BAB III

METODE PENYELESAIAN PERSAMAAN PARABOLA DALAM RUANG DIMENSI SATU

3.1. METODE EXPLISIT

Persamaan parabola dibatasi dengan batas-batas awal dalam ruang.

$$U_t = U_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \leq T$$

$$U(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, t) = g(t) \quad 0 < t \leq T \qquad \ldots\ldots \quad (3.1.1)$$

$$U(1, t) = h(t) \quad 0 < t \leq T$$

diambil $y = t$

Untuk penyelesaian differensial berhingga ini dibuat jaringan titik jala yang dinotasikan dengan $x_i = ih$, $t_j = jk$, dengan $i = 0,1,2,3,\ldots M$, $j = 0,1,2,3,\ldots N$ dan $h = \Delta x = 1/M$, $k = \Delta t = T/N$. Garis awal dinotasikan dengan $j = 0$ dan pendekatan diskrit pada $x_i = ih$, $t_j = jk$ dinyatakan dengan U_{ij}, dianggap ada dan mempunyai empat derivative kontinue ke x, dan dua derivative kontinue ke t yang ditulis $U \in C^{4,2}$.

Jika solusi pendekatan U_{ij} dianggap diketahui pada semua titik jala untuk waktu t_j , dicari suatu metode yang dikhususkan untuk menunjukkan solusi pada waktu t_{j+1} yaitu :

$$\begin{aligned} i = 0 \qquad & U_{0,j+1} = g\,(\,t_{j+1}\,) \\ & \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \quad (3.1.2) \\ i = M \qquad & U_{M,j+1} = h\,(\,t_{j+1}\,) \end{aligned}$$

Pada titik-titik $0 < i < M$ Persamaan Differensial Parsiel diganti dengan beberapa persamaan differensi seperti dibawah ini

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{1}{h}\left[U_{i+1,j} - U_{i,j}\right] + 0\ (h)$$

$$\ldots\ldots \quad (3.1.3)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{ij} = \frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j}\right] + 0\ (h^2)$$

Nilai persamaan differensi dari $U_t = U_{xx}$ adalah

$$\frac{1}{k}\left[U_{i,j+1} - U_{i,j}\right] = \frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j}\right]$$

$i = 1,2,3,\ldots M-1$

Penyelesaian untuk $U_{i,j+1}$ diperoleh persamaan explisit untuk pembatas waktu awal.

Jika

$$r = \frac{k}{h^2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

maka

$$U_{i,j+1} = r\ U_{i-1,j} + (1 - 2r)\ U_{i,j} + r\ U_{i+1,j}$$

$$i = 1,2,3,\dots,M-1 \qquad \dots\dots (3.1.4)$$

untuk $r = 1/2$

Relasi Explisit ini seringkali disebut persamaan differensi forward (maju). Solusi pendekatannya dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

Pada $t = 0$ solusi diberikan oleh syarat awal $U_t = U_{xx}$.

Pada penambahan waktu $t = \Delta t = k$ diselesaikan dengan menggunakan persamaan (3.1.2) dan (3.1.4).

Dengan mengulang langkah-langkah diatas untuk menaikkan waktu $t = 2k$ dan seterusnya.

THEOREMA.

Misalkan $u \in C^{4.2}$ adalah solusi dari persamaan (3.1.1) dan misalkan U solusi dari persamaan (3.1.2) dan (3.1.4). Jika $0 < r \leqslant 1/2$, maka :

$$\max \left| u_{i,j} - U_{i,j} \right| \leqslant AT \left[(\Delta t) + (\Delta x)^2 \right]$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad , \qquad 0 \leqslant t_j \leqslant T$$

(nilai A tergantung dari U_{tt} dan U_{xxxx}).

BUKTI

$U_t = U_{xx}$

$\frac{1}{k} \left[u_{i,j+1} - u_{i,j} \right] + 0\ (k) = \frac{1}{h^2} \left[u_{i+1,j} - 2\ u_{i,j} + \right.$

$\left. u_{i-1,j} \right] + 0\ (h^2)$

$u_{i,j+1} = r\ u_{i-1,j} + (1 - 2r)\ u_{i,j} + r\ u_{i-1,j} +$

$0\ (\ k^2 + kh^2\ )$ ..... (3.1.5)

$i = 1,2,3,\ldots,M-1$

Jika U dibatasi pada sejumlah titik-titik berhingga. Persamaan differensi untuk $Z_{i,j} = u_{i,j} - U_{i,j}$ diperoleh dengan mengurangi persamaan (3.1.5) dengan persamaan (3.1.4). Jadi

$Z_{i,j+1} = r\ Z_{i-1,j} + (1 - 2r)\ Z_{i,j} + r\ Z_{i+1,j} +$

$0\ (\ k^2 + kh^2\ )$

$i = 1,2,3,\ldots,\ M-1$

Karena U sesuai dengan u dan pada batas sebagai berikut

$Z_{i,0} = 0$ $\qquad i = 0,1,2,3,\ldots,\ M$

$$Z_{0,j} = Z_{M,j} = 0 \qquad j = 0,1,2,3,\ldots, N$$

Jika $0 < r \leqslant 1/2$ maka

$$|Z_{i,j+1}| = r\,|Z_{i-1,j}| + (1-2r)\,|Z_{i,j}| + r\,|Z_{i+1,j}| + A\left[k^2 + kh^2\right]$$

$$\leqslant \|Z_j\| + A\left[k^2 + kh^2\right]$$

$i = 1,2,3,\ldots, M-1$

dengan $\|Z_j\| = \max\limits_{i=0,1,\ldots,M} |Z_{i,j}|$

Akibatnya

$$\|Z_{j+1}\| \leqslant \|Z_j\| + A\left[k^2 + kh^2\right]$$

Jika $\|Z_0\| = 0$ maka

$$\|Z_j\| \leqslant A_j\left[k^2 + kh^2\right]$$

$$\leqslant AT\left[k + h^2\right] = AT\left[\Delta t + (\Delta x)^2\right]$$

$jk = j\Delta t \leqslant T$

Terbukti.

Sekarang dapat dilihat bahwa kesalahan $Z_{i,j}$ menuju nol jika Δx dan Δt menuju nol. Sehingga dapat disimpulkan syarat stabil adalah :

$$0 < r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leqslant 1/2$$

Solusi persamaan differensi ini akan mendekati solusi persamaan differensial dengan sangat cepat. Banyak digunakan untuk penyelesaian persamaan diffusi dengan ketepatan yang tinggi.

CONTOH SOAL

Diketahui :

$U_t = U_{xx}$ dengan syarat :

$U(x, 0) = \sin \pi x$

$U(0, t) = U(1, t) = 0$

$h = 0,2$

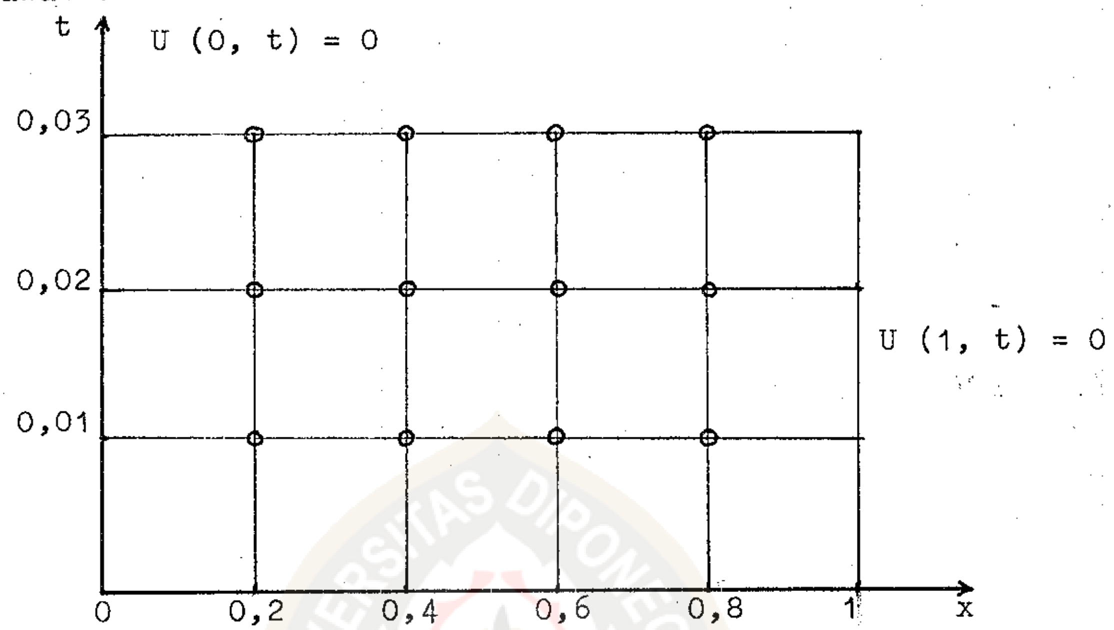
$r = 1/4$

$k = r\,h^2 = 0,25 \;.\; 0,04 = 0,01$

Ditanyakan

Nilai U pada T = 4

Jawab :



$$\frac{1}{k} \left(U_{i,j+1} - U_{i,j} \right) = \frac{1}{h^2} \left(U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j} \right)$$

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r \left(U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j} \right)$$

$$U_{i,j+1} = 0{,}25 \left(U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j} \right) + U_{i,j}$$

$$= 0{,}25 \left(U_{i+1,j} + 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j} \right)$$

$j = 0$, $i = 1$

$$U_{1,1} = 0{,}25 \left(U_{2,0} + 2\,U_{1,0} + U_{0,0} \right)$$

$$= 0{,}25 \left(\sin 0{,}4\,\pi + 2 \sin 0{,}2\,\pi + 0 \right)$$

$$= 0{,}531656755$$

$i = 2$

$$U_{2,1} = 0,25 \; (\; U_{3,0} + 2 \; U_{2,0} + U_{1,0} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; \sin 0,6 \, \pi + 2 \sin 0,4 \, \pi + \sin 0,2 \, \pi)$$

$$= 0,8602387$$

$i = 3$

$$U_{3,1} = 0,25 \; (\; U_{4,0} + 2 \; U_{3,0} + U_{2,0} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; \sin 0,8 \, \pi + 2 \sin 0,6 \, \pi + \sin 0,4 \, \pi)$$

$$= 0,8602387$$

$i = 4$

$$U_{4,1} = 0,25 \; (\; U_{5,0} + 2 \; U_{4,0} + U_{3,0} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; 0 + 2 \sin 0,8 \, \pi + \sin 0,6 \, \pi \;)$$

$$= 0,531656755$$

$j = 1 \; , \; i = 1$

$$U_{1,2} = 0,25 \; (\; U_{2,1} + 2 \; U_{1,1} + U_{0,1} \;)$$

$= 0,25 \; (\; 0,8602387 + 2 \; . \; 0,531656755 + 0 \;)$

$= 0, \; 480888052$

$i = 2$

$U_{2,2} = 0,25 \; (\; U_{3,1} + 2 \; U_{2,1} + U_{1,1} \;)$

$= 0,25 \; (\; 0,8602387 + 2 \; . \; 0,8602387 + 0,53165$

$6755 \;) = 0,778093213$

$i = 3$

$U_{3,2} = 0,25 \; (\; U_{4,1} + 2 \; U_{3,1} + U_{2,1} \;)$

$= 0,25 \; (\; 0,531656755 + 2 \; . \; 0,8602387 + 0,860$

$2387 \;) = 0,778093213$

$i = 4$

$U_{4,2} = 0,25 \; (\; U_{5,1} + 2 \; . \; U_{4,1} + U_{3,1} \;)$

$= 0,25 \; (\; 0 + 2 \; . \; 0,531656755 + 0,8602387 \;)$

$= 0,480888052$

j = 2 , i = 1

$$U_{1,3} = 0,25 \; (\; U_{2,2} + 2 \; U_{1,2} + U_{0,2} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; 0,778093213 + 2 \; . \; 0,480888052 + 0 \;)$$

$$= 0,434967329$$

i = 2

$$U_{2,3} = 0,25 \; (\; U_{3,2} + 2 \; U_{2,2} + U_{1,2} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; 0,788093213 + 2 \; . \; 0,778093213 +$$

$$0,480888052 \;) = 0,703791922$$

i = 3

$$U_{3,3} = 0,25 \; (\; U_{4,2} + 2 \; U_{3,2} + U_{2,2} \;)$$

$$= 0,25 \; (\; 0,480888052 + 2 \; . \; 0,778093213 +$$

$$0,778093213 \;) = 0,70374611$$

i = 4

$$U_{4,3} = 0,25 \; (\; U_{5,2} + 2 \; U_{4,2} + U_{3,2} \;)$$

$= 0,25 \ (\ 0 + 2 \ . \ 0,480888052 + 0,778093213 \ )$

$= 0,434967329$

$j = 3 \ , \ i = 1$

$U_{1,4} = 0,25 \ (\ U_{2,3} + 2 \ U_{1,3} + U_{0,3} \ )$

$= 0,25 \ (\ 0,703791922 + 2 \ . \ 0,434967329 + 0 \ )$

$= 0,393431645$

$i = 2$

$U_{2,4} = 0,25 \ (\ U_{3,3} + 2 \ U_{2,3} + U_{1,3} \ )$

$= 0,25 \ (\ 0,70374611 + 2 \ . \ 0,730791922 +$

$0,434967329 \ ) = 0,63657432$

$i = 3$

$U_{3,4} = 0,25 \ (\ U_{4,3} + 2 \ U_{3,3} + U_{2,3} \ )$

$= 0,25 \ (\ 0,434967329 + 2 \ . \ 0,70374611 +$

$0,703791922 \ ) = 0,636562867$

i = 4

$$U_{4,4} = 0,25 \; (\; U_{5,3} + 2 \; U_{4,3} + U_{3,3} \;)$$

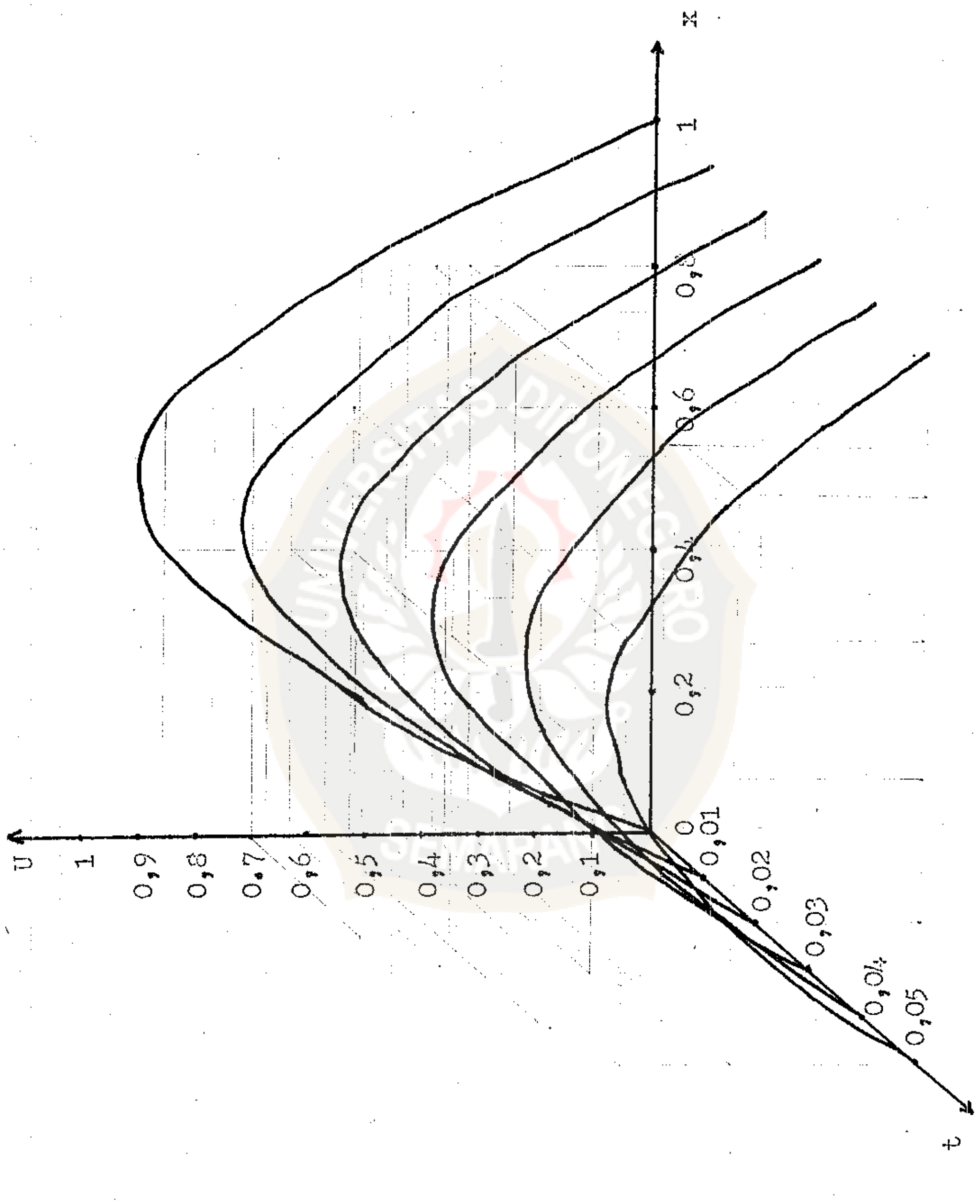
$$= 0,25 \; (\; 0 + 2 \; . \; 0,434967329 + 0,70374611 \;)$$

$$= 0,393420192$$

Apabila perhitungan dilanjutkan akan didapat tabel seperti berikut ini.

Tabel 3.1.1.

t \ x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	0	0,53166	0,86024	0,86024	0,53166	0
0,01	0	0,48089	0,77809	0,77809	0,48089	0
0,02	0	0,43497	0,70379	0,70375	0,43497	0
0,03	0	0,39343	0,63657	0,63656	0,39342	0
0,04	0	0,35586	0,57579	0,57578	0,35585	0
0,05	0	0,32188	0,52080	0,52080	0,32187	0


U
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
x
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
t

3.2. METODE IMPLISIT

Metode Implisit adalah pendekatan derivatif U_{xx} pada persamaan (3.2.1) dalam baris j+1.

Didapat bentuk :

$$\frac{1}{k}\left(U_{i,j+1} - U_{i,j} \right) = \frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j+1} - 2\,U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} \right) \qquad \ldots\ldots (3.2.1)$$

Jika $r = \frac{k}{h^2}$ maka :

$$-r\,U_{i-1,j+1} + (1 + 2r)\,U_{i,j+1} - r\,U_{i+1,j+1} = U_{i,j}$$

Crank-Nicolson menggunakan pendekatan rata-rata dalam baris j dan j+1. Secara umum dapat diberikan dengan menggunakan faktor λ dari persamaan (3.2.1) dengan bentuk :

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r\left[\lambda\left(U_{i-1,j+1} - 2\,U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} \right) + (1-\lambda)\left(U_{i-1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i+1,j} \right)\right]$$

dengan $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$-r\lambda\,U_{i-1,j+1} + (1 + 2r\lambda)\,U_{i,j+1} - r\lambda\,U_{i+1,j+1} =$$

$$r\,(1-\lambda)\,U_{i-1,j} + \left[1 - 2r\,(1-\lambda) \right] U_{i,j} -$$

$r\ (1 - \lambda)\ U_{i+1,j}$

CONTOH SOAL

Diketahui :

$U_t = U_{xx}$ dengan syarat

$U\ (x,\ 0) = \sin \pi x$

$U\ (0,\ t) = U\ (1,\ t) = 0$

$h = 0{,}2$

$r = 1/4$

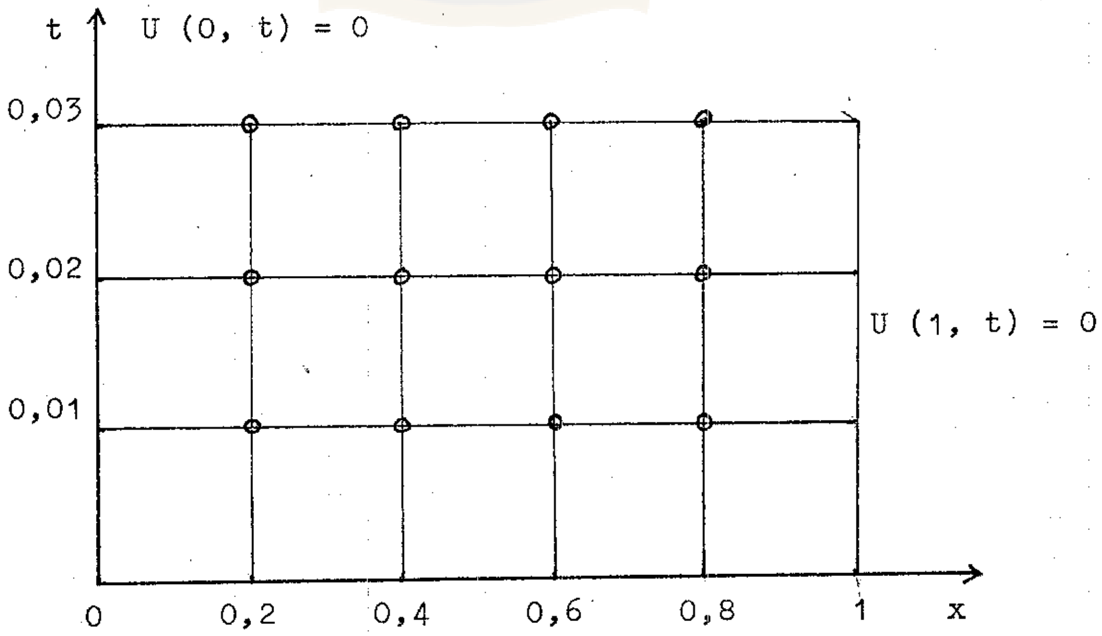
$k = r\ .\ h = 0{,}01$

$\lambda = 1/2$

Ditanyakan :

Nilai U pada T = 4

Jawab :



$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{r}{2} (U_{i+1,j} - 2 U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{r}{2}$$

$$(U_{i+1,j+1} - 2 U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1})$$

$$U_{i,j+1} - \frac{r}{2} U_{i+1,j+1} + r U_{i,j+1} - \frac{r}{2} U_{i-1,j+1} = \frac{r}{2} U_{i+1,j}$$

$$- r U_{i,j} + \frac{r}{2} U_{i-1,j} + U_{i,j}$$

$$- \frac{r}{2} U_{i-1,j+1} + (1 + r) U_{i,j+1} - \frac{r}{2} U_{i+1,j+1} = \frac{r}{2} U_{i-1,j} +$$

$$(1 - r) U_{i,j} + \frac{r}{2} U_{i+1,j}$$

Untuk i = 1

$$- \frac{1}{8} U_{0,j+1} + \frac{5}{4} U_{1,j+1} - \frac{1}{8} U_{2,j+1} = \frac{1}{8} U_{0,j} + \frac{3}{4} U_{1,j} +$$

$$\frac{1}{8} U_{2,j}$$

Untuk i = 2

$$- \frac{1}{8} U_{1,j+1} + \frac{5}{4} U_{2,j+1} - \frac{1}{8} U_{3,j+1} = \frac{1}{8} U_{1,j} + \frac{3}{4} U_{2,j} +$$

$$\frac{1}{8} U_{3,j}$$

Untuk i = 3

$$- \frac{1}{8} U_{2,j+1} + \frac{5}{4} U_{3,j+1} - \frac{1}{8} U_{4,j+1} = \frac{1}{8} U_{2,j} + \frac{3}{4} U_{3,j} +$$

$\frac{1}{8} U_{4,j}$

Untuk i = 4

$$- \frac{1}{8} U_{3,j+1} + \frac{5}{4} U_{4,j+1} - \frac{1}{8} U_{5,j+1} = \frac{1}{8} U_{3,j} + \frac{3}{4} U_{4,j} +$$

$$\frac{1}{8} U_{5,j}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ U_{4,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ U_{4,j} \end{bmatrix}$$

Dicari invers dari matriks :

$$\begin{bmatrix} 1,25 & -0,125 & 0 & 0 \\ -0,125 & 1,25 & -0,125 & 0 \\ 0 & -0,125 & 1,25 & -0,125 \\ 0 & 0 & -0,125 & 1,25 \end{bmatrix}$$

Determinant matriks tersebut adalah :

$$1,25 \begin{vmatrix} 1,25 & -0,125 & 0 \\ -0,125 & 1,25 & -0,125 \\ 0 & -0,125 & 1,25 \end{vmatrix} +$$

$$0,125 \begin{vmatrix} -0,125 & -0,125 & 0 \\ 0 & 1,25 & -0,125 \\ 0 & -0,125 & 1,25 \end{vmatrix}$$

Determinant = 2,392578125 - 0,024 = 2,368408204

Matriks inversnya adalah :

$$\begin{bmatrix} 0,80816 & 0,08164 & 0,00825 & 0,00083 \\ 0,08164 & 0,81641 & 0,08247 & 0,00825 \\ 0,00825 & 0,08247 & 0,81641 & 0,08164 \\ 0,00083 & 0,00825 & 0,08164 & 0,80816 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat persamaan :

$$\begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ U_{4,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80816 & 0,08164 & 0,00825 & 0,00083 \\ 0,08164 & 0,81641 & 0,08247 & 0,00825 \\ 0,00825 & 0,08347 & 0,81641 & 0,08164 \\ 0,00083 & 0,00825 & 0,08164 & 0,80816 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,125 & 0 & 0 \\ 0,125 & 0,75 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0,75 & 0,125 \\ 0 & 0 & 0,125 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ U_{4,j} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ U_{4,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ U_{3,j} \\ U_{4,j} \end{bmatrix}$$

Untuk j = 0 maka

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,0} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} \\ U_{4,0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin 0,2\pi \\ \sin 0,4\pi \\ \sin 0,6\pi \\ \sin 0,8\pi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,58778525 \\ 0,95105625 \\ 0,95105652 \\ 0,58778525 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,534220425 \\ 0,86438671 \\ 0,864386836 \\ 0,534220421 \end{bmatrix}$$

Jadi : $U_{1,1} = 0,534220425$

$U_{2,1} = 0,86438671$

$U_{3,1} = 0,864386836$

$U_{4,1} = 0,534220421$

Jika j = 1 maka

$$\begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{4,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,534220425 \\ 0,86438671 \\ 0,864386836 \\ 0,534220421 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,485536982 \\ 0,78561531 \\ 0,785615368 \\ 0,485536998 \end{bmatrix}$$

Jadi : $U_{1,2} = 0,485536982$

$U_{2,2} = 0,78561531$

$U_{3,2} = 0,785615368$

$U_{4,2} = 0,485536998$

Jika j = 2 maka

$$\begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \\ U_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{4,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,485536982 \\ 0,78561531 \\ 0,785615368 \\ 0,485536998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,441290065 \\ 0,714022317 \\ 0,714022347 \\ 0,441290083 \end{bmatrix}$$

Jadi : $U_{1,3} = 0,441290065$

$U_{2,3} = 0,714022317$

$U_{3,3} = 0,714022347$

$U_{4,3} = 0,441290083$

Jika j = 3 maka

$$\begin{bmatrix} U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{3,4} \\ U_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \\ U_{4,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,61633 & 0,16328 & 0,01650 & 0,00165 \\ 0,16328 & 0,63282 & 0,16494 & 0,01650 \\ 0,01650 & 0,16494 & 0,63282 & 0,16328 \\ 0,00165 & 0,01650 & 0,16328 & 0,61633 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,441290065 \\ 0,714022317 \\ 0,714022347 \\ 0,441290083 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,401075366 \\ 0,648953576 \\ 0,648953593 \\ 0,401075382 \end{bmatrix}$$

Jadi : $U_{1,4} = 0,401075366$

$U_{2,4} = 0,648953576$

$U_{3,4} = 0,648953593$

$U_{4,4} = 0,401075382$

Dari perhitungan diatas akan didapatkan tabel sebagai berikut :

t \ x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	0	0,53422	0,86439	0,86439	0,53422	0
0,01	0	0,48554	0,78562	0,78562	0,48554	0
0,02	0	0,44129	0,71402	0,71402	0,44129	0
0,03	0	0,40108	0,64895	0,64895	0,40108	0

Gambar yang didapat pada metode Implisit ini tidak jauh berbeda dengan gambar yang diperoleh bila menggunakan metode Explisit.

Dibawah ini bisa dilihat tabel perbandingan antara penggunaan metode Explisit dan metode Implisit (Crank-Nicolson).

	x = 0,2		x = 0,4		x = 0,6		x = 0,8	
t	Exp	CN	Exp	CN	Exp	CN	Exp	CN
0	0,532	0,534	0,860	0,864	0,860	0,864	0,532	0,534
0,01	0,481	0,486	0,778	0,786	0,778	0,786	0,481	0,486
0,02	0,435	0,441	0,704	0,714	0,704	0,714	0,435	0,441
0,03	0,393	0,401	0,637	0,649	0,637	0,649	0,393	0,401

Dapat dilihat bahwa kedua metode tersebut mempunyai perbedaan hasil yang relatif kecil. Sehingga bisa dikatakan bahwa kedua metode tersebut akan didapatkan hasil yang relatif sama. Jadi keduanya dapat digunakan dalam perhitungan.