BAB II

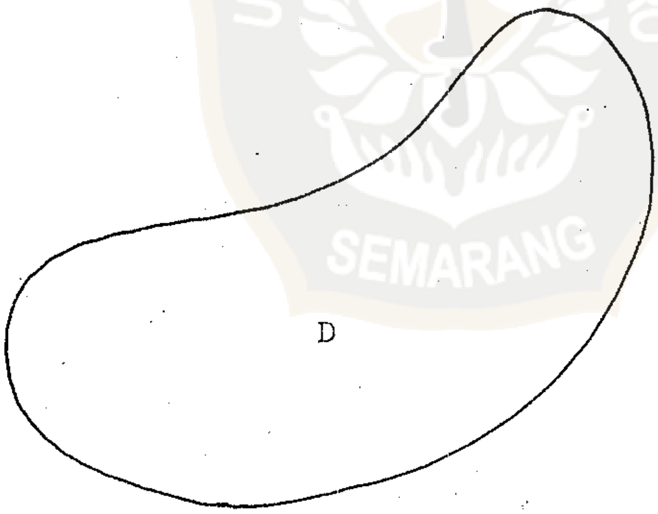
PERSAMAAN PARABOLA

2.1. DIFFERENSI TERBATAS

Beberapa pendekatan sederhana akan dibicarakan disini. Setiap pendekatan mempunyai kesalahan yang dikatakan kesalahan pembulatan. Kesalahan ini ditandai dengan notasi O.

Gambar 2.1.1.

Daerah kontinue dalam dimensi dua.

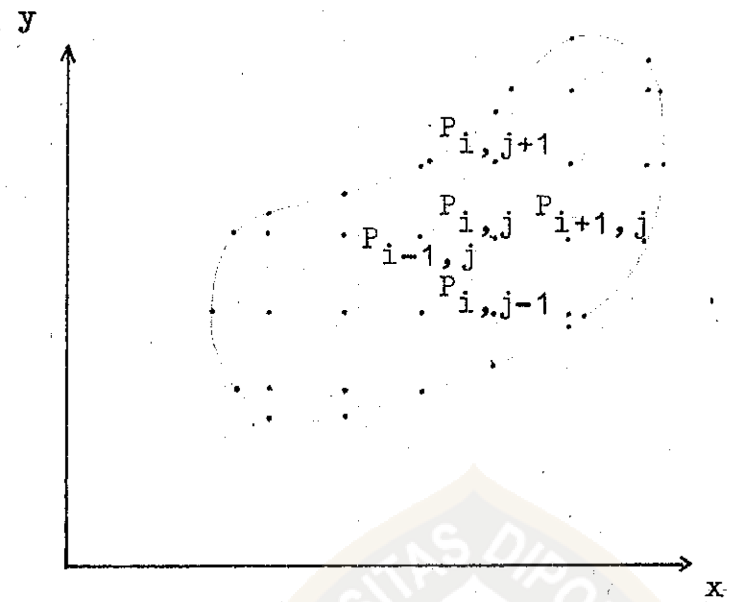


Gambar 2.1.2.

Daerah diskrit dalam dimensi dua, $h = \Delta x$

$k = \Delta y$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



Pandang persamaan dalam dimensi dua.

$$L(u) = f \qquad u = u(x, y)$$

dalam daerah D, untuk menentukan syarat batas disekitar D. Misalkan titik $P_{i,j}$ yang berbentuk diskrit merupakan pendekatan dari daerah D dengan jarak tetap $h = \Delta x$ dan $k = \Delta y$. Pendekatan sederhana untuk $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j}$ dinotasikan dengan $U_{i,j} = U(ih, jk)$ yang akan dipakai sebagai solusi exact dan $U_{i,j}$ pendekatan diskrit. Perkembangan deret Taylor untuk $U(x+\Delta x, y)$ diberikan oleh :

$$U(x+\Delta x, y) = U(x, y) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x, y) + O\left[(\Delta x)^4\right]$$

Deret dibagi Δx menghasilkan :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{U\ (x+\Delta x,\ y)}{\Delta x} = \frac{U\ (x,\ y)}{\Delta x} + \frac{\partial U}{\partial x}\ (x,\ y)\ +\ 0\ (\Delta x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\ (x,\ y) = \left[U\ (x+\Delta x,\ y) - U\ (x,\ y)\right]/\Delta x + 0\ (\Delta x)$$

0 (Δx) adalah pembulatan kesalahan yang berupa konstanta, yang bisa berupa bilangan positif atau negatif. Differensi Forward (maju) ini adalah order pertama sederhana dengan pendekatan. Dalam pemberian notasi index dapat ditulis :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{h}\left[U_{i+1,j} - U_{i,j}\right] + 0\ (h)$$

Besarnya 0 (h) menggambarkan notasi asymptotik untuk pembulatan kesalahan pada pendekatan ini.

Untuk Differensi Backward (mundur) diperoleh dengan keadaan yang sama. Pandang deret Taylor U (x-Δx, y) pada titik (x, y)

$$U\ (x-\Delta x,\ y) = U\ (x,\ y) - \frac{(\Delta x)}{1!}\frac{\partial U}{\partial x}\ (x,\ y) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ (x,\ y) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\ (x,\ y) + 0\ \left[(\Delta x)^4\right]$$

deret dibagi Δx menghasilkan :

$$\frac{U\ (x-\Delta x,\ y)}{\Delta x} = \frac{U\ (x,\ y)}{\Delta x} - \frac{\partial U}{\partial x}\ (x,\ y)\ +\ 0\ (\Delta x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\ (x,\ y) = \left[U\ (x,\ y) - U\ (x-\Delta x,\ y)\right]/\Delta x + 0\ (\Delta x)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Akhirnya didapat Differensi Backward (mundur) order satu dalam pembulatan kesalahan dengan notasi index.

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{1}{h}\left[U_{i,j} - U_{i-1,j}\right] + 0\ (h)$$

Cara yang lebih mudah untuk memberi gambaran tentang pendekatan order yang lebih tinggi pada $\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah dengan mengurangi deret Taylor U (x+Δx, y) dengan U (x-Δx, y).

$$U\ (x+\Delta x,\ y) - U\ (x-\Delta x,\ y) = 2\ \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x,\ y) +$$

$$\frac{(\Delta x)^3}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x,\ y) + 0\left[(\Delta x)^5\right]$$

Pendekatan order dua dihasilkan dengan membagi persamaan diatas dengan 2Δx

$$\frac{U\ (x+\Delta x,\ y) - U\ (x-\Delta x,\ y)}{2\ \Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x,\ y) + 0\left[(\Delta x)^2\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,\ y) = \frac{U\ (x+\Delta x,\ y) - U\ (x-\Delta x,\ y)}{2\ \Delta x} + 0\left[(\Delta x)^2\right]$$

Dalam notasi index ditulis :

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} + 0\left[(\Delta x)^2\right]$$

Pendekatan derivatif parsiel kedua dapat diperoleh dengan menjumlahkan deret Taylor U (x+Δx, y) dan U (x-Δx,y).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$U(x+\Delta x, y) + U(x-\Delta x, y) = 2U(x, y) + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) + 0\left[(\Delta x)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) = \frac{U(x+\Delta x, y) - 2U(x, y) + U(x-\Delta x, y)}{(\Delta x)^2}$$

$$+ 0\left[(\Delta x)^2\right]$$

Dalam notasi index ditulis :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + 0(h^2)$$

Contoh soal :

$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy}$ dengan jarak yang sama $(h = k)$.

Tentukan nilai $\nabla^2 U$!

Jawab :

$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy}$

$$\nabla^2 U\Big|_{i,j} = U_{xx}\Big|_{i,j} + U_{yy}\Big|_{i,j}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right] + 0(h^2) +$$

$$\frac{1}{k^2}\left[U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}\right] + 0(k^2)$$

Karena $h = k$ maka

$$\nabla^2 U\Big|_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right] + \frac{1}{h^2}\left[U_{i,j+1} -\right.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$2\,U_{i,j} + U_{i,j-1} + 0\,(h^2)$$

dengan $0\,(h^2)$ konstanta sembarang.

Sehingga :

$$\nabla^2 U \Big|_{i,j} = \frac{1}{h^2}\Big[U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4\,U_{i,j}\Big] + 0\,(h^2)$$

2 .2. PERSAMAAN PARABOLA

Pada umumnya model matematika secara fisika merupakan bentuk khusus dari persamaan umum differensial parsiel order dua yang berbentuk :

$$L\,(u) = A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\,B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - H\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad \ldots\ldots (2.2.1)$$

Persamaan diatas dikatakan semi linier jika A, B dan C merupakan fungsi independent variable x dan y saja. Jika A, B dan C merupakan fungsi dari x, y, u, $\frac{\partial U}{\partial x}$ dan $\frac{\partial U}{\partial y}$ maka L (u) disebut persamaan quasi linier.

Sedangkan jika A, B dan C adalah fungsi dari u, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ maka persamaan diatas disebut linier.

Pada umumnya sebagian besar persamaan differensial parsiel linier order dua dalam dua variable independent x dan y dinyatakan seperti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A\ (x,\ y)\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\ B\ (x,\ y)\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\ (x,\ y)\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} +$$

$$D\ (x,\ y)\ \frac{\partial U}{\partial x} + E\ (x,\ y)\ \frac{\partial U}{\partial y} + F\ (x,\ y)\ U + G\ (x,\ y)$$

$$= 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2.2.2)$$

Jika G = 0 persamaan differensial parsiel diatas disebut persamaan yang homogen. Sebaliknya jika $G \neq 0$ maka persamaan disebut tidak homogen.

Solusi persamaan (2 .2.1) atau (2 .2.2) akan berbentuk U (x, y) yang digambarkan dalam daerah (x, y, u) yang dikatakan integral permukaan. Jika pada permukaan ada kurva-kurva melintang yang mempunyai derivatif parsiel $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, adalah discontinue maka kurva dikatakan sebagai kurva karacteristik. Misalkan solusi persamaan (2.2.1) melewati kurva Γ yang mempunyai persamaan parameter

$$x = x\ (s) \qquad y = y\ (s) \qquad u = u\ (s)$$

$$\ldots\ldots \quad (2.2.3)$$

dianggap juga bahwa pada setiap titik (x, y, u) pada kurva Γ derivatif parsielnya $\frac{\partial U}{\partial x}$ dan $\frac{\partial U}{\partial y}$ diketahui.
Jika solusi berbentuk U = U (x, y) pada setiap titik x dan y pada kurva Γ akan didapat persamaan :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

Misalkan diambil

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p = p\ (x,\ y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = q = q\ (x,\ y)$$

Maka didapatkan bentuk persamaan

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

Dari uraian diatas akan didapat tiga persamaan sebagai berikut :

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\,B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = H$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{dU_x}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{dU_y}{ds}$$

Ketiga persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matrix.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\begin{bmatrix} A & 2B & C \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \frac{dU_x}{ds} \\ \frac{dU_y}{ds} \end{bmatrix}$$

Solusi persamaannya ada dan tunggal jika determinant matriks tersebut tidak sama dengan nol. Jika determinant matriks sama dengan nol, maka ada banyak solusi yang mungkin. Sehingga persamaan tidak menentukan derivative parsiel secara tunggal.

Untuk menentukan karacteristik suatu keluarga persamaan, diambil determinant sama dengan nol.

$$\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = 0$$

Dari determinant ini dapat disederhanakan menjadi :

$$A \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - 2B \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + C \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 0$$

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

Sekarang digunakan rumus ABC

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2B \pm \sqrt{4\,B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A}$$

$$= \frac{2B \pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{2A}$$

$$= \frac{1}{A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - AC} \right)$$

Solusi dapat dipecah menjadi dua persamaan

$$A\,dy - \left(B + \sqrt{B^2 - AC} \right) dx = 0$$

$$A\,dy - \left(B - \sqrt{B^2 - AC} \right) dx = 0$$

Solusi dapat dinyatakan seperti :

$$\left.\begin{aligned} V_1\,(x,\ y) &= \text{konstanta} \\ V_2\,(x,\ y) &= \text{konstanta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.2.4)$$

Jadi ada dua keluarga dari kuva-kurva yang diberikan oleh persamaan (2.2.4) sepanjang derivative parsiel order dua tidak ditentukan dalam batasan tertentu. Kuva-kurva dikatakan karacteristik nyata, terpisah dan tertentu atau riel ataupun imajiner, tergantung dari harga dibawah ini

$B^2 - AC > 0$

$B^2 - AC = 0$ atau

$B^2 - AC < 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan differensial parsiel (2.2.1) dikatakan Hyperbolic jika $B^2 - AC > 0$, atau bisa juga dikatakan persamaan tersebut mempunyai dua akar riel dan berlainan. Persamaan dikatakan Parabolic jika $B^2 - AC = 0$, atau persamaan tersebut mempunyai dua akar riel yang berimpit. Persamaan dikatakan Elliptic jika $B^2 - AC < 0$ atau dengan kata lain persamaan tersebut mempunyai dua akar yang immajiner.

Diberikan contoh tiga type bentuk umum persamaan.

(1) Persamaan aliran panas merupakan type Parabolic

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

(2) Persamaan gelombang merupakan type Hyperbolic

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

(3) Persamaan laplace merupakan type Elliptic

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

Dianggap bahwa semua pembicaraan ini mempunyai solusi, solusinya tunggal dan tergantung langsung terhadap data yang diberikan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)