BAB III
PROGRAM LINIER

3.1 Bentuk Umum Program Linier

Program Linier merupakan salah satu disiplin dalam Operasi Riset (OR) yang paling sering dijumpai dalam praktek.

Secara umum bentuk masalah Program Linier dapat disajikan dalam bentuk :

Menentukan nilai x_j : j= 1, 2, ...n yang memenuhi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} (\leqslant, =, \geqslant) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

$x_j \geqslant 0$

dan mengoptimalkan $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \; x_j$

Atau

Menentukan X yang memenuhi :

$A X \; (\leqslant , = , \geqslant) \; B$ .... (1)

$X \geqslant 0$ .... (2)

dan me $\frac{\text{maksimal}}{\text{minimal}}$ kan $f = CX$ ....(3)

dimana :

$C = c_1 , c_2 , \dots , c_n$ merupakan vektor baris.

c_j tersebut dinamakan koefisien ongkos atau cost coefisien

Selanjutnya :

syarat (1) dinamakan syarat utama

syarat (2) dinamakan syarat tak negatif.

3.2 Teori Umum Program Linier

Himpunan Konveks

Dibawah ini akan disajikan pengertian dan sifat-sifat himpun an konveks.

Definisi 11 :

Jika T_i dimana $i = 1 , 2 , \dots , p$ merupakan titik titik dalam ruang euclides E^n dan apabila :

$$T = \sum_{i=1}^{p} a_i T_i \quad \text{dimana} \quad a_i \geqslant 0 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{p} a_i = 1$$

maka T dinamakan kombinasi konveks dari titik-titik T_1, T_2 , ... T_i, ... , T_p.

Contoh :

1. $T = 2/3\ T_1 + 1/3\ T_2$

untuk $T_1 = (6 , 2 , 9)$ dan $T_2 = (3 , -2 , 3)$

maka $T = (5 , 2/3 , 7)$

2. $T = 1/4\ T_1 + 1/4\ T_2 + 1/2\ T_3$

untuk $T_1 = (2 , 0)$

$T_2 = (4 ,-4)$

$T_3 = (3 , 8)$

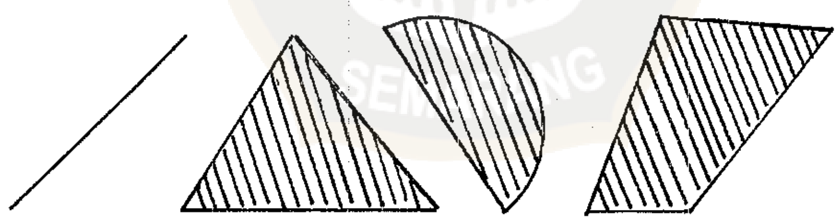
maka $T = (4 , 2)$

Definisi 12 :

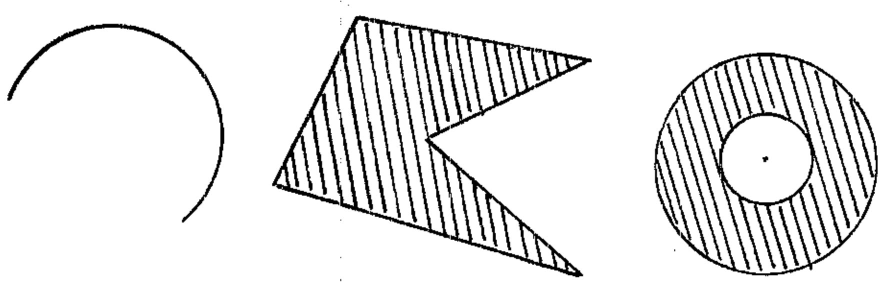
Himpunan $C \subset E^n$ disebut himpunan konveks bila dan hanya bila untuk sembarang dua titik T_1 , T_2 jika T_1 dan T_2 dalam C maka setiap kombinasi konveks dari T_1 dan T_2 juga berada didalam C.

Contoh :

Himpunan konveks dalam bidang



Himpunan dalam bidang yang tidak konveks



Theorema 1 :

Jika C suatu himpunan konveks dari titik-titik T_i di mana $i = 1, 2, \ldots, p$ didalam himpunan C, maka setiap kombinasi konveks T_i termuat didalam himpunan C.

Bukti :

Dibuktikan dengan induksi matematika.

Ambil sembarang himpunan (p+1) titik -i.

Andaikan sifat berlaku untuk p titik , maka disusun sebarang kombinasi konveks ke (p+1) titik tersebut, yaitu :

$$T = \sum_{i=1}^{p+1} a_i T_i$$

$$= a_1 t_1 + a_2 T_2 + \ldots + a_p T_p + a_{p+1} T_{p+1}$$

dimana :

$$a_i \geqslant 0 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{p+1} a_i = 1$$

Menurut definisi 11 , T merupakan kombinasi konveks dari titik-titik T_i jika :

$$T = \sum_{i=1}^{p} a_i T_i \quad \text{dengan} \quad a_i \geqslant 0$$

dimana :

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = 1$$

maka :

$$T = \sum_{i=1}^{p} a_i \underbrace{\left(\frac{a_1 T_1}{\sum_{i=1}^{p} a_i} + \frac{a_2 T_2}{\sum_{i=1}^{p} a_i} + \dots + \frac{a_p T_p}{\sum_{i=1}^{p} a_i} \right)}_{P}$$

$$+ a_{p+1} T_{p+1}$$

$$T = \sum_{i=1}^{p} a_i \, P + a_{p+1} T_{p+1}$$

Ternyata P dapat ditulis dalam bentuk kombinasi konveks titik-tik T_1, T_2, ... , T_p , sehingga sesuai induksi $P \in C$, kemudian ternyata T adalah kombimasi konveks P dan T_{p+1}. Jadi menurut definisi 12 konveks bagi C dan $T \in C$, maka langkah induksi terbukti.

Sifat berlaku untuk p = 1 , sehingga berlaku juga bagi sebarang bilangan asli.

Terbukti.

Theorema 2 :

Himpunan kombinasi konveks dua titik P dan Q adalah ruas garis PQ.

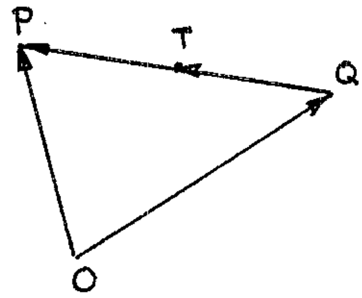
Bukti :

Suatu titik T pada ruas garis PQ dapat ditulis secara tunggal sebagai :

$$OT = OQ + \lambda QP \text{ , dimana : } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Secara titik dapat ditulis :

$$T = Q + \lambda (P - Q)$$
$$= (1 - \lambda) Q + \lambda P$$



Atau :

$$T = a_1 Q + a_2 P$$

dimana :

$$a_1 \geqslant 0 \text{ , } a_2 \geqslant 0 \quad \text{dan} \quad a_1 + a_2 = 1$$

Bentuk terakhir $T = a_1 Q + a_2 P$ tidak lain merupakan ko - mbinasi konveks P dan Q.

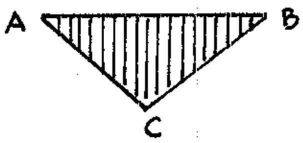
Terbukti.

Definisi 14 : Titik Ekstrim

Titik ekstrim himpunan konveks C adalah titik dalam C yang tidak dapat ditulis sebagai kombinasi konveks dua titik lain yang berbeda dalam C.

Contoh :

Setiap titik pada busur AB merupakan titik ekstrim.



Ketiga titik sudut A,B,C merupakan titik ekstrim.

Definisi 15 : (Konveks Hull)

Konveks hull suatu himpunan S ditulis C(S) adalah himpunan semua himpunan konveks titik-titik yang diambil dari himpunan S.

Definisi 16 :

Jika himpunan S memuat anggota yang berhingga banyak, maka C(S) yaitu konveks hull dari S disebut Polyhedron Konveks.

Definisi 17 : (Simpleks)

Polyhedron konveks berdimensi n yang mempunyai (n+1) titik sudut (titik ektrim) dinamakan Simpleks.
Dalam bidang (E^2) simpleks adalah segitiga
Dalam ruang (E^3) simpleks adalah ruang bidang empat.

3.2. 1 Sifat-sifat Penyelesaian Fisibel Program Linier

Dalam pembicaraan sebelumnya telah didefinisikan bentuk umum Program Linier yang mencakup bentuk maksimum dan bentuk minimum sebagai berikut :

Menentukan X yang memenuhi :

$AX \; (\leqslant \; , \; = \; , \; \geqslant \;) \; B$ .... (1)

$X \geqslant 0$ .... (2)

dan me $\dfrac{\text{maksimal}}{\text{minimal}}$ kan $f = CX$ .... (3)

Untuk menyelesaikan masalah diatas maka bentuk program linier tsb. diubah dahulu kebentuk kanonik yang didefinisi - kan dibawah ini.

Definisi 18 :

Bentuk kanonik masalah program linier adalah program linier dimana syarat (1) berupa persamaan.

Sehingga bentuk kanonik program linier adalah :

Menentukan X yang memenuhi :

$AX = B$ .... (1')

$X \geq 0$ .... (2')

dan me $\frac{\text{maksimal}}{\text{minimal}}$ kan $f = CX$ .... (3')

Keterangan :

Perubahan dari bentuk pertidaksamaan (1) menjadi bentuk persamaan (1') dilakukan dengan memasukkan variabel ke longgaran atau slack variabel keruas kiri pada syarat (1).

Definisi 19 :

Jika nilai X pada penyelesaian program linier diatas memenuhi syarat (1) dan syarat (2), maka X dinamakan Penyelesaian Fisibel, selanjutnya disingkat PF.

Definisi 20 :

a. Apabila X selain memenuhi syarat (1) dan (2) juga memenuhi syarat (3), maka X dinamakan Penyelesaian Optimal atau disingkat PO.

b. Nilai X disebut Penyelesaian Basis susunan persamaan (1) jika (n-m) perubah x_j ; j = 1 , 2 , ... n disamakan dengan nol, dan susunan persamaan diselesaikan ke m perubah yang lain.

Definisi 21 :

a. Fungsional Linier f(X) adalah fungsi riil dari ruang vektor berdimensi n ke himpunan skalar, sedemikian sehingga untuk sembarang vektor $X = a_1 U_1 + a_2 U_2$ berlaku

$$f(X) = f_1 (a_1 U_1 + a_2 U_2)$$
$$= a_1 f(U_1) + a_2 f(U_2).$$

dimana :

U_1 dan U_2 sembarang vektor

a_1 dan a_2 skalar.

b. Fungsi sasaran $f = CX$ merupakan fungsional linier.

Theorema 3 :

Himpunan penyelesaian fisibel program linier merupakan himpunan konveks.

Bukti :

Jika himpunannya hanya memuat satu anggota, maka bukti sudah selesai (jelas).

Andaikan X_1 dan X_2 merupakan penyelesaian fisibel, maka :

$AX_1 = B$

$AX_2 = B$ dimana : $X_1 \geqslant 0$ dan $X_2 \geqslant 0$

Disusun X sebagai kombinasi konveks X_1 dan X_2 sebagai berikut :

$X = a_1X_1 + a_2X_2$ dengan $a_1 + a_2 = 1$

$a_1 \geqslant 0$ dan $a_2 \geqslant 0$

Maka :

$$AX = A (a_1X_1 + a_2X_2) = a_1AX_1 + a_2AX_2$$
$$= a_1 B + a_2 B = (a_1 + a_2) B = B$$

Jadi X memenuhi $AX = B$

Juga ternyata $X \geqslant 0$ karena $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $X_1 \geqslant 0$ dan $X_2 \geqslant 0$, sehingga X juga memenuhi persamaan (2) , maka X fisibel.

Terbukti himpunan penyelesaian fisibel adalah konveks.

Catatan :

Theorema 3 dengan buktinya tersebut juga berlaku jika diterapkan untuk masalah program linier yang syarat (1) berbentuk $AX \leqslant B$ maupun $AX \geqslant B$.

Selanjutnya F adalah lambang himpunan penyelesaian fisibel.

Theorema 4 :

ada

Jika ada penyelesaian fisibel (FS) maka adalah penyelesaian fisibel basis (BFS).

Bukti :

Misal $X = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ suatu penyelesaian fisbel dengan p buah perubah positif, p   n.

Perubah positif kita kumpulkan didepan, menjadi :

$$X = (x_1, x_2 , \ldots , x_p, 0 , 0 , \ldots , 0)$$

yang memenuhi persamaan (1) dan (2).

Dibentuk persamaan (1) menjadi :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B$$

Kemungkinan :

1). A_j independen linier :

p = m , jelas ada penyelesaian fisibel basis

$p < m$, dapat ditemukan $(m-p)$ vektor lain yang bersama-sama p vektor tadi akan menyusun basis dalam E^n, berarti akan didapat BFS yang degenerate dengan $(m-p)$ perubahnya sama dengan nol.

2). A_j dependen linier :

dapat ditemukan a_j yang tidak semua nol dimana :

$$\sum_{j=1}^{p} a_j A_j = 0$$

Akan diperlihatkan bagaimana memilih veltor-vektor A_j sedemikian sehingga A_j independent linier dan B dapat ditulis sebagai kombinasi linier mereka dengan koefisien tak negatif.

Didalam $\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B$, dengan $x_j > 0$, beberapa x_j dapat dijadikan nol dengan cara penggantian basis ., misalkan A_r masuk dari dependen linier diatas :

$$A_r = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{p} \frac{a_j}{a_r} A_j$$

Persamaan menjadi :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{p} \left(x_j - x_r \frac{a_j}{a_r} \right) A_j = B$$

Supaya perubah baru juga tak negatif maka :

$$x_j - x_r \cdot \frac{a_j}{a_r} A_j \geq 0$$

Maka ciri untuk menentukan r mengikuti pedoman :

$$\frac{x_r}{a_r} = \frac{\min}{j} \left\{ \frac{x_j}{a_j} \;,\; a_j > 0 \right\}$$

Kemudian x_r disamakan dengan nol, hingga B tertulis seba - gai kombinasi linier (p - 1) buah A_j dengan koefisien yg. positif.

Demikian seterusnya proses diulang sehingga vektor-vektor dengan koefisien positif akan independen, berarti terdapat suatu penyelesaian basis fisibel (BFS).

Theorema 5 :

Suatu titik merupakan BFS bila dan hanya bila titik itu merupakan titik ekstrim himpunan penyelesaian fisibel.

Bukti :

Misal X merupakan suatu BFS dalam AX = B dan ditulis

$\sum_{j=1}^{m} x_j A_j = B$, dan matriks yang tersusun oleh A_j independen ini adalah D , jadi DX = B.

Sehingga :

$$X = D^{-1} B \;,\; X \in E^m$$

Dengan kontraposisinya dimisalkan X bukan titik ekstrim da ri himpunan penyelesaian fisibel F , artinya terdapat X_1 dan X_2 dalam F yang berlainan dengan X, sedemikian sehi - ngga :

$$X = p\,X_1 + q\,X_2$$

dimana : $p + q = 1$ dan $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

Misalkan :

$X_1 = [U_1 , V_1]$; $X_2 = [U_2 , V_2]$ dimana $U_1, U_2 \in E^m$

maka :

$X = [X , 0] = p[U_1 , V_1] + q[U_2 , V_2]$ jadi :

$0 = p V_1 + q V_2$

$p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $V_1 \geqslant 0$ dan $V_2 \geqslant 0$

Sehingga satu-satunya kemungkinan adalah :

$V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ berarti :

$X_1 = [U_1 , 0]$; $X_2 = [U_2 , 0]$

Karena X_1 dan X_2 jawaban fisibel maka $AX_1 = B$ dan $AX_2 = B$

jadi X_1 dan X_2 adalah BFS.

Maka :

$$\left.\begin{array}{l} AX_1 = D\,U_1 = B \\ AX_2 = D\,U_2 = B \\ \text{dan } DX = B \end{array}\right\}$$

Pernyataan vektor B dengan basis haruslah tunggal, jadi $X = U$ atau $X = X_1 = X_2$

Dengan demikian pengandaian adanya X_1 , X_2 berlainan de - ngan X tidak benar.

Maka titik ekstrimnya adalah $X = X_1 = X_2$.

Misal $X^* = [X_1 , X_2 , \ldots , X_n]$ sebarang titik ekstrim F dengan k-buah komponennya bukan nol (positif). Komponen tsb. diurutkan kembali agar yang positif dimuka

$$X^* = [x_1 , x_2 , \ldots , x_k , 0 , 0 , \ldots , 0]$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = B \text{ dengan } x_i > 0 \; ; \; i = 1 , 2 , \ldots , k$$

Andaikan vektor-vektor A_i ini dependen linier, maka terdapat λ_i tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = 0$$

Misalkan :

$$\eta = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} \right\} , \lambda_i \neq 0 \quad \text{dimana } i = 1 , 2 , \dots , k$$

Jika dipilih ε , $0 < \varepsilon < \eta$ maka :

$$x_i + \varepsilon \lambda_i > 0 \quad \text{dan} \quad x_i - \varepsilon \lambda_i > 0$$

Disusun vektor $P \in E^n$ dengan $P = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0..0]$

Susun :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X^* + \varepsilon P \\ X_2 = X^* - \varepsilon P \end{array}\right\} \text{maka } X_1 \geqslant 0 \ , \ X_2 > 0$$

Karena $\sum_{i=1}^{k} \lambda i \ A_i = AP = 0$, maka :

$$AX_1 = A \ X^* + \varepsilon \ P = AX^* + 0 = B \ ; \text{ juga } AX_2 = B$$

Jadi X_1 dan X_2 merupakan penyelesaian fisibel yang berbeda dengan X^* dan $X^* = 1/2 \ X_1 + 1/2 \ X_2$.

Ini bertentangan dengan ketentuan X^* merupakan titik ekstrim, jadi pengandaian bahwa A_i dependen linier salah, sehingga A_i independen linier dan $k \leqslant m$.

Terbukti bahwa X^* adalah BFS, dalam hal ini tak ada degeneracy, sehingga jelas ada korespondensi 1 - 1 antara BFS dengan titik-titik ekstrim.

Theorema 6 :

Fungsi sasaran (jika mempunyai) akan mencapai nilai optimalnya pada suatu titik ekstrim F. Jika fungsi sasaran mencapai optimalnya pada lebih dari satu titik ekstrim, maka nilai tersebut juga dicapai pada setiap titik kombinasi konveks titik-titik ekstrim tersebut.

Bukti : Untuk maksimum.

Misal $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ... , $\overline{X}_p$ adalah titik ekstrim F dan X_0 adalah titik optimal, maka $f\ (X_0) \geqslant f\ (X)$; $X \in F$.

Jika X_0 salah satu titik ekstrim, maka bukti selesai.

Jika X_0 bukan titik ekstrim , X_0 ditulis sebagai kombinasi konveks $\overline{X}_i$; i = 1 , 2 , ... , p , misalnya :

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} u_i \overline{X}_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{p} u_i = 1 \quad \text{dan} \quad u_i \geqslant 0$$

Karena f(X) fungsional linier maka :

$$f(X_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} u_i \overline{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} u_i\ f(\overline{X}_i) = M$$

M = nilai maksimum f(X)

Misal :

$f(\overline{X}_k) = \frac{\text{maks.}}{i} \quad f(\overline{X}_i)$; semua $f(\overline{X}_i)$ diruas kanan di - ganti dengan $f(\overline{X}_k)$, dan karena $u_i \geqslant 0$ didapat :

$$f(X) \leqslant \sum_{i=1}^{p} u_i\ f(\overline{X}_k)$$

Dianggap $f(X_0) \geqslant f(\overline{X}_k)$, maka : $F(X_0) = f(\overline{X}_k) = M$

Berarti adalah titik ekstrim $\overline{X}_k$ sedemikian f mencapai maksimum. Misal F(X) mencapai nilai maksimum dititik-titik $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_q$; jadi : $f(\overline{X}_1) = f(\overline{X}_2) = \ldots f(\overline{X}_q) = M$

Misal:

$$X = \sum_{i=1}^{q} u_i \overline{X}_i$$ merupakan kombinasi konveks dari titik-titik ekstrem terebut, jadi :

$$\sum_{i=1}^{q} u_i = 1 \quad ; \quad u_i \geqslant 0$$

Maka :

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{q} u_i \overline{X}_i\right) = f(X_i) \sum_{i=1}^{q} u_i = M$$

Terbukti.

3.3 Teori Simpleks

Menurut theorema (5) dan (6), nilai fungsi sasaran f optimal dapat dicapai dengan menyelidiki titik-titik eks - trim , yang tidak lain merupakan penyelesaian basis fisi - bel susunan persamaan syarat.
Hal ini sesuai dengan langkah simpleks yang dimulai dari penyelesaian basis, lalu menuju kepada penyelesaian basis lainnya sambil memajukan nilai f hingga nilai f optimal da pat dicapai.
Selanjutnya akan ditinjau teori yang menunjang langkah - langkah simpleks tersebut diatas.
Bentuk standard program linier disajikan sbb :

Menentukan nilai X yang memenuhi :

$$A\,X = B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$X \geqslant 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dan mengoptimalkan $f(X) = CX = Z$ .... (3)

dimana :

$$A = [a_{ij}]$$

$$C = [c_{ij}] \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ditentukan vektor D_i ; $i = 1, 2, \ldots, m$ yaitu m-vektor kolom A_j yang independen linier :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{matrix}} & \cdot & \cdot & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{matrix}} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdot & \cdot & & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & \cdot & \cdot & & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad D_1 \qquad\qquad\qquad D_i$$

Disusun matrik $D = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ dengan $D \neq 0$, matrik D_i ini dianggap sebagai basis dalam vektor space E^n.

Misalkan :

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, D_i = D\, Y_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Maka : $Y_j = D^{-1} A_j$ .... (5)

dimana :

D^{-1} = matrik inverse dari matrik D

$Y_j = \{ y_{1j} , y_{2j} , \ldots , y_{mj} \}$

Setiap matrik basis D menentukan satu penyelesaian basis bagi AX = B yaitu:

$\bar{X} = D^{-1} B$ dimana $\bar{X} = \{ \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \ldots , \bar{x}_m \}$ merupakan perubah-perubah basis.

Kemudian disusun vektor basis Ongkos $\bar{C}$ yang sesuai dengan $\bar{X}$ yaitu :

$\bar{C} = (\bar{c}_1 , \bar{c}_2 , \ldots , \bar{c}_m)$ ....(6)

Nilai fungsi sasaran :

$f(X) = \overline{CX} = Z$ ....(7)

Untuk setiap A_j didefinisikan z_j sebagai berikut :

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} . \bar{c}_j = \bar{C} Y_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

3.3.1 Cara Memajukan Penyelesaian Basis Fisibel (BFS)

Diawali dari penyelesaian basis fisibel yang sudah ada akan ditentukan suatu variabel yang akan dimasukkan sebagai basis.

Untuk itu terlebih dahulu ditentukan kolom dan baris dalam matrik A dimana salah satu unsurnya merupakan variabel yang masuk sebagai basis.

Penyelesaian fisibel basis awal yang diperoleh :

$\bar{X} = D^{-1} B$, dengan fungsi sasaran $f(X) = Z = \overline{CX}$

dimana :

D^{-1} = inverse dari matrik D

$\bar{C}$ = vektor ongkos yang sesuai dengan $\bar{X}$

Kolom yang diganti dalam hal ini tidak lain adalah salah satu vektor basis D_i , misal D_r diganti dengan A_k dimana

$$A_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ik} D_i$$

Menurut persamaan (4) maka :

$$D_r = \frac{A_k}{y_{rk}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Penyelesaian basis fisibel semula $\bar{X} = D^{-1} B$ atau $D\bar{X} = B$ ditulis menjadi :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) D_i + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} A_k = B$$

Agar persamaan diatas memenuhi persamaan (1) dan (2) maka haruslah :

$$\left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) \geqslant 0 \ ; \text{dengan } i \neq r \quad \ldots. (10)$$

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geqslant 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Pada persamaan (11) untuk $\bar{x}_r \neq 0$, maka $y_{rk} > 0$.

Jika $y_{rk} > 0$, ada dua kemungkinan bagi y_{ik} yaitu :

a). $y_{ik} \leqslant 0$, $i \neq r$ maka persamaan (10) dipenuhi

b). $y_{ik} > 0$, maka timbul syarat:

$$\frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geqslant 0$$

Agar dipenuhi untuk semua $i \neq r$, maka ditentukan :

$$\theta = \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \frac{\min}{i} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \; ; \; y_{ik} > 0 \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

θ disebut baris kunci yaitu baris yang mana akan dipakai untuk menentukan unsur kunci ; baris -r dinamakan baris kunci.

Misal vektor basis yang baru ; $\hat{D}_i = D_i$, $i \neq r$

Selanjutnya tanda $(\wedge)$ merupakan tanda bagi besaran yang baru.

Nilai variabel basis yang baru : $\hat{X} = D^{-1} B$, maka :

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_i &= \bar{x}_i - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \; ; \; i \neq r \\ \hat{x}_r &= \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Persamaan (13) diatas merupakan transformasi bagi perubah basis, dalam tabel simpleks merupakan nilai dibawah kolom suku tetap b_i.

Apabila terdapat lebih dari satu baris kunci, dapat dipilih salah satu. Bagi baris kunci yang tidak terpilih maka $\hat{x}_i = 0$, sehingga dari persamaan (13) $\hat{\bar{x}}_i = \bar{x}_i$, $i \neq r$ artinya BFS yang baru nilainya merosot (degenerate).

Setelah diperoleh BFS yang baru, maka nilai fungsi sasa - ran Z menjadi :

$$Z_{lama} = \bar{C}\,\bar{X} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\,\bar{x}_i$$

$$Z_{baru} = \hat{Z} = \hat{C}\,\hat{X} = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i\,\hat{x}_i$$

Padahal :

$$\hat{c}_i = \bar{c}_i \quad \text{dan} \quad \hat{c}_r = c_k \quad , \quad i \neq r \ .$$

Yang berubah hanya nilai pada perubah baru dalam basis se hingga :

$$\hat{Z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} \bar{c}_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \cdot c_k$$

Kedalam persamaan diatas disisipkan suku ke-r yaitu :

$$\bar{c}_r \left(\bar{x}_r - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{rk}}{y_{rk}} \right) = 0 \text{ , maka :}$$

$$\hat{Z} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}_r \cdot \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}\, c_k$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\,\bar{x}_i}_{\bar{z}} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, y_{ik}}_{\bar{z}_k} + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}\, c_k$$

Jadi :

$$\hat{Z} = \bar{z} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}\, z_k + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}\, c_k$$

$$\hat{Z} = z + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} (c_k - z_k)$$

$$= z + Q (c_k - z_k)$$

Atau $\hat{Z} = z - Q (z_k - c_k)$ .... (14)

Dari persamaan (14) diatas dapat disimpul kan sbb:

a). Untuk maksimum

$z_j - c_j < 0$ dan terdapat i , sehingga $y_{ij} > 0$

Maka dapat disusun BFS baru dengan mengganti salah satu vektor D dengan A_j sedemikian sehingga $\hat{Z} \geqslant Z$

b). Untuk Minimum

$Z_j - c_j > 0$ terdapat suatu i , sehingga $y_{ij} > 0$

maka dapat disusun BFS baru dengan mengganti salah satu vektor D dengan A_j sedemikian sehingga $\hat{Z} \leqslant Z$.

Sekarang misal A_k dipilih sebagai vektor basis baru, menurut persamaan (14) nilai $\hat{Z}$ akan bertambah sebesar :

$- Q (z_k - c_k)$.

Agar pemilihan A_k memberikan pertambahan paling besar bagi z , maka disusun syarat tambahan sebagai berikut :

a). Untuk Maksimum

Dipilih k sedemikian hingga :

$$z_k - c_k = \underset{j}{\min} \left\{ z_j - c_j \; ; \; z_j - c_j < 0 \right\} \quad ..... (15)$$

b). Untuk Minimum

dipilih k sedemikian hingga :

$$z_k - c_k = \underset{j}{\text{maks}} \left\{ z_j - c_j \ ; \ z_j - c_j > 0 \right\} \text{.... (15')}$$

dimana :

k = kolom yang dipilih

y_{rk} = unsur yang masuk sebagai basis baru

Selanjutnya persamaan (15) dan (15') dinamakan kunci I, di mana kolom ke-k disebut kolom kunci dan y_{rk} sebagai unsur kunci.

3. 3.2 Penyelesaian Tak Terbatas (Solusi Unbounded)

Apabila A_k terpilih sebagai vektor yang masuk kedalam basis dan paling sedikit terdapat satu $y_{ik} > 0$, maka proses simpleks dapat berjalan dan nilai Z akan bertambah. Selanjutnya ditinjau keadaan dimana $y_{ik} \leq 0$, untuk semua indeks i.

Jika diketahui BFS berbentuk :

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \, D_i = B \quad \text{dan} \quad Z = \bar{C}\,\bar{X}$$

dimana :

D_i = m buah vektor kolom A_j yang bebas linier

$\bar{C}$ = vektor ongkos yang sesuai dengan $\bar{X}$

Untuk sembarang skalar p , maka dari :

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \, D_i = B \quad \text{didapat persamaan :}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \, D_i - p\,A_k + p\,A_k = B$$

Menurut persamaan (4) :

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - p\, y_{ik})\, D_i + p\, A_k = B$$

Karena $y_{ik} \leqslant 0$, jika $p > 0$, maka $(\bar{x}_i - p\, y_{ik}) \geqslant 0$ maka persamaan (13) akan fisibel dengan (m-1) perubah tidak sama dengan nol.

Sehingga untuk $y_{ik} \leqslant 0$ dan $p > 0$

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, \bar{x}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, (\bar{x}_i - p\, y_{ik}) + p\, c_j \quad \text{atau}$$

$$Z = z + p\, (c_j - z_j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (16)$$

Kesimpulan :

a). Untuk Maksimum

Jika ada A_j diluar matrik D dengan $z_j - c_j < 0$ dan $y_{ij} \leqslant 0$ untuk $i = 1 , 2 , \ldots , m$; maka terdapat penyelesaian fisibel dengan (m+1) perubah mungkin tidak nol dan nilai fungsi f menjadi besar tak terhingga karena p dapat dipilih sembarang dan $p > 0$.

b). Untuk Minimum

Jika ada A_j diluar matrik D dengan $z_j - c_j > 0$ dan $y_{ij} \leqslant 0$; $i = 1 , 2 , \ldots\ldots , m$; maka nilai f menjadi negatif tak hingga, penyelesaian ini disebut tak ter batas.

3.3.3 Syarat Penyelesaian Optimal

Theorema 7 :

a). Jika ada penyelesaian fisibel basis $\overline{X}_o = D^{-1} B$ yang menghasilkan : $f(\overline{X}_o) = z_o = \overline{C}\,\overline{X}_o$ dimana nilai dari $z_j - c_j \geqslant 0$ untuk setiap-j diluar basis , maka :

$f(\overline{X}_o) = f(X)$ maksimum.

b). Jika ada penyelesaian fisibel basis $\overline{X}_o = D^{-1} B$ yang menghasilkan $f(\overline{X}_o) = z_o = C\,\overline{X}_o$ dimana $z_j - c_j \leqslant 0$ untuk setiap j diluar basis , maka :

$f(\overline{X}_o) = f(X)$ minimum.

Bukti :

a). Untuk Maksimum

Diambil sembarang penyelesaian fisibel X , jadi $AX = B$ dengan $f(X) = CX$

atau :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B, \text{ dimana } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Karena $A_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} D_i$; dari $\sum_{i=1}^{n} x_j A_j = B$ menjadi

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} y_{ij} D_i = b$$

atau :

$$\sum_{i=1}^{m} D_i \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j = B$$

Padahal diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{m} x_i \, D_i = B$ sehingga :

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \, x_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Untuk kolom dalam basis , misal A_j menjadi $D_i \in D$, yaitu

$$A_j = D_i \quad \text{dan} \quad c_j = \bar{c}_i$$

Dari persamaan (5) :

$Y_j = D^{-1} A_j$ maka : $Y_j = D^{-1} D_i = E_i$ yaitu vektor identitas, sehingga :

$$Z_j = \bar{C} \, Y_j = \bar{C} \, E_i = c_i = c_j$$

atau $z_j - c_j = 0$

Berarti syarat $z_j - c_j \geqslant 0$ berlaku untuk semua j , sehingga dari $(z_j - c_j) \, x_j \geqslant 0$ didapat :

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j) \, x_j \geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \, x_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j = f\,(X) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Karena :

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, y_{ij} \quad \text{maka :}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \, x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, y_{ij} \, x_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j$$

Padahal menurut persamaan (17)

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \, x_j$$

sehingga :

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\, x_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, \bar{x}_i = \bar{C}\, \bar{X}_o = f(X_o)$$

Persamaan (18) dapat ditulis menjadi :

$$f(\bar{X}_0) = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i\, x_i = f(X)$$

$$f(\bar{X}_o) \geqslant f(X) \text{ , untuk sembarang } X \text{ fisibel.}$$

Jadi terbukti $f(X_o)$ merupakan $f(X)$ maksimal.

Bukti untuk minimal analog dengan bukti diatas.

3.3.4 Menyusun Penyelesaian Basis Fisibel Awal

Didalam uraian dimuka sebenarnya dibatasi bahwa soal program linier sudah berbentuk kanonik dan pada tabel awal sudah memuat matrik identitas.

Tetapi sebenarnya keadaannya tidak selalu demikian.

Disini akan dibahas cara untuk mencapai bentuk kanonik yg. didalam tabel awal sudah memuat matrik identitas.

Sesuai dengan definisi (19) bentuk kanonik program linier adalah :

Mencari nilai X yang memenuhi :

$A\,X = B$

$X \geqslant 0$

dan mengoptimalkan $f = C\,X$

Menurut definisi (10) X merupakan penyelesaian fisibel jika X merupakan penyelesaian basis yang memenuhi $A\,X = B$ dan $X \geqslant 0$

Penjelasan :

1). Misal soal asli berbentuk $A_o\ X_o \leqslant 0$ dengan A_o berordo (mxn) dan syarat relasinya berbentuk $\leqslant$

Untuk mengubah kebentuk kanonik, maka kedalam ruas kiri setiap persamaan syarat ditambahkan satu variabel kelonggaran (slack) , misal S.

Bentuk soal menjadi :

$A\ X = B$ dengan $A = (A_o\ ,\ I)$ dan

$$X = (X_o\ ,\ S) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \\ S_1 \\ . \\ S_m \end{pmatrix}$$

Menurut definisi (10) penyelesaian basis soal diatas adalah :

$\overline{X} = (0\ ,\ S)$ yang tidak lain merupakan BFS , sehingga

$A\ \overline{X} = (A_o\ ,\ I)\ \ 0\ ,\ S = I\ .\ S = S$

$A\ \overline{X} = B$, sehingga $S = B$ dengan $B \geqslant 0$

Dimuka telah dijelas kan bahwa setiap matrik basis D menentukan satu penyelesaian basis bagi $A_o\ X_o = B$ yaitu :

$\overline{X} = D^{-1}\ B$ dimana :

$D = (D_1\ ,\ D_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ D_m)$ dengan D_i vektor kolom yang bebas linier.

Karena $A = (A_o , I)$ dan $\bar{X} = [0 , S]$ maka $D^{-1} = I$

Perhatikan persamaan (5) :

$$Y_j = D^{-1} A_j \text{ , maka } Y_j = I A_j = A_j$$

sehingga y_{ij} ini tidak aain adalah a_{ij}.

Penjelasan :

2). Jika soal berbentuk $A_o X_o \geqslant B$, dengan A ber - ordo (mxn) dan relasinya berbentuk $\geqslant$.

Setelah dimasukkan variabel kelonggaran secukupnya, ternyata didalam matrik A belum memuat matrik identitas , meski sudah didapat bentuk $A_o^* X_o^* = B$.

Untuk ini agar A memuat I maka kedalam persamaan syarat dimasukkan perubah semu V agar proses simpleks dapat berjalan, sehingga persamaan menjadi :

$$A X = B \quad \text{dan} \quad X = [X_o^* , V] \quad \text{dimana :}$$

$$X_o^* = [X_o , S] \quad \text{dan} \quad A_o^* = (A_o , S)$$

Selanjutnya perubah semu V ini harus segera keluar dari basis dan dalam penyelesaian optimal harus bernilai positif sehingga koefisien v_j dalam f diusahakan sedemikian agar V cep at keluar dari basis.

Untuk maksimum koefisien ongkos untuk $v_j = -M$, sedang bagi soal minimum koefisien ongkos $v_j = M$, dimana : M merupakan bilangan positif besar.

Jadi apabila $f(X) = f(X_o) \pm MV$, penyelesaian ini merupakan penyelesaian optimal soal asli jika dalam penyelesaian optimalnya $V = 0$.

3.4 Dualitas

3.4.1 Hubungan Dual.

Pembicaraan disini tidak perlu lagi terikat pada syarat bahwa $b_i \geqslant 0$, sebab ternyata syarat ini tidak mutlak dipenuhi, artinya kendala yang memuat $b_i \leqslant 0$ dapat dibawa kebentuk $b_i > 0$ dengan cara mengalikan dengan (-1) kemudian dikerjakan dengan simpleks.

Disini hanya dibicarakan dualitas antara soal standard maksimum dan minimum, soal yang bukan standard diubah kebentuk standard .

Pandang soal maksimum P (=primal)

menentukan $X \geqslant 0$

yang memenuhi $A\,X \leqslant B$

dan memaksimalkan $f = C\,X$

Soal minimum D (= dual)

mencari $W \geqslant 0$

yang memenuhi $A'\,W \geqslant C'$

dan meminimalkan $g = B'\,W$

Dengan notasi Σ kedua masalah diatas dapat ditulis sbb:

Primal :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{mencari } x_j \geqslant 0 \\ \text{dan memenuhi } \sum_j a_{ij}\, x_j \leqslant b_i \\ \text{memaksimalkan } f = \sum_j c_j\, x_j \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Dual :

$$\left.\begin{array}{l} \text{mencari} \quad w_i \geqslant 0 \\ \text{yang memenuhi} \quad \sum_i a_{ij}\, w_i \geqslant c_j \\ \text{dan meminimalkan} \quad g = \sum_i b_i\, w_i \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2\ )$$

dimana : $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

Persoalan (2) dinamakan dual terhadap persoalan (1) sedang persoalan (1) dinamakan primalnya, atau sebliknya.

Perhatikan bahwa c_j pada soal (1) menjadi kolom suku tetap bagi persoalan (2).

Kolom suku tetap b_i pada (1) menjadi koefisien ongkos bagi soal (2).

Matriks koefisien pada soal (1) merupakan transpose ma - trik koefisien pada soal (1).

Untuk mempermudah penulisan hubungan dual tinjau tabel ini:

x_j \ w_i	x_1	x_2	.	.	x_n	Min. g
w_1	a_{11}	a_{12}	.	.	a_{1n}	$\leqslant b_1$
w_2	a_{21}	a_{22}	.	.	a_{2n}	$\leqslant b_2$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
w_m	a_{m1}	a_{m2}	.	.	a_{mn}	$\leqslant b_m$
Max.f	$\geqslant$ c_1	$\geqslant$ c_2	.	.	$\geqslant$ c_n	

Terlihat bahwa x_k pada syarat (1) berkaitan dengan syarat ke-k pada soal (2).

Sebaliknya W_p pada (2) berkaitan dengan syarat ke-p pada persoalan (1), dengan demikian banyak perubah pada (1) sama dengan banyak syarat utama pada (2) dan sebaliknya.

Untuk menyingkat penulisan maka dipakai istilah :

PF = Penyelesaian fisibel

PO = Penyelesaian Optimal

POB = Penyelesaian Optimal Basis = BFS Optimal.

Theorema 8 :

Jika X merupakan PF soal (1) dan W merupakan PF bagi soal (2) maka : $CX \leqslant B'W$ atau $f(X) \leqslant g(W)$.

Bukti :

PF soal (1) adalah $X = [x_1 , x_2 , \ldots , x_n]$

jadi : $\sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i$ untuk semua i.

Kedua ruas dikalikan dengan W_i , sehingga didapat :

$$W_i \sum_j a_{ij} x_j \leqslant w_i b_i$$

Dengan notasi matrik ditulis menjadi :

$$W' AX \leqslant B'W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

PF bagi soal (2) adalah : $W = [w_1 , w_2 , \ldots , w_m]$, jadi

$$\sum_i a_{ij} w_i \geqslant c_j$$

Kedua ruas dikalikan dengan x_j , didapat :

$$\sum_i a_{ij} w_i x_j \geqslant x_j c_j \text{ , karena } x_j \geqslant 0 \text{ maka :}$$

dengan notasi matrik ditulis menjadi :

$$W' AX \geqslant CX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) didapat :

$$CX \leqslant W'AX \leqslant B'W$$

Jadi :

$$C X \leqslant B' W .$$ Terbukti.

Theorema 9 :

Jika X_o adalah PF soal (1) dan W_o PO soal (2) di mana $CX_o = B'W_o$, maka : PO soal (1) adalah X_o dan PO soal (2) adalah W_o serta $f_{maks} = g_{min}$.

Bukti :

Diketahui $CX_o = B'W_o$

Dari theorema 8, diketahui bahwa $CX \leqslant B'W$, maka berlaku:

$C X \leqslant B'W_o = CX_o$ untuk sebarang PF.

Jadi :

$CX \leqslant CX_o$ berarti X_o merupakan PO soal asli (1)

Dengan jalan seperti diatas untuk sebarang PF bagi (2) , misal W maka berlaku :

$B'W \geqslant CX_o = B'W_o$, jadi $B'W \geqslant B'W_o$

Maka W_o PO bagi soal (2) , dan $f_{maks} = CX_o = B'W = g_{min}$

Terbukti.

Theorema 10 :

Dari sepasang soal dual, jika salah satu mempunyai PO , maka dualnya juga mempunyai PO dan kedua nilai optimalnya sama.

Bukti :

Misal soal (1) mempunyai PO, kemudian dibuktikan soal (2) juga mempunyai PO.

Soal (1) diselesaikan dengan simpleks, maka diubah dulu menjadi :

Mencari $[X , S] \geq 0$

memenuhi $AX + IS = B$ .... (3)

memaksimalkan $f = CX$

dimana S adalah vektor perubah kelonggaran.

Misalkan $\overline{X}$ adalah POB bagi soal (3) diatas dengan matrik basis D dan vektor ongkos $\overline{C}$, maka :

$$\overline{X} = D^{-1} B \quad \text{dan} \quad f_{maks} = \overline{C}\,\overline{X}$$

Sehingga berlaku $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j atau $z_j \geq c_j$

Untuk vektor kolom A , yaitu A_j berlaku :

$$z_j = \overline{C}\,Y_j = \overline{C}\,D^{-1}\,A_j \geq c_j$$

Jika j^* dijalankan didapat :

$\overline{C}\,D^{-1}\,A \geq C$ ....(4)

Soal dualnya ditulis dengan bentuk transposenya, yaitu :

Mencari $W' \geq 0$

memenuhi $W'A \geq C$ .... (5)

minimalkan $g = W'\,B$

Perhatikan nilai W' yaitu $W' = \overline{C}\,D^{-1}$

Perhatikan persamaan (4) dimuka : $\bar{C}\ D^{-1}\ A \geqslant C$

didapat :

$W'\ A = \bar{C}\ D^{-1}\ A \geqslant C$, jadi W' memenuhi syarat utama persamaan (5) diatas .

Kita tinjau nilai $z_j - c_j$ untuk variabel slack pada persamaan (3) yaitu :

$$z_j - c_j \geqslant 0$$

$$\bar{C}\ D^{-1}\ Aj - c_j = \bar{C}\ D^{-1}\ E_i - 0 \geqslant 0$$

Hal ini disebabkan perubah slack pada persamaan (3) menjadi perubah basis, sehingga kolom A_j merupakan vektor satuan dan ditulis E_i .

Dengan menjalankan i diperoleh :

$$\bar{C}\ D^{-1}\ I \geqslant 0 \quad \text{atau} \quad \bar{C}\ D^{-1} \geqslant 0$$

Berarti $W' = \bar{C}\ D^{-1}$ juga memenuhi sarat tak negatif.

Sekarang dibuktikan bahwa $\bar{C}\ D^{-1}$ ternyata merupakan PO bagi soal (5) atau soal (2).

Nilai g yang sesuai dengannya adalah :

$$g = W'B = \bar{C}\ D^{-1}\ B = \bar{C}\ \bar{X} = f_{maksimum}.$$

Jadi $\bar{C}\ D^{-1}$ adalah PF bagi soal (2) dan $\bar{X}$ merupakan PF bagi soal (1) dengan nilai fungsi sasaran :

$$\bar{C}\ \bar{X} = \bar{C}\ D^{-1}\ B$$

Menurut theorema 9 : $W' = \bar{C}\ D^{-1}$ ini merupakan penyelesaian bagi soal (2).

Terbukti.

Catatan :

Kejadian dari (2) ke (1) tidak perlu dibuktikan sebab setiap bentuk minimum (2) dapat diubah kebentuk (1) dengan cara mengalikan setiap syarat dengan -1 , demikian juga vektor ongkosnya.

Theorema 10 ini dinamakan theorema Dualitas .

Dari theorema 8 , 9 dan 10 dapat disimpulkan :

1) . Jika sepasang soal dual keduanya fisibel maka mempunyai PO.

2) . Jika s uatu soal mempunyai penyelesaian tak terbatas , maka dualnya akan tidak fisbel.

Theorema 11 :

a). Jika dalam penyelesaian soal (1) syarat ke -k berupa pertaksamaan, maka perubah ke-k dalam PO soal (2) merupakan persamaan atau bernilai nol , $w_k = 0$

b). Jika dalam PO soal (1) perubah ke -p bernilai positif (merupakan pertidaksamaan) $x_p > 0$, maka syarat ke-p dalam PO soal (2) merupakan persamaan.

Bukti a :

$x_{n+k} > 0$ berarti x_{n+k} berada dalam basis ,sehingga vektor kolom yang sesuai berbetuk $\pm$ E_k (E_k vektor satuan) ; dan $z_{n+k} - c_{n+k} = 0$

Tetapi diketahui pula bahwa $c_{n+k} = 0$ sehingga :

$$z_{n+k} - c_{n+k} = \bar{C}\, D^{-1} (\pm E_k)$$

$$z_{n+k} - c_{n+k} = (\bar{C} D^{-1})_k = (W')_k$$

$$= w_k = 0$$

Terbukti.

$(W')_k$ adalah kolom ke-k dalam W'.

Bukti b :

$x_p > 0$, berarti x_p berada dalam basis sehingga :

$z_p - c_p = 0$ atau :

$$z_p - c_p = \bar{C} D^{-1} A_p - c_p = W' A_p - c_p = 0$$

Artinya :

$$W' A_p = c_p \quad \text{atau} \quad \sum_i a_{ip} w_i = c_p$$

Syarat ke-p berbentuk persamaan.

terbukti.