BAB III

FUNGSI SWITCHING

3.1. Pengertian aljabar switching

Salah satu penerapan aljabar logika adalah rangkaian listrik (rangkaian switch). Oleh sebab itu aljabar logika dalam pembahasannya di bidang listrik sering disebut Aljabar Switching.

Aljabar switching ditulis B (0,1, +,.,´) dengan 0,1 adalah nilai-nilai dari sinyal digital, tanda "´" menyatakan komplemen, Operasi " + " menyatakan rangkaian paralel dan operasi "." menyatakan rangkaian seri.

3.2. Pendefinisian fungsi switching

Definisi 2.

Jika B (0,1,+,.,´) suatu aljabar switching

dan $B^n = \underbrace{B \times B \times \ldots\ldots \times B}_{n}$

Maka pemetaan

$$f : B^n \longrightarrow B$$

adalah fungsi switching

3.3. Sifat-sifat fungsi switching

(1) Jika f suatu fungsi switching, maka g yang didefinisikan oleh,

$$g(X_1,X_2,\ldots,X_n) = (f(X_1,X_2,\ldots,X_n))',\forall (X_1,X_2,\ldots,X_n) \in B^n,$$

adalah fungsi switching.

(2) Jika f dan g fungsi switching, maka h dan k yang didefinisikan oleh :

$$h(X_1,X_2,\ldots,X_n) = f(X_1,X_2,\ldots,X_n) + g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

dan

$$k(X_1,X_2,\ldots,X_n) = f(X_1,X_2,\ldots,X_n) \,.\, g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

$\forall\ (X_1,X_2,\ldots,X_n) \in B^n$, adalah fungsi switching.

3.4 Bentuk khusus fungsi switching

Definisi 3.

Jika untuk setiap $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \in B^n$
$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = a$, $a \in \{0,1\}$
Maka fungsi ini disebut fungsi konstanta

Definisi 4

Jika untuk setiap $(X_1,X_2,\ldots,X_n) \in B^n$
$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = X_i$, untuk $i = 1,2,\ldots.n$.
Maka fungsi ini disebut fungsi proyeksi

3.5 Bentuk kanonik fungsi switching

Lemma 1.

Setiap fungsi switching dari satu variabel f(x), dapat ditulis dalam bentuk :
$f(X) = f(1).X + f(0).X'$

Bukti :

Dibuktikan untuk fungsi konstan $f(X) = a$, dan fungsi proyeksi

$f(X) = X$ atau $f(X) = X'$

Untuk $f(X) = a$. $a \in$ sebarang dari B, maka

$$a = a\,(X + X')$$
$$= aX + aX' \text{ , untuk setiap X unsur B}$$

$f(X) = a$, maka

$f(X) = aX + aX'$, $f(0) = a$, $f(1) = a$

$f(X) = f(1)\,X + f(0)\,X'$

Untuk $f(X) = X$

$$f(X) = X$$
$$= 1X + 0X'$$
$$= f(1)X + f\,(0)X'$$

,untuk $f(X) = X'$

$$f(X) = X'$$
$$= 0X + 1X'$$
$$= f(1)X + f(0)X'$$

Misalkan f dan g fungsi switching yang telah memenuhi lemma 1, maka :

$$f(X) + g(X) = [\ (f(1)X + (f(0)X')\ ] + [\ (g(1)X + (g(0)X')\ ]$$
$$= (\ f(1)X + g(1)X\ ) + (\ f(0)X' + g(0)X')$$
$$= [\ f(1) + g(1)\ ]\ X + [\ f(0) + g(0)\ ]\ X'$$

Begitu pula :

$$f(X)\ .\ g(x) = [\ (f(1)X) + (f(0)X')\ ]\ [\ (g(1)X) + (g(0)X')\ ]$$
$$= f(1)X\ .\ g(1)X + f(1)X\ .\ g(0)X' + f(0)X'\ .\ g(1)X$$
$$+ f(0)X'.\ g(0)X'$$
$$= f(1)X\ .\ g(1)X + f(0)X'.\ g\ (0)X'$$
$$= [\ f(1)\ .\ g(1)\ ]\ X + [\ f(0)\ .\ g(0)\ ]\ X'$$

Dengan demikian f+g dan f.g memenuhi sifat diatas.

Karena semua bentuk khusus serta sifat-sifat dari fungsi switching telah dipenuhi oleh lemma 1, dan f(x) merupakan suatu pemetaan dari aljabar switching ke aljabar switching, maka lemma 1 terbukti

Dengan bukti yang sama. lemma 1 dapat diperluas untuk fungsi n variabel.

Lemma 2.

a. $f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = f(1,X_2,\ldots,X_n)\ X_1 + f(0,X_2,\ldots,X_n)\ X_1'$

$= f(1,X_2,\ldots,X_n)\ X_1 \oplus f(0,X_2,\ldots,X_n)\ X_1'$

b. $f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = [f(0,X_2,\ldots,X_n) + X_1]\ [f(1,X_2,\ldots,X_n) + X_1']$

Bukti :

a. Masukan harga $X_1 = 1$ dan $X_1' = 0$. Akan didapatkan :

$$\begin{aligned} f(1,X_2,\ldots,X_n) &= f(1,X_2,\ldots,X_n).1 + f(0,X_2,\ldots,X_n).0 \\ &= f(1,X_2,\ldots,X_n) + 0 \\ &= f(1,X_2,\ldots,X_n) \end{aligned}$$

Jika dimasukan $X_1 = 0$ dan $X_1' = 1$ didapat,

$$\begin{aligned} f(0,X_2,\ldots,X_n) &= f(1,X_2,\ldots,X_n).0 + f(0,X_2,\ldots,X_n).1 \\ &= 0 + f(0,X_2,\ldots,X_n). \\ &= f(0,X_2,\ldots,X_n). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa persamaan menjadi identitas.

Untuk operasi $\oplus$ pembuktiannya sama ,hanya tanda "+" diubah "$\oplus$".

b. Pembuktiannya ekwivalen dengan a.

Masukan harga $X_1 = 1$ dan $X_1' = 0$

$$\begin{aligned} f(1,X_2,\ldots,X_n) &= [\ f(0,X_2,\ldots,X_n) + 1\ ]\ [\ f(1,X_2,\ldots,X_n) + 0\ ] \\ &= [1]\ [\ f(1,X_2,\ldots,X_n)\ ] \\ &= f(1,X_2,\ldots,X_n) \end{aligned}$$

untuk $X_1 = 0$ dan $X_1' = 1$

$$\begin{aligned} f(0,X_2,\ldots,X_n) &= [\ f(0,X_2,\ldots,X_n) + 0\ ]\ [\ f(1,X_2,\ldots,X_n) + 1\ ] \\ &= [\ f(0,X_2,\ldots,X_n)\ ]\ [\ 1\ ] \\ &= f(0,X_2,\ldots,X_n) \end{aligned}$$

Terbukti persamaannya juga menjadi identitas.

Definisi 5

Pangkat suatu elemen dalam aljabar Boole didefinisikan sebagai berikut :

$$X_j^0 = X_j' \ ; \ X_j^1 = X_j \ ; \ e_j = 0 \text{ atau } 1.$$

Teorema 9

Setiap fungsi switching $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ dapat ditulis dalam bentuk Jumlah-dari-hasil kali kanonik , yaitu :

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \sum_{(e)} f(e_1,e_2,\ldots,e_n)\, X_1^{e_1} X_2^{e_2} \ldots X_n^{e_n}$$

dengan banyaknya penjumlahan sama dengan banyaknya kombinasi dari $e_1,\ldots,e_n$ (e_j berarti 0 atau 1, $1 < j < n$)

Bukti :

Dari perluasan lemma 2a. untuk setiap fungsi switching dapat dinyatakan :

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2,\ldots,X_n) &= f(1,1,X_3,\ldots,X_n)X_1X_2 \\ &+ f(1,0,X_3,\ldots,X_n)X_1X_2' \\ &+ f(0,1,X_3,\ldots,X_n)X_1'X_2 \\ &+ f(0,0,X_3,\ldots,X_n)X_1'X_2' \end{aligned}$$

Jika proses ini terus dilakukan sampai semua variabel pada semua fungsi yang muncul tereliminasi ,maka diperoleh 2^n suku.

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2,\ldots,X_n) &= f(1,1,\ldots,1)X_1X_2\ldots X_n \\ &+ f(1,1,\ldots,0)X_1X_2\ldots X_{n-1}X_n' \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ f(0,0,\ldots,0)X_1'X_2'\ldots X_n' \end{aligned}$$

Dari proses diatas dapat dilihat jika $x_j(x_j')$ muncul pada suatu suku ,maka nilai 1 (0) akan muncul pada suku tersebut pula

Dapat ditulis :

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \sum_{(e)} f(e_1,e_2,\ldots,e_n)X_1^{e_1}\ X_2^{e_2}\ldots X_n^{e_n}$$

Contoh :

Tuliskan fungsi dalam bentuk jumlah-dari-hasil kali kanonik.

X_1	X_2	$f(X_1,X_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2) &= f(0,0)X_1'X_2' + f(0,1)X_1'X_2 + f(1,0)X_1X_2' + f(1,1)X_1X_2 \\ &= 0.X_1'X_2' + 1.X_1'X_2 + 0.X_1X_2' + 1.X_1X_2 \\ &= X_1'X_2 + X_1X_2 \\ &= X_2 . \end{aligned}$$

Teorema 10

Setiap fungsi switching $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ dapat ditulis dalam bentuk Hasil kali-dari-jumlah kanonik ,yaitu :

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \prod_{(e)} f(e_1',e_2',\ldots,e_n') + X_1^{e_1} + X_2^{e_2} + \ldots + X_n^{e_n}$$

Dimana jika e_j bernilai 1 (atau 0) maka e_j' bernilai 0 (atau 1)
$1 < j < n$
Banyaknya perkalian sama dengan banyaknya kombinasi dari $e_1,\ldots,e_n$

Bukti :

Ekwivalen dengan pembuktian jumlah-dari-hasil kali kanonik. Dari perluasan lemma 2b didapat.

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = & [\ f(0,0,X_3,\ldots,X_n) + X_1 + X_2\ ] \\ & [\ f(0,1,X_3,\ldots,X_n) + X_1 + X_2'] \\ & [\ f(1,0,X_3,\ldots,X_n) + X_1' + X_2\ ] \\ & [\ f(1,1,X_3,\ldots,X_n) + X_1' + X_2'] \end{aligned}$$

jika proses ini terus dilakukan sampai semua variabel pada semua fungsi yang muncul tereleminasi, maka akan diperoleh 2^n suku.

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = & [\ f(0,0,\ldots,0) + X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ ] \\ & [\ f(0,0,\ldots,1) + X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n'] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & [\ f(1,1,\ldots,1) + X_1' + X_2' + \ldots + X_n'] \end{aligned}$$

Dapat ditulis :

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \prod_{(e)} f(e_1'e_2' \ldots e_n') + X_1^{e_1} + X_2^{e_2} + \ldots + X_n^{e_n}$$

Contoh :

Contoh pada bentuk jumlah-dari-hasil kali kanonik , dapat pula ditulis dalam bentuk hasil kali-dari-jumlah kanonik.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2) &= [f(0,0) + X_1 + X_2]\ [f(0,1) + X_1 + X_2'] \\ &\quad [f(1,0) + X_1' + X_2]\ [f(1,1) + X_1' + X_2'] \\ &= (0 + X_1 + X_2)\ (1 + X_1 + X_2') \\ &\quad (0 + X_1' + X_2)\ (1 + X_1' + X_2') \\ &= (X_1 + X_2)\ (X_1' + X_2). \end{aligned}$$