BAB II

ALJABAR PENYAMBUNGAN DAN FUNGSI PENYAMBUNGAN

II.1. ALJABAR BOOLE

Aljabar Boole adalah suatu aljabar yang terdiri dari himpunan B (Paling sedikit terdiri dari dua elemen 0 dan 1) dengan tiga operasi, yaitu operasi AND (perkalian Boole), operasi OR (penjumlahan Boole) dan operasi NOT (komplemen) yang terdefinisi pada himpunan tersebut sedemikian sehingga untuk setiap x,y dan z dari B, x.y (perkalian x dan y), x+y (jumlahan x dan y) dan x' (komplemen x) ada dalam B.

Untuk setiap aljabar Boole berlaku aksioma sebagai berikut :

Perkalian

1. Idempoten : $x.x = x$
2. Komutatif : $x.y = y.x$
3. Asosiatif : $x.(y.z) = (x.y).z$
4. Absorptif : $x.(x+y) = x$
5. Distributif : $x.(y+z) = (x.y)+(x.z)$
6. Komplemen : $x.x' = 0$

Penjumlahan

1. Idempoten : $x+x = x$
2. Komutatif : $x+y = y+x$
3. Asosiatif : $x+(y+z) = (x+y)+z$
4. Absorptif : $x+(x+y) = x$
5. Distributif : $x+(y.z) = (x+y).(x+z)$
6. Komplemen : $x.x' = 0$

Dimana x,y dan z adalah variabel-variabel biner dalam B yaitu dapat mempunyai dua kemungkinan nilai 0 dan 1.

Perlu diketahui bahwa operasi x.y dan x+y adalah bukan operasi aljabar biasa, serta elemen 0 dan 1 tidak berarti nol dan satu dalam aljabar biasa.

Definisi 1.1.1

Misalkan S dan T adalah dua buah himpunan. Jika terdapat korespondensi satu-satu antara S dan T maka korespondensi tersebut dinamakan Isomorfisma.

Contoh 1.1.1

Untuk aljabar Boole dua elemen B2 = $\{0,1\}$. Tiga operasi ., + dan ' didefinisikan sebagai berikut :

.	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

'	
0	1
1	0

Selanjutnya untuk himpunan kuasa P(S) dari suatu himpunan S yang tunggal. Jadi P(S) = $\{\emptyset, S\}$. Tabel untuk irisan, gabungan dan komplemen adalah sebagai berikut :

∩	∅	S
∅	∅	∅
S	∅	S

U	∅	S
∅	∅	S
S	S	S

~	
∅	S
S	∅

Kedua perangkat tabel operasi diatas menunjukkan bahwa kedua aljabar Boole ini saling isomorfik.

Teorema 1.1.1 (Teorema De Morgan)

a) $(x.y)' = x' + y'$

b) $(x+y)' = x' . y'$

Bukti

a)
$$\begin{aligned}(x.y)+(x'+y') &= (x+(x'+y')).(y+(x'+y')) \\ &= ((x+x')+y').(x'+(y+y')) \\ &= (1+y').(x'+1) \\ &= 1.1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x.y).(x'+y') &= (x.y.x')+(x.y.y') \\ &= (x.x'.y)+(x.y.y') \\ &= (0.y)+(x.0) \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi $x.y$ dan $x' + y'$ saling komplemen.

Untuk Teorema b) dibuktikan dengan cara yang sama.

II.2. FUNGSI BOOLE

Definisi 1.1.2

Misalkan x1,x2,...,xn adalah variabel-variabel pada suatu aljabar Boole B. Suatu pemetaan dari f dari B kedalam dirinya sendiri adalah suatu fungsi Boole dengan n variabel yang dinyatakan dengan f(x1,x2,...,xn), jika dapat dibangun berdasarkan kaidah-kaidah berikut ini :

1. Misalkan a menyatakan suatu tetapan pada B dan xi menyatakan variabel, maka f(x1,x2,...,xn)= a dan f(x1,x2,...,xn) = xi adalah fungsi-fungsi Boole.
2. Jika f(x1,x2,...,xn) adalah fungsi Boole, maka $(f(x1,x2,...,xn))'$ adalah fungsi Boole.
3. Jika f1(x1,x2,...,xn) dan f2(x1,x2,...,xn) adalah fungsi-fungsi Boole, maka f1+f2 dan f1.f2 adalah fungsi-fungsi Boole.

Jadi suatu fungsi Boole adalah setiap fungsi yang dapat dibentuk dari fungsi tetapan dan variabel dengan operasi-operasi +,. dan ' dalam jumlah yang berhingga.

Definisi 1.1.2

Setiap aljabar Boole B adalah isomorfik ke suatu hasil kali Kartesian antara n buah aljabar Boole dua elemen B2 = $\{0,1\}$, yang dinamakan $B_2^n = \underbrace{B2XB2X...XB2}_{n}$,untuk bilangan bulat n tertentu.

Misalkan A adalah suatu himpunan, sedangkan x dan y adalah elemen dalam A. Didefinisikan relasi " $x \leq y$ " sebagai y mencakup x dan relasi " $x < y$ " sebagai y harus mencakup x.

Definisi 1.1.4

Relasi pada himpunan A disebut keterurutan parsial pada A bila memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Refleksif : Untuk semua $x \in A$, $x \leq x$
2. Antisimetris : jika $x, y \in A, x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$
3. Transitif : jika $x, y, z \in A, x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$

Suatu himpunan P dimana didefinisikan relasi $\leq$ sebagai keterurutan parsial disebut himpunan terurut parsial (Partially Ordered Set) atau suatu Poset.

Definisi 1.1.5

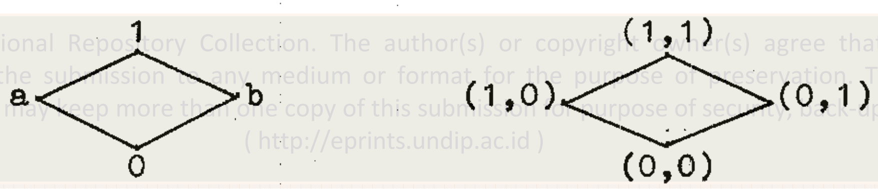
Suatu relasi R pada A dikatakan terhubung jika $x, y \in A$ maka $x \leq y$ atau $y \leq x$

Contoh 1.1.2

Himpunan hasil kali Kartesian antara 2 buah aljabar Boole dua elemen $B2 = \{0,1\}$ yaitu $B_2^2 = B2 \times B2 = \{ (0,0), (0,1), (1,0), (1.1) \}$ adalah merupakan suatu Poset.

Contoh 1.1.3

Aljabar Boole empat elemen $B4 = \{0, a, b, 1\}$ adalah isomorfik ke B_2^2, seperti diperlihatkan pada Gambar 1.1.1



Teorema 1.1.2

Banyaknya fungsi Boole $f(x1,x2,\ldots,xn)$ yang berlainan (tak ekivalen) pada B2 yang memetakan dari himpunan hasil kali kartesian $\{0,1\}^n$ kedalam $\{0,1\}$ adalah sama dengan 2^{2^n}.

Bukti

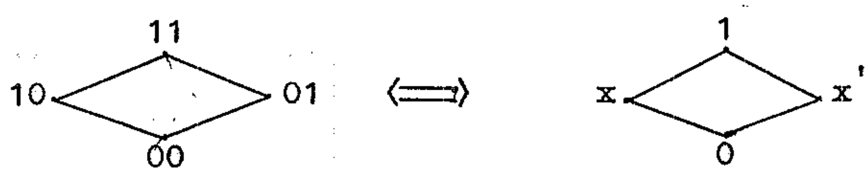
Dalam wilayah domainnya ada $\underbrace{2X2X2X\ldots X2}_{n} = 2^n$ elemen

Karena masing-masing dari 2^n elemen ini dapat mempunyai salah satu dari kedua nilai 0 dan 1 dengan tidak saling bergantungan, maka terdapat

$$\underbrace{2X2X2X\ldots X2}_{2^n} = 2^{2^n} \text{ pemetaan yang berlainan.}$$

Untuk n=1 (Satu variabel) ada $2^{2^1} = 2^2 = 4$ pemetaan yang berlainan. Keempat pemetaan yang berlainan dari $\{0,1\}$ kedalam $\{0,1\}$ ditunjukkan pada tabel dibawah. Sedangkan Kisinya diperlihatkan pada Gambar 1.1.2

x	f1(x)=0	f2(x)=x	f3(x)=x'	f4(x)=1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1



Gambar 1.1.2

Dari Gambar 1.1.2 terlihat bahwa aljabar Boole ini isomorfik ke aljabar hasil kali Kartesian B_2^2.

Untuk n = 2 (dua variabel) ada $2^{2^2} = 2^4 = 16$ pemetaan yang berlainan. Ke enam belas pemetaan dua variabel dibuat tabel sebagai berikut :

x1	x2	f1(x1,x2)=0	f2= x1x2	f3= x1 $\not\supset$ x2	f4= x1
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

x1	x2	f5= x1 $\not\subset$ x2	f6= x2	f7= x1 $\oplus$ x2	f8= x1 + x2
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

x1	x2	f9= x1 $\downarrow$ x2	f10=x1 $\not\equiv$ x2	f11= x2'	f12= x1 $\subset$ x2
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

x1	x2	f13= x1'	f14= x1 $\supset$ x2	f15= x1 $\mid$ x2	f16= 1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Dari tabel diatas terlihat f1,f2,f4,f6,f8,f11,f13, dan f16 adalah fungsi Boole. Untuk f3,f5,f7,f9,f10,f12, f14 dan f15 dinyatakan sebagai berikut :

$$f3 = x1 \not\supset x2 = x1x2'$$

$$f5 = x1 \not\subset x2 = x1'x2$$

$$f7 = x1 \oplus x2 = x1x2' + x1'x2$$

$f9 = x1 \downarrow x2 = x1'x2'$

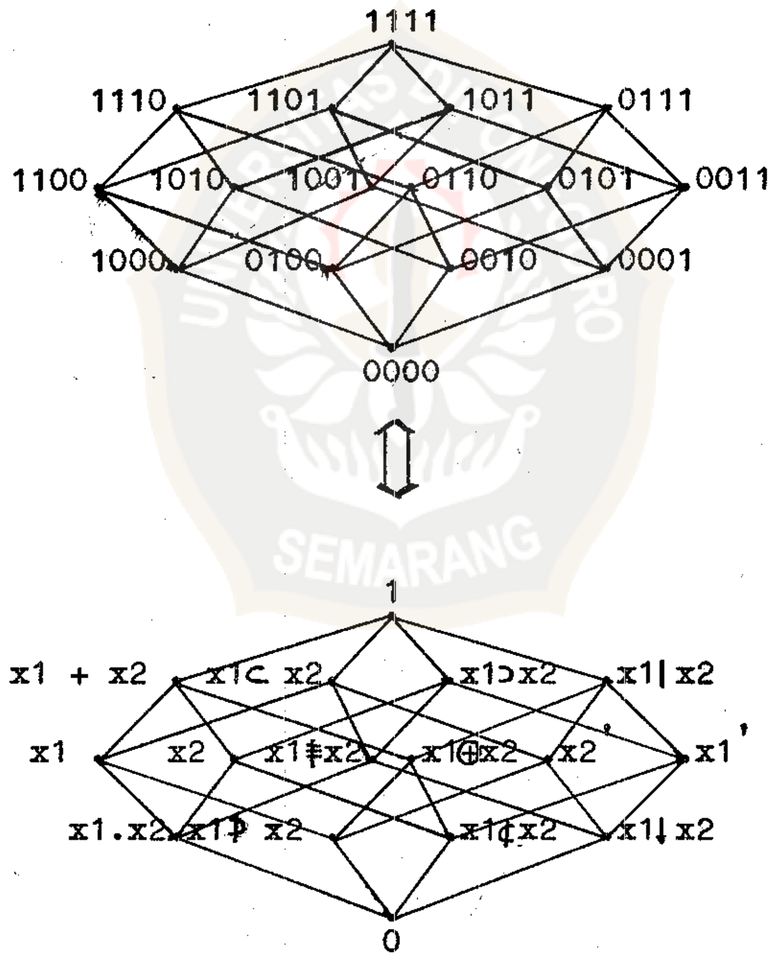
$f10 = x1 \ddagger x2 = x1x2 + x1'x2'$

$f12 = x1 \subset x2 = x1 + x2'$

$f14 = x1 \supset x2 = x1' + x2$

$f15 = x1 \mid x2 = x1' + x2'$

Sedangkan gambar kisinya adalah sebagai berikut :



Gambar 1.1.2 A . Kisi Boole yang dibentuk

oleh enam belas fungsi dua variabel

II.3. ALJABAR PENYAMBUNGAN DAN FUNGSI PENYAMBUNGAN

Aljabar penyambungan merupakan aljabar Boole dua elemen B2. Aljabar ini merupakan landasan matematika bagi analisa serta perancangan rangkaian-rangkaian penyambungan yang membangun sistem-sistem digital. Aljabar penyambungan terdiri dari dua elemen ekstrem, angka terbesar dinyatakan dengan 1 dan angka terkecil dinyatakan dengan 0. Fungsi Boole yang terdefinisi pada aljabar penyambungan disebut fungsi penyambungan.

Teorema 1.1.3 Teorema Perluasan (Ekspansi)

a) $f(x1,x2,\ldots,xn)=x1.f(1,x2,\ldots,xn)+x1'.f(0,x2,\ldots,xn)$

b) $f(x1,x2,\ldots,xn)=(x1+f(0,x2,..,xn)).(x1'+f(1,x2,..,xn))$

Bukti

Jika pertama kali disubstitusikan $x1=1$ dan $x1'=0$ dan kemudian disubstitusikan $x1=0$ dan $x1'=1$ dalam masing-masing persamaan, maka persamaan-persamaan tersebut berubah menjadi identitas.

Contoh 1.1.4

Fungsi $f(x1,x2,x3)=(x1.x2)'x3 + x1(x2+x3')$

dapat dinyatakan sebagai

$$f(x1,x2,x3)=x1(x2'x3+x2+x3') + x1'x3$$

atau

$$f(x1,x2,x3)=(x1+x3)(x1'+x2'x3+x2+x3')$$

Apabila dua variabel x1,x2 diekspansi bersama-sama maka persamaan dari Teorema 1.1.3 a) menjadi

$$f(x1,x2,\ldots,xn)=x1x2f(1,1,x3,..,xn)+x1x2'f(1,0,x3,..,xn)$$
$$+x1'x2f(0,1,x3,..,xn)+x1'x2'f(0,0,x3,..,xn)$$

II.4. BENTUK KANONIK FUNGSI PENYAMBUNGAN

Terdapat dua bentuk kanonik fungsi penyambungan yaitu bentuk kanonik jumlah dari perkalian dan perkalian dari jumlah.

Contoh 1.1.5

Bentuk kanonik jumlah dari perkalian

$$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xyz' + xyz \qquad (i)$$

Bentuk kanonik perkalian dari jumlah

$$f(x,y,z) = (x+y+x')(x'+y+z)(x'+y+z') \qquad (ii)$$

Masing-masing suku (term) dari jumlah dari perkalian pada persamaan (i) disebut minterm dan masing-masing suku dalam perkalian dari jumlah pada persamaan (ii) disebut maxterm.

Tabel kebenaran untuk persamaan (i) dan (ii) adalah sebagai berikut :

Kode desimal (r)	Minterm dan maxterm	x y z	f(x,y,z)
0	$m0 = x'y'z'$	0 0 0	1
1	$M1 = x+y+z'$	0 0 1	0
2	$m2 = x'yz'$	0 1 0	1
3	$m3 = x'yz$	0 1 1	1
4	$M4 = x'+y+z$	1 0 0	0
5	$M5 = x'+y+z'$	1 0 1	0
6	$m6 = xyz'$	1 1 0	1
7	$m7 = xyz$	1 1 1	1

Kaidah 1.1.1

Semua minterm dalam bentuk jumlah dari perkalian kanonik untuk suatu fungsi penyambungan dapat diperoleh dari baris-baris dalam tabel kebenaran yang dipetakan kedalam 1.

Masing-masing nilai 0 untuk suatu variabel menunjukkan bentuk terkomplemen bagi variabel yang bersangkutan, dan masing-masing nilai 1 untuk suatu variabel menunjukkan bentuk tak terkomplemen.

Begitu pula alasan bahwa baris 001 berhubungan dan hanya berhubungan dengan maxterm $x+y+z'$ adalah karena $x+y+z' = 0$ jika dan hanya jika $x=0$, $y=0$ dan $z'=0$. Alasan bahwa dua baris lainnya 100 dan 101 berhubungan dengan maxterm $x'+y+z$ dan $x'+y+z'$ adalah sama dengan alasan diatas.

Kaidah 1.1.2

Semua maxterm dalam bentuk perkalian dari jumlah untuk suatu fungsi penyambungan dapat diperoleh dari baris baris dalam tabel kebenaran yang dipetakan kedalam 0. Masing-masing nilai 0 untuk suatu variabel menunjukkan bentuk tak terkomplemen bagi variabel yang bersangkutan dan masing-masing nilai 1 untuk suatu variabel menunjukkan bentuk terkomplemen.

Oleh karena adanya hubungan satu-satu antara minterm dan maxterm dengan baris-baris nilai dari variabel pada tabel kebenaran, maka dapat diperoleh pernyataan sederhana untuk minterm dan maxterm. Untuk menunjukkan baris - baris dalam tabel kebenaran tidak digunakan bilangan-bilangan biner (000,001,010 dan seterusnya), melainkan digunakan bilangan desimalnya yang bersangkutan (0,1,2 dan seterusnya).

Setiap minterm dan maxterm dapat dinyatakan dengan huruf m dan M dengan sebuah Indeks r yang disebut nomor baris, yaitu pernyataan desimal dari bilangan biner yang menyatakan baris yang bersangkutan.

Kedua bentuk kanonik diatas dapat dinyatakan dengan

$$f(x,y,z) = m0 + m2 + m3 + m6 + m7$$

dan $f(x,y,z) = M1 + M4 + M5$

yang selanjutnya masing-masing disederhanakan menjadi

$$f(x,y,z) = \sum (0,2,3,6,7)$$

dan $f(x,y,z) = \prod (1,4,5)$

Perlu diketahui bahwa ekspresi $\sum (0,2,3,6,7)$ menunjukkan bahwa baris-baris yang nomor barisnya tidak ada dalam ekspresi penjumlahan ini yaitu baris 1,4,5 dipetakan kedalam 0, demikian pula ekspresi $\prod (1,4,5)$ menunjukkan bahwa baris-baris 0,2,3,6,7 dipetakan kedalam 1.

Himpunan baris yang berhubungan dengan minterm dari fungsi penyambungan yang ditentukan secara lengkap adalah berdiri sendiri terhadap himpunan baris yang berhubungan dengan maxterm. Dua himpunan tersebut saling komplemen satu sama lain. Sehingga bila bentuk jumlah dari perkalian (perkalian dari jumlah) kanonik dari suatu fungsi penyambungan diketahui, maka bentuk perkalian dari jumlah (jumlah dari perkalian) kanonik dari fungsi tersebut dapat diperoleh dari semua baris yang tidak terdapat dalam himpunan baris yang berhubungan dengan minterm - (maxterm) nya serta penerapan kaidah 1.1.1 dan 1.1.2.