk mendapatkan maksimum kedua fungsi likelihood tersebut, serta mengeliminasi nilai - nilai μ , α_i, β_j dengan nilai yang diperoleh di atas.

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \sigma^2} = -\frac{ab}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{ab} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x} - (\bar{x}_{i.} - \bar{x}) - (\bar{x}_{.j} - \bar{x}))^2$$

$$= \frac{1}{ab} \sum^{b} \sum^{a} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2$$

Sehingga fungsi likelihood maksimum dari L (Ω) adalah

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{ab}{2\pi\sigma^2}\right)^{ab/2} \exp - \frac{ab \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2}{2 \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2}$$

$$= \left[\frac{ab}{2\pi \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2}\right]^{ab/2} e^{-ab/2}$$

Selanjutnya untuk fungsi L (W),

$$\frac{\partial \ln l(W)}{\partial \sigma^2} = \frac{ab}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum^{b} \sum^{a} (x_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{ab}\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

Maka maksimum dari fungsi L (W) yakni L $(\hat{W})$ adalah :

$$L(\hat{W}) = \left[\frac{ab}{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2}\right]^{ab/2} \exp - \frac{ab\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2}{2\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2}$$

$$= \left[\frac{ab}{2\pi\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2}\right]^{ab/2} e^{-ab/2}$$

Sesuai dengan definisi 3 , maka likelihood rasio dari theorema ini adalah :

$$\lambda = \frac{L\ (\hat{W})}{L\ (\hat{\Omega})}$$

$$= \frac{\left[\frac{ab}{2\pi\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.})^2}\right]^{ab/2} e^{-ab/2}}{\left[\frac{ab}{2\pi\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x})^2}\right]^{ab/2} e^{-ab/2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2}\right]^{-ab/2}$$

Sehingga untuk random variabel adalah :

$$\lambda^{ab/2} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(X_{ij}-X_{i.}-\bar{X}_{.j}+\bar{X})^2}{\sum_{j}^{b}\sum_{i}^{a}\ \ldots}\right.$$