BAB II

MATRIK DAN SISTIM PERSAMAAN LINIER

2.1 Matrik

Definisi 1 :

Mis alkan K merupakan sembarang medan (Field). Sebuah barisan bilangan yang tersusun dalam bentuk segi empat dengan m-baris dan n-kolom seperti dibawah ini :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dinamakan matrik berordo (m x n), dimana a_{ij} skalar dalam medan K.

Bentuk matrik diatas dapat ditulis dengan notasi :

$$\underset{(m \times n)}{A} = \left[a_{ij} \right]$$

dimana :

$i = 1 , 2 ,\ldots m$ dan $j = 1 , 2 ,\ldots n$

Definisi 2 :

Matriks segitiga adalah matrik bujur sangkar dengan satu fihak diagonal utamanya berisi bilangan nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definisi 3 :

Matrik Identitas adalah matrik yang hanya memuat bilangan nol dan satu, ditulis dengan notasi :

$$I_n = \left[a_{ij} \right] \text{ ; dimana } \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ , jika } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ , jika } i \neq j \end{cases}$$

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Determinan

Misal diberikan matrik bujur sangkar berordo $(n \times n)$ sebagai berikut :

$$\underset{(n \times n)}{A} = \left[a_{ij} \right]$$

Pandang hasil kali n-elemen matrik A dibawah ini :

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdot \cdot \cdot a_{nj_n}$$

yang merupakan hasil kali dari elemen-elemen dalam matrik A dimana setiap baris dan setiap kolom hanya diwakili oleh satu elemen saja.

Karena faktor-faktor perkalian diatas berasal dari baris yang berurutan maka indeks pertama membentuk barisan bilangan 1 , 2 , 3 , . . . n ; sedang indeks kedua membentuk suatu permutasi $\sigma = j_1\ j_2\ j_3 \ldots j_n$

Permutasi σ dapat bernilai genap atau bernilai ganjil tergantung dari adanya pasangan bilangan (i , k) dari σ dengan syarat :

$i > k$ dan i mendahului k

dimana :

$i = 1 , 2 , \ldots n$

$k = 1 , 2 , \ldots n$

Definisi 4 :

Permutasi σ genap jika memuat pasangan bilangan (i,k) yang memenuhi syarat diatas dengan jumlah genap, dan σ merupakan permutasi ganjil jika memuat pasangan bilangan (i,k) berjumlah ganjil.

Definisi 5 :

Paritas atau tanda dari suatu permutasi σ ditulis dengan notasi 'sgn σ' ditentukan sbb:

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} 1 , & \text{jika } \sigma \text{ genap} \\ -1 , & \text{jika } \sigma \text{ ganjil} \end{cases}$$

Definisi 6 :

Diberikan matrik bujur sangkar $\underset{(mxn)}{A} = [\, a_{ij} \,]$.

Determinan matrik A ditulis det (A) atau $|A|$ adalah penjumlahan yang memuat semua permutasi $\sigma = j_1 \, j_2 \cdots j_n$ sebagai berikut :

$$|A| = \sum_{\sigma} (\, \mathrm{sgn}\, \sigma \,) \; a_{1j_1} \, a_{2j_2} \; \cdots\cdots \; a_{nj_n}$$

dimana :

sgn σ adalah tanda dari permutasi σ

Contoh :

Diberikan matrik bujur sangkar berordo (2 x 2).

Untuk n = 2 permutasi σ adalah 1 2 dan 2 1.

sgn σ = 1 , untuk σ = 1 2

sgn σ = -1, untuk σ = 2 1 , sehingga :

$$\det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (\,1\,).\, a_{11}\, a_{22} + (-1).a_{12}a_{21}$$

Jika det (A) = 0 maka A disebut matrik singulir

Jika det (A) $\neq$ 0 maka A disebut matrik non singulir.

Definisi 7 :

Rank matrik A ditulis r (A) adalah :

a. Maksimum orde submatrik bujur sangkar dari A yang non - singulir, atau :

b. Maksimum banyaknya anggota himpunan vektor baris dalam A yang bebas linier, atau :

c. Maksimum banyaknya anggota himpunan vektor kolom dari A yang bebas linier.

2.2 Sistim Persamaan Linier

Diberikan m-persamaan linier dengan n-buah perubah x_j sebagai berikut :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + a_{mn}\,x_n = b_m
\end{array}
$$

Persamaan linier diatas dapat ditulis dengan 3 notasi yaitu :

1. Notasi matrik : $AX = B$, dimana $\underset{(mxn)}{A} = \left[a_{ij} \right]$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}
$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

2. Notasi :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; x_j = b_i \quad ; \quad \text{dimana : } i = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\, m$$

3. Notasi Vektor :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\; A_j = B \; ; \; \text{dimana } A_j = \text{vektor kolom ke-j.}$$

Dari persamaan linier diatas dapat disusun matrik Ab atau $(A|B)$ = augmented **A**, yaitu matrik A yang dilengkapi dengan kolom suku tetap.

Definisi 8 :

Penyelesaian sistim linier $AX = B$ dengan $A = [a_{ij}]$ dimana : $i = 1, 2, \ldots m$ dan $j = 1, 2, \ldots n$ dapat diperinci sebagai berikut :

1. $r(A) \neq r(A|B)$, maka persamaan tidak mempunyai penyelesaian.
2. $r(A) = r(A|B) = p$, persamaan mempunyai penyelesaian yaitu :
   - a. Jika $p = n$, maka penyelesaiannya tunggal
   - b. Jika $p < n$, maka penyelesaiannya tak berhingga.

Definisi 9 :

Penyelesaian dari m-persamaan linier yang berbentuk $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j = b_i$ dengan $r(A) = m < n$ adalah tak berhingga banyak dengan derajat kebebasan $(n - m)$, maka dapat diambil $(n - m)$ perubah yang disebut perubah bebas.

Definisi 10 :

Apabila $(n - m)$ perubah bebas diatas diisi dengan nol, maka penyelesaian yang lainnya dinamakan penyelsaian basis. Perubah yang bukan perubah bebas dinamakan perubah basis.