BAB II

KONSEP DASAR

2.1. RUANG SAMPEL

Definisi 4 :

Ruang sampel yang dinotasikan dengan Ω didefinisikan sebagai koleksi dari semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen .

Contoh 1.

Dipandang eksperimen perkumpulan sebuah dadu homogen dan berbentuk kubus. Jika W menyatakan muka dadu yang muncul dimana masing - masing diberi nomor 1,2,3,4,5 dan 6 , maka

$$\Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$$

2.2. RANDOM VARIABEL

Definisi 5 :

Random variabel didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan unsur - unsur ruang sampel suatu percobaan terhadap suatu gugus bilangan - bilangan nyata sebagai wilayah fungsi.

Jika random variabel dilambangkan dengan X, dengan $U = u_1, u_1, u_2, \ldots, u_n$ sebagai daerahnya, maka yang dimaksud sebagai $X(u_i)$ adalah suatu unsur yang merupakan bayangan unsur $u_i \in U$. Semua unsur $X(u_i)$ ini terkandung didalam wilayah random variabel X yaitu $W_x \in R$.

Contoh 2.

Pada pelemparan 3 keping mata uang dengan serentak,maka sebagai hasilnya salah satu akibat yang termasuk kedalam ruang sampel U

(+,−,+),(−,+,−) .

Maka random variabel yang dibatasi dengan memperhatikan sisi (−) adalah :

X (+,+,+) = 0

X (+,+,−) = X (+,−,+) = X (−,+,+) = 1

X (+,−,−) = X (−,+,−) = X (−,−,+) = 2 , dan

X (−,−,−) = 3

2.3. MEAN DAN VARIAN

Definisi 6 :

Misal X merupakan random variabel dengan density $f_X(x)$, maka mean yang dilambangkan dengan μ_X atau E(X) didefinisikan dengan :

$$E(X) = \sum_j x_j \, f_X(x_j) \quad \text{, jika X diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx \quad \text{, jika X kontinu}$$

$$= \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x)) \, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x) \, dx \text{ , untuk X sembarang random variabel}$$

dimana $F_X(x) = P(X \leq x)$

Definisi 7 :

Misal X merupakan random variabel dengan density $f_X(x)$ dan mempunyai mean $\mu_X = E(X)$, maka varian dari X yang dinyatakan dengan σ_X^2 atau Var (X) didefinisikan dengan

$$Var(X) = \sum_j (x_j - \mu_X)^2 \, f_X(x) \quad \text{, jika X diskrit}$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) + F_X(-x))dx - u_x^2 \text{ , untuk X sembarang random variabel.}$$

dimana $F_X(x) = P\left[X \leq x \right]$

2.4. DISTRIBUSI NORMAL

Definisi 8 :

Random variabel X berdistribusi normal dengan mean μ dan varian σ^2 , jika density dari X diberikan dengan

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

Theorema 1 :

Jika X random variabel yang berdistribusi normal dengan mean μ dan varian σ^2 yang dapat ditulis $n(u,\sigma^2)$ $\sigma > 0$, maka random variabel $Z = (X - \mu)/\sigma$ adalah distribusi normal yang mempunyai mean 0 dan varian 1 , yang dapat ditulis dengan $n(0,1)$.

Bukti :

Karena $\sigma > 0$, diambil fungsi distribusi $G(z)$ dari Z

$$G(z) = Pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z\right) = Pr\ (x \leq z\sigma + \mu\ )$$

maka

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z\sigma + u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Misal $y = (x - \mu)^2/\sigma$, maka

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$G'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad , -\infty < z < \infty$$

Sekarang misalkan $g(z) = G(z)$, maka

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad , -\infty < z < \infty$$

Dari sini sesuai dengan definisi 8 di atas berarti meannya = 0 dan variannya = 1 yang dapat ditulis dengan $n(0,1)$, sehingga teorema terbukti .

2.5. INDEPENDEN STOKASTIK

Definisi 9 :

Setiap fungsi $f(.)$ dengan domain R dan kodomain $(0,\infty)$ disebut fungsi density probabilitas bila hanya bila :

(i). $f(x) \geq 0$, untuk semua x

(ii). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Definisi 10 :

Misal X_1 dan X_2 adalah random variabel yang mempunyai fungsi density probabilitas berserikat $f(x_1,x_2)$ dan fungsi density probabilitas marginal $f_1(x_1)$ dan $f_2(x_2)$ maka random variabel X_1 dan X_2 dikatakan independen stokastik bila hanya bila :

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

Contoh 3 :

Diberikan fungsi density probabilitas berserikat dari X_1 dan X_2 yaitu :

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \quad , 0 < x_1 < 1 \ , \ 0 < x_2 < 1$$

$$= 0 \quad , \text{untuk yang lainnya}$$

Akan dibuktikan bahwa X_1 dan X_2 tidak independen stokastik .

Fungsi density marginal disini adalah :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\ dx_2 = \int_0^1 (x_1+x_2)\ dx_2$$

$$= x_1 + \tfrac{1}{2}\ ,\ 0 < x_1 < 1$$

$$= 0\ ,\ \text{untuk yang lainnya}$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\ dx_1 = \int_0^1 (x_1+x_2)\ dx_1$$

$$= \tfrac{1}{2} + x_2\ ,\ 0 < x_2 < 1$$

$$= 0\ ,\ \text{untuk yang lainnya}$$

Karena $f(x_1,x_2) \neq f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$, maka terbukti random variabel ini tidak independen stokastik.

2.6. FUNGSI CHI KWADRAT

Definisi 11 :

Misal X_i adalah random variabel dengan $n(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,2, \ldots , n$, dan misal $X_1,X_2, \ldots , X_n$ adalah independen stokastik , maka fungsi density probabilitas gabungan adalah :

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)}{\sigma_i} \right]^2$$

dengan $-\infty < x_i < \infty$

2.7. DERIVATIF

Definisi 12 :

$Y = f(x)$ adalah fungsi dari x , jika limitnya

$$\frac{dY}{dx} = f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ada dan berhingga, maka dikatakan bahwa limit ini merupakan derivatif dari f pada x dan dikatakan juga bahwa deferensiabel pada x.

Biasanya untuk $f(x+\Delta x) - f(x)$ sering ditulis dengan ΔY sehingga

$$\frac{dY}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x}$$

Contoh 4 :

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x - 4x - 2\Delta x$$

$$= 3x^2 - 4x$$

2.8. DERIVATIF PARSIEL

Definisi 13 :

Derivatif parsiel adalah suatu derivatif yang diperoleh dengan mendeferensialkan suatu fungsi f terhadap satu variabel bebas, sedang variabel bebas yang lain dianggap suatu konstanta.

Definisi 14 :

Misal $z = f(x_1, x_2)$ maka derivatif parsiel dari f terhadap x_1 dititik $x^o = (x_1^o, x_2^o)$ ditunjukkan oleh limitnya :

$$\frac{\partial f(x_1^o, x_2^o)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^o + \Delta x_1, x_2^o) - f(x_1^o, x_2^o)}{\Delta x_1}$$

dan derivatif parsiel dari f terhadap x_2 dititik x^o adalah :

$$\frac{\partial f(x_1^o, x_2^o)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1^o, x_2^o + \Delta x_2) - f(x_1^o, x_2^o)}{\Delta x_2}$$

Contoh 5 :

$f(x,y) = 45 - 2x^2 - 3y^2$

maka derivatif parsiel f terhadap x , y dianggap konstanta , sehingga :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(45 - 2x^2 - 3y^2)$$

$$= -4x - 0 = -4x$$

dan derivatif parsiel f terhadap y , x dianggap konstanta , sehingga :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(45 - 2x^2 - 3y^2)$$

$$= 0 - 6y = -6y$$

2.9. REGRESI ISOTONIK

Definisi 15 :

Misal X adalah himpunan finite $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, dengan urutan tunggal $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Suatu fungsi f bernilai riil dalam X adalah isotonik , jika $x, y \in X$ dan $x < y$ sehingga $f(x) < f(y)$.

Definisi 16 :

Misal g adalah fungsi dalam X dan w adalah suatu fungsi positip yang diberikan dalam X. Suatu fungsi isotonik g* dalam X adalah regresi isotonik dari g dengan urutan $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, jika kelompok fungsi f minimum dalam X dengan jumlah :

$$\sum_{x \in X} (g(x) - f(x))^2 \, w(x)$$

Contoh 6 :

Misal X = 1,2, ... , 12 . Untuk setiap $x \in X$, g(x)

1854 + x

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g(x)	25	13	2	15	14	21	9	33	25	15	21	25

Penyelesaian :

Untuk x = 1 dan x =2 dikumpulkan didapat blok (1,2) dengan bobot w = 1+1 = 2 dan nilai rata - ratanya adalah (25 + 13)/2 = 19. Sekarang terlihat 19 > 2 , maka blok (1,2) dan (3) dikumpulkan didapat blok (1,2,3) dengan bobot 2+1 = 3 dan rata - ratanya (38+2)/3 = 40/3 = 13,3 , sehingga demikian seterusnya dan didapat :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g(x)	25	13	2	15	14	21	9	33	25	15	21	25
w		3		2		2			3		1	1
Rt-rt		40/3		29/2		30/2			73/3		21/1	25/1
		13,3		14,5		15			24,3		21	25

Dari tabel diatas terlihat bahwa rata - rata dari blok (8,9,10) lebih besar dari rata - rata blok (11), maka harus dikumpulkan dan bobotnya menjadi 3+1= 4 , dengan rata - ratanya adalah = 23,5

1	Blok	(1,2,3)	(4,5)	(6,7)	(8,9,10)	(11)	(12)
	Bobot	3	2	2	3	1	1
	Rt-rt	13,3	14,5	15	24,3	21	25
11	Bobot	3	2	2	4		1
	Rt-rt	13,3	14,5	15	23,5		25

Sehingga regresi isotoniknya adalah :

$g^*(1) = g^*(2) = g^*(3) = 13,3$

$g^*(4) = g^*(5) = 14,5$

$g^*(6) = g^*(7) = 15$

$g^*(8) = g^*(9) = g^*(10) = g^*(11) = 23,5$

$g^*(12) = 25$

Theorema 2 :

Suatu fungsi isotonik u pada X adalah regresi isotonik dari g dengan bobot w jika dan hanya jika :

$$\sum_x (\, g(x) - u(x) \,)\, u(x)\, w(x) = 0$$

dimana

$$\sum_x g(x)\, w(x) = \sum_x g^*(x)\, w(x) \text{ , dan } u = g^*$$

Bukti :

Pertama disini akan dibuktikan dengan suatu contoh. Misal $g_1 = 0$; $g_2 = 2$ dan $g_3 = 0$, disini akan menghitung bilangan - bilangan regresi isotonik g_1^* , g_2^* dan g_3^* dengan bobot yang sama dengan g .

Bilangan - bilangan regresi isotonik dari g dimana $X = (1,2,3)$ dengan urutan tunggal dalam X adalah $1 \precsim 2 \precsim 3$; $w(x) = 1$, $x = 1,2,3$ dan $g(1) = g_1 = 0$, $g(2) = g_2 = 2$, $g(3) = g_3 = 0$.

Karena $g_2 \geqslant g_3$, maka (2) dan (3) digabung , yang berarti $g^*(1) = 0$, $g^*(2) = g^*(3) = 1$.

Jika harga - harga ini dimasukkan kedalam persamaan theorema di atas maka berlaku.

Selanjutnya untuk x sembarang , karena untuk setiap jumlah g(x) adalah sama dengan jumlah g*(x) dengan bobot yang sama, maka pasti untuk setiap x berlaku

$$\sum_{x} \left(g(x) - u(x) \right) u(x)\, w(x) = 0$$

2.10. ESTIMASI LIKELIHOOD MAKSIMUM

Definisi 17 :

Estimator dari suatu parameter didefinisikan sebagai titik yang digunakan untuk mengestimasi suatu parameter .

Definisi 18 :

Misal U $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sedemikian hingga fungsi likelihood

$$L\left((x_1, x_2, \ldots, x_n) ; x_1, x_2, \ldots, x_n \right)$$

terkecil dari maksimum L $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ untuk setiap θ . Maka statistik $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ didefinisikan sebagai suatu likelihood maksimum dengan lambang :

$$\hat{\theta} = u\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Contoh 7 :

Misal pada suatu sawah seluas 1 ha yang ditanami dengan 160.000 rumpun padi dengan jarak tanam 25x25 cm ingin diketahui suatu gambaran mengenai bobot gabah $X = x$ gram yang dihasilkan suatu rumpun.

Dari sini telah diambil suatu sampel random dengan nilai pengamatan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, dengan fungsi likelihood :

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \mu, \sigma^2), \text{ dimana}$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dari sini

$$= -\frac{n}{2}\ \ln 2\pi - \frac{n}{2}\ \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Kemudian fungsi ini dideferensialkan parsiel terhadap μ dan σ^2 dan didapat

$$\frac{\partial \ln(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

dan

$$\frac{\ln(\mu, \sigma^2)}{\sigma^2} = \frac{-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n\sigma^2 = 0$$

Yang berarti

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0\ ,\ \text{dan}\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n\sigma^2 = 0$$

Misal μ diestimasi oleh $\hat{\mu}$, sehingga

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n = \bar{x}$$

Dan juga misal estimasi dari σ^2 adalah $\hat{\sigma}^2$, dan didapat

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Big/ n$$

Sehingga estimasi yang dicari adalah :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ \text{dan}\ \ {}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

2.11. METODE JUMLAH KWADRAT TERKECIL

Metode ini digunakan untuk mengestimasi suatu fungsi + suatu penyimpangan acak e

Contoh 8 :

Misal pada contoh 7 tidak dibuat anggapan bahwa X_i berdistribusi normal, mean $\mu = E(x_i)$, masih dapat diestimasi dengan cara jumlah kwadrat minimum , untuk itu diambil model

$X_i = \mu + e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

maka

$Q = E\,(x_i - \mu)^2$ mencapai minimum apabila untuk μ disisipkan nilai $\hat{\mu}$ yang merupakan solusi dari persamaan :

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)}{\partial \mu}$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\mu = 0$$

Sehingga

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$$

2.12. ESTIMASI REGRESI ISOTONIK

Definisi 19 :

Misal $\bar{y}(x)$ adalah mean sampel $m(x)$ dari suatu distribusi normal dengan mean $\theta = \mu(x)$ dan varian $1/a\lambda(x)$ dimana $\lambda(x)$ diketahui ,$x \in X$. Dan misal pula $\mu(\cdot)$ diketahui sebagai isotonik dengan memperhatikan suatu " urutan " dalam X . Maka estimasi likelihood maksimum dari $u(.)$ adalah regresi isotonik $\hat{\mu}^*(.)$ dari $\bar{y}(.)$ dengan bobot $m(x)\lambda(x)$, baik untuk a diketahui maupun tak diketahui .

2.13. UJI HIPOTESA

Suatu hipotesa statistik adalah suatu pernyataan dari distribusi dengan satu atau lebih random variabel. Jika hipotesa statistik dengan distribusi dapat diuraikan secara lengkap disebut hipotesa statistik sederhana , dan jika tidak dapat disebut hipotesa majemuk.

Contoh 9 :

$H_o : \theta \leq \theta_o$ dan $H_1 : \theta > \theta_o$, merupakan hipotesa statistik majemuk dan jika ada pengganti dari $H_o : \theta \leq \theta_o$ misal $H_o : \theta_o = 0$ maka $H_o : \theta_o = 0$ disebut hipotesa statistik sederhana .

Definisi 21:

Suatu uji dari suatu hipotesa statistik adalah suatu pernyataan saat nilai sampel percobaan didapat yang berguna untuk menerima atau menolak hipotesa yang digunakan (diinginkan).