BAB II

ALJABAR BOOLE

Teory swiching terutama membahas analisa (karekteristik, minimisasi dls) serta perwujudan suatu jenis fungsi khusus yang terdefinisi dalam suatu jenis aljabar khusus yaitu aljabar switching.

Aljabar switching merupakan jenis khusus dalam aljabar Boole. Aljabar switching yang mengandung hanya dua elemen yaitu "0" dan "1" ,merupakan aljabar Boole dua elemen (aljabar Boole tak berubah yang paling sederhana).

Pada dasarnya, aljabar Boole merupakan landasan matematika bagi seluruh bidang teori switching.

2.1. Definisi pada aljabar Boole

Definisi 1

Suatu himpunan B dengan dua operasi biner yang masing-masing disajikan dengan "+" dan "." disebut aljabar Boole, jika dan hanya jika postulat-postulat berikut dipenuhi :

1. Kedua operasi tersebut mempunyai sifat komutatif.

2. Terdapat elemen satuan untuk kedua operasi tersebut lambang "0" adalah elemen satuan dari "+" dan "1" elemen satuan dari ".".

3. Tiap operasi distributif satu terhadap yang lainnya yaitu:

$$(b \,.\, c) + a = (b + a) \,.\, (c + a)$$
$$a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$$
$$a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$$
$$(b + c) \,.\, a = (b \,.\, a) + (c \,.\, a),$$

untuk $a, b, c \in B$

4. Untuk setiap $a \in B$, terdapat $a' \in B$ sedemikian sehingga :

$$a + a' = 1 \text{ dan } a \cdot a' = 0$$

elemen a' disebut komplemen dari a

Contoh :

Jika A suatu himpunan sebarang, dan P^A adalah koleksi semua himpunan bagian dari A maka $(P^A, \cup, \cap)$ merupakan suatu aljabar Boole.

2.2 Beberapa teorema penting dalam aljabar Boole

Teorema 1

Untuk setiap $a \in B$, B suatu aljabar Boole maka berlaku :
$a + a = a$ dan $a \cdot a = a$.

Bukti :

(1).	$a = a + o$	Dengan postulat 2
	$= a + aa'$	Dengan postulat 4
	$= (a + a)(a + a')$	Dengan postulat 3
	$= (a + a).\ 1$	Dengan postulat 4
	$= a + a$	Dengan postulat 2
(2).	$a = a\ (1)$	Dengan postulat 2
	$= a\ (a + a')$	Dengan postulat 4
	$= aa + aa'$	Dengan postulat 3
	$= aa + 0$	Dengan postulat 4
	$= aa$	Dengan postulat 2

Keterangan : $a \cdot a$ cukup ditulis dengan aa

Teorema 2

Untuk setiap $a \in B$, maka $a + 1 = 1$ dan $a.\ 0 = 0$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(1)\quad 1 &= a + a' && \text{Dengan postulat 4}\\
&= a + a'\,(1) && \text{Dengan postulat 2}\\
&= (a + a')\,(a + 1) && \text{Dengan postulat 3}\\
&= 1\,(a + 1) && \text{Dengan postulat 4}\\
&= a + 1 && \text{Dengan postulat 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad 0 &= a\,.\,a' && \text{Dengan postulat 4}\\
&= a\,.\,(a' + 0) && \text{Dengan postulat 2}\\
&= (aa') + (a\,.\,0) && \text{Dengan postulat 3}\\
&= 0 + (a\,.\,0) && \text{Dengan postulat 4}\\
&= a\,.\,0 && \text{Dengan postulat 2}
\end{aligned}
$$

Teorema 3

Untuk setiap pasangan terurut (a,b), $a,b \in B$ berlaku :
$a + ab = a$ dan $a\,(a + b) = a$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
a &= 1\,.\,a && \text{Dengan postulat 2}\\
&= (1 + b)a && \text{Dengan teorema 2}\\
&= 1a + ba && \text{Dengan postulat 3 \& 1}\\
&= a + ba && \text{Dengan postulat 2}\\
&= a + ab && \text{Dengan postulat 1}
\end{aligned}
$$

Pembuktian $a(a + b) = a$ identik dengan pembuktian $a + ab = a$

Rumus dalam teorema 3 disebut sebagai Hukum Penyerapan (Law of Absorption) dan memegang peranan penting dalam rumus-rumus Boole, juga sangat berguna dalam mengartikan aljabar Boole dalam aljabar himpunan .

Dapat dicatat bahwa mereka menunjukan kaitan yang jelas antara beberapa aturan distribusi

Contoh :

$$(a + b)(a + c) = aa + ac + ba + bc \quad \text{Dengan Postulat 3}$$
$$= a + ac + ab + bc \quad \text{Dengan Teo 1 \& Post.1}$$
$$= a + bc \quad \text{Dengan Teo 3 (dua kali)}$$

Teorema 4.

Pada setiap aljabar Boole ,setiap operasi biner ("+" & ".") adalah assosiatif.
Maka untuk setiap $a,b,c \in B$, berlaku :
$a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a(ab) = (ab)c$

Bukti :

Pertama akan diperlihatkan : $a + a(bc) = a + (ab)c$

$$a + a(bc) = a \quad \text{Teorema 3}$$
$$= a(a + c) \quad \text{Teorema 3}$$
$$= (a + ab)(a + c) \quad \text{Teorema 3}$$
$$= a + (ab)c \quad \text{Postulat 3 ....(I)}$$

Selanjutnya di tunjukan : $a' + a(bc) = a' + (ab)c$

$$a' + a(bc) = (a' + a)(a' + bc) \quad \text{Postulat 3}$$
$$= 1(a' + bc) \quad \text{Postulat 4}$$
$$= a' + bc \quad \text{Postulat 2}$$
$$= (a' + b)(a' + c) \quad \text{Postulat 3}$$
$$= (1(a' + b))(a' + c) \quad \text{Postulat 2}$$
$$= ((a' + a)(a' + b))(a' + c) \quad \text{Postulat 4}$$
$$= (a' + ab)(a' + c) \quad \text{Postulat 3}$$
$$= a' + (ab)c \quad \text{Postulat 3.(II)}$$

Jika kedua persamaam tadi kita kalikan,diperoleh

$$(a + a(bc))(a' + a(bc)) = (a + (ab)c)(a' + (ab)c)\text{.........(III)}$$

Ruas kiri dari persamaan (III) dapat direduksi,

$$
\begin{aligned}
(a + a\,(bc))\,(a' + a(bc)) &= (a(bc) + a)\,(a(bc) + a') && \text{Postulat 1}\\
&= a(bc) + aa' && \text{Postulat 3}\\
&= a(bc) + 0 && \text{Postulat 4}\\
&= a(bc) && \text{Postulat 2}
\end{aligned}
$$

Seperti halnya ruas kiri, ruas kananpun direduksi,

$$
\begin{aligned}
(a + (ab)\,c)\,(a' + (ab)c) &= ((ab)c + a)\,((ab)c + a') && \text{Postulat 1}\\
&= (ab)c + aa' && \text{Postulat 3}\\
&= (ab)c + 0 && \text{Postulat 4}\\
&= (ab)c && \text{Postulat 2}
\end{aligned}
$$

Maka persamaan (III) menjadi lebih sederhana yaitu ,

$$a(bc) = (ab)c$$

Terbukti assosiatif ; dengan cara yang sama dapat dibuktikan

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Dengan demikian dapat dituliskan :

$$
\begin{aligned}
&(ab)c = a(bc) = abc\\
&(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c
\end{aligned}
$$

<u>Teorema 5</u>

Hanya ada satu dan hanya satu elemen a' yang memenuhi :
$a + a' = 1$ dan $a'.\ a = o$

Bukti :

Andaikan ada x dan y dengan $x, y \in B$ yang bersifat

$$
\begin{aligned}
a + x = 1 \quad &\text{dan} \quad a.x = 0\\
a + y = 1 \quad &\text{dan} \quad a.y = 0
\end{aligned}
$$

Maka :

$$
\begin{aligned}
x &= 1\,x && \text{Postulat 2}\\
&= (a + y)\,x && \text{Dari Asumsi}\\
&= (ax + yx) && \text{Postulat 2,3}\\
&= 0 + yx && \text{Dari Asumsi}\\
&= yx && \text{Postulat 2}\\
&= xy && \text{Postulat 1}\\
&= xy + 0 && \text{Postulat 2}\\
&= xy + ay && \text{Dari Asumsi}\\
&= (x + a)\,y && \text{Postulat 1,3}\\
&= 1\,y && \text{Dari Asumsi}\\
&= y && \text{Postulat 2}
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti elemen komplemen suatu aljabar Boole <u>unik</u>

<u>Teorema 6</u>

Untuk setiap $a \in B$, maka $(a')' = a$

Bukti:

$a + a' = 1$, $a.a' = 0$

Dari Postulat 1,4 & Teorema 5, kondisi ini mengakibatkan $(a')' = a$

<u>Teorema 7</u>

Dalam setiap aljabar Boole, $0' = 1$ dan $1' = 0$

Bukti :

Dari Teorema 2, $1 + 0 = 1$ dan $1.0 = 0$
dari Teorema 5, untuk setiap a hanya ada satu a',
persamaan ini mengakibatkan $0' = 1$ dan $1' = 0$

<u>Teorema 8</u>

Untuk setiap $a,b \in B$, maka

$(ab)' = a' + b'$ dan $(a + b)' = a'\,b'$

Bukti :

Pertama,

$$
\begin{aligned}
(ab)\,(a' + b') &= aba' + abb' && \text{Postulat 3}\\
&= 0.b + a.0 && \text{Postulat 1,2,4}\\
&= 0 && \text{Teorema 1,2}
\end{aligned}
$$

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
(ab) + (a' + b') &= a' + b' + ab && \text{Postulat 1}\\
&= (a' + b' + a)\,(a' + b' + b) && \text{Postulat 3}\\
&= (1 + b')\,(1 + a') && \text{Postulat 3,4}\\
&= 1 && \text{Postulat 2}\\
& && \text{\& Teorema 2}
\end{aligned}
$$

Dari Postulat 4 dan Teorema 5 kondisi ini mengakibatkan

$$(ab)' = a' + b'$$

2.3 Aljabar logika

Aljabar Boole dapat diinterprestasikan sebagai aljabar himpunan dengan memilih himpunan semesta. Salah satu aljabar Boole yang sangat penting dalam teori switching adalah aljabar Boole dengan dua elemen yaitu 0 dan 1. Aljabar Boole dengan dua elemen sering dinamakan aljabar Boole minimum.
Selanjutnya, sering dikatakan bahwa aljabar Boole minimum diiso - morfkan dengan aljabar logika. Dimana elemen 0 dipadankan dengan "SALAH", elemen 1 dipadankan dengan "BENAR".Dengan kedua operasinya dipadankan dengan "DAN" & "ATAU".

Dengan adanya keisomorfan tersebut, maka untuk selanjutnya kita akan mengekwivalensikan nama aljabar Boole minimum dengan aljabar logika.
Aljabar logika sangat penting peranannya dalam rangkaian logika (rangkaian switch), karena itu pada bab ini akan dibahas aljabar

logika secukupnya.

2.3.1 Variabel logika

Variabel dalam logika adalah sesuatu yang mempunyai nilai "benar" atau "salah", "ya" atau "tidak", "1" atau 0, "OFF" atau "ON" dan lain-lain. Variabel-variabel ini dilambangkan dengan simbol x,y,z, ...

Contoh :

(1) P (variabel) menyatakan keadaan Si Peter
Si Peter Sakit, P bernilai benar.
Si Peter Sembuh, P bernilai salah
P adalah suatu variabel yang menggambarkan keadaan Si Peter.

(2) Switch merupakan salah satu penerapannya.Nilai dari dua keadaan (Two state) yang berbeda.
a. Switch dalam keadaan tertutup (benar).
b. Switch dalam keadaan terbuka (salah).

Switch tertutup (a) Switch terbuka (b)

Gambar 1.

2.3.2. Operasi logika

Hanya ada tiga operasi dasar dalam logika yaitu,

(1) Konjungsi (perkalian logika), disebut juga DAN (AND) disimbolkan dengan " . ".

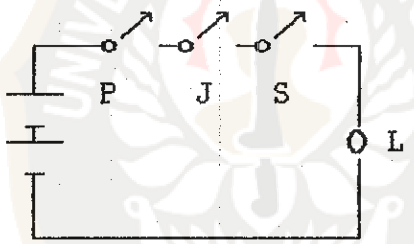
(2) Disjungsi (penjumlahan logika), disebut juga ATAU (OR) disimbolkan dengan " + ".

(3) Negasi disebut TIDAK (NOT), disimbolkan dengan tanda " ʼ " atau " ¯ "

2.3.3 Fungsi DAN (AND)

Fungsi DAN diilustrasikan pada analogi berikut ini, grup A terdiri Peter, John dan Sue, disimbolkan sebagai A = P.J.S, A akan bernilai benar jika Peter hadir (benar), John hadir (benar) dan Sue hadir (benar). Tapi A akan bernilai salah jika salah satu anggautanya absen.

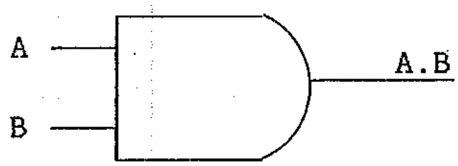
Jika digambarkan dalam rangkaian listrik. Perhatikan gambar 2 dibawah ini; Lampu akan menyala jika semua switch di "ON" kan (analogi dari hadir)



Rangkaian listrik fungsi DAN (AND)
Gambar 2.

Rangkaian logika yang mengilustrasikan fungsi DAN disebut gerbang DAN .

Gambar 3. menunjukan simbol logika untuk dua masukan (input) pada gerbang DAN.



Gerbang DAN (AND)
Gambar 3.

Untuk memperlihatkan semua kondisi masukan dan keluaran dalam gerbang logika digunakan tabel nilai kebenaran.

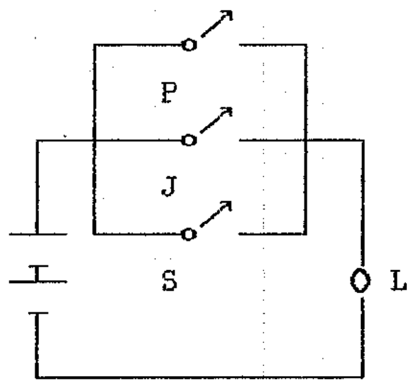
Keadaan	A	B	A.B
1	B	B	B
2	B	S	S
3	S	B	S
4	S	S	S

Semua masukan dan keluaran mempunyai dua kemungkinan nilai yaitu "benar" (B) dan "salah" (S).

2.3.4. Fungsi ATAU (OR)

Fungsi ATAU dapat diilustrasikan dalam analogi di bawah ini. Grup A terdiri atas Peter (P), John (J), dan Sue (S). Wakil dari group ini bisa Peter, John atau Sue atau kombinasi dari mereka. Keadaan ini disimbulkan Z = P + J + S
Dengan Z adalah wakil dari group A, Z benar jika P benar (Peter hadir), atau J benar (John hadir) atau S benar (Sue hadir), Z salah jika seluruh anggauta absen.

Jika digambarkan dalam rangkaian listrik, seperti gambar 4 dibawah ini.



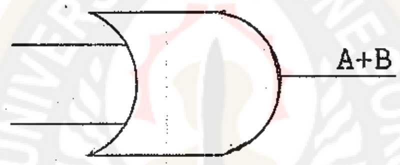
Rangkaian listrik fungsi ATAU (OR)

Gambar 4.

Switch dirangkai secara paralel untuk melukiskan fungsi ATAU. Simbol logika untuk dua masukan pada gerbang ATAU dapat dilihat pada gambar 5.

Tabel nilai kebenaran untuk dua masukan pada fungsi ATAU sebagai berikut,

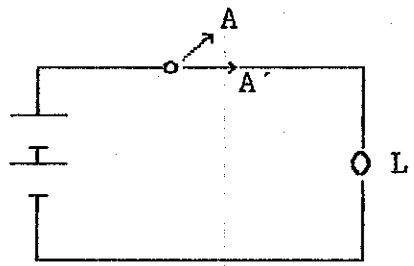
Keadaan	A	B	A+B
1	B	B	B
2	B	S	B
3	S	B	B
4	S	S	S



Gerbang ATAU (OR)
Gambar 5.

2.3.5 Fungsi TIDAK (NOT)

Fungsi TIDAK (NOT) terjadi karena adanya operasi komplemen. Konsep ini dapat diilustrasikan pada gambar di bawah.



Rangkaian listrik fungsi TIDAK (NOT)
Gambar 6.

Jika switch tertutup (A´) maka lampu indikator L akan menyala. Sebaliknya jika terbuka (A), lampu indikator akan padam. Dapat

dikatakan lampu dalam keadaan "ON" (truc) apabila switch tidak dalam keadaan aktif (tertutup). Kondisi ini diekspresikan sebagai L = A´ (A´: baca tidak A).
Simbol logika dari fungsi TIDAK dapat dilihat pada gambar 7.

Keadaan	A	A´
1 2	B S	S B

Gerbang TIDAK (NOT)
Gambar 7.

Rangkaian logika yang membuat fungsi TIDAK disebut Inverter, suatu inverter akan menghasilkan keluaran yang berlawanan dengan variabel-variabel masukan. Jika A sebagai masukan maka A´(tidak A) akan sebagai keluaran, begitu pula sebaliknya.

2.3.6 Fungsi logika

Ketiga dasar-dasar fungsi tersebut diatas, yaitu DAN, ATAU, dan TIDAK dengan berbagai macam kombinasinya akan membentuk suatu rangkaian logika yang banyak digunakan dalam komputer maupun alat-alat elektronik lainya.

Misalnya pada masalah di bawah ini suatu rapat / forum dikatakan sah jika tiga perempat dari anggautanya hadir. Seandainya anggautanya ada 3 (tiga) orang (untuk mempermudah) maka rapat dikatakan sah jika hadir 2 orang atau 3 orang.

Pada masalah tersebut, akan suatu rangkaian logikanya.

Sebut sebagai variabel - variabelnya untuk R (Rapat sah) adalah : A,B dan C .

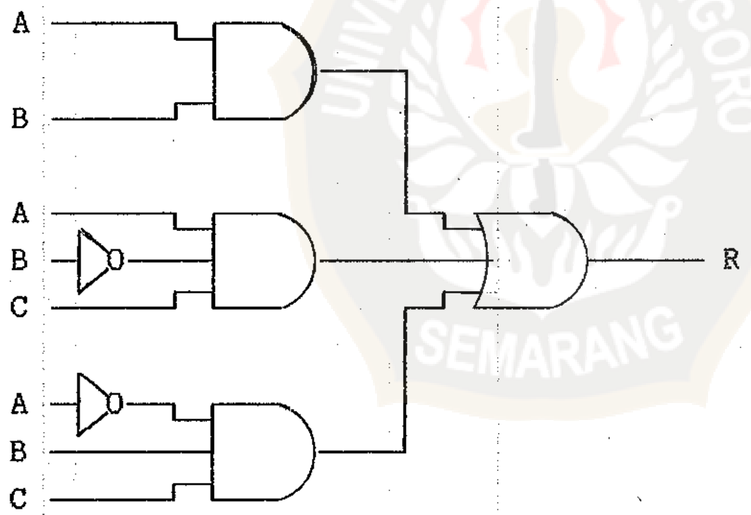
Maka fungsi logikanya adalah :

$$R = ABC + A'BC + AB'C + ABC'$$

Fungsi ini dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} R &= A\ (BC + B'C + BC') + A'BC \\ &= A\ (B(C + C) + B'C) + A'BC \\ &= AB + AB'C + A'BC \end{aligned}$$

Maka rangkaian logikanya adalah sebagai berikut :



Rangkaian logika R = AB + AB´C + A´BC
Gambar 8.

2.3.7 Fungsi XOR (Exclusive-OR)

Fungsi XOR (Exclusive-OR) adalah perluasan dari fungsi DAN, ATAU dan TIDAK.

Fungsi ini dapat diilustrasikan sebagai analogi dibawah ini.

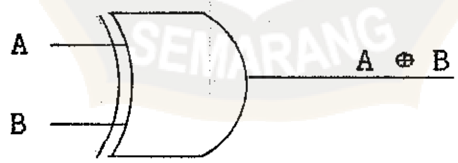
Suatu grup A , terdiri atas dua orang , yaitu Bob dan Cicilia . Untuk menyelesaikan tugas , diperlukan seorang wakil dari group tersebut ,yaitu Bob saja atau Cicilia saja ,tapi tidak kedua -

duanya .
Ungkapan ini disimbolkan sebagai $R = B \oplus C$ dengan B (Bob) yang menyelesaikan dan C (Cicilia) yang menyelesaikan.

Dalam hal ini, R akan bernilai benar jika B benar atau C benar, dan bernilai salah jika (B.C) benar atau (B′.C′) benar. Operator dari Exclusive-OR disimbolkan dengan "⊕".

Gerbang XOR dan tabel nilai kebenaran dapat dilihat pada gambar dibawah ini.

Keadaan	A	B	A ⊕ B
1	B	B	S
2	B	S	B
3	S	B	B
4	S	S	S

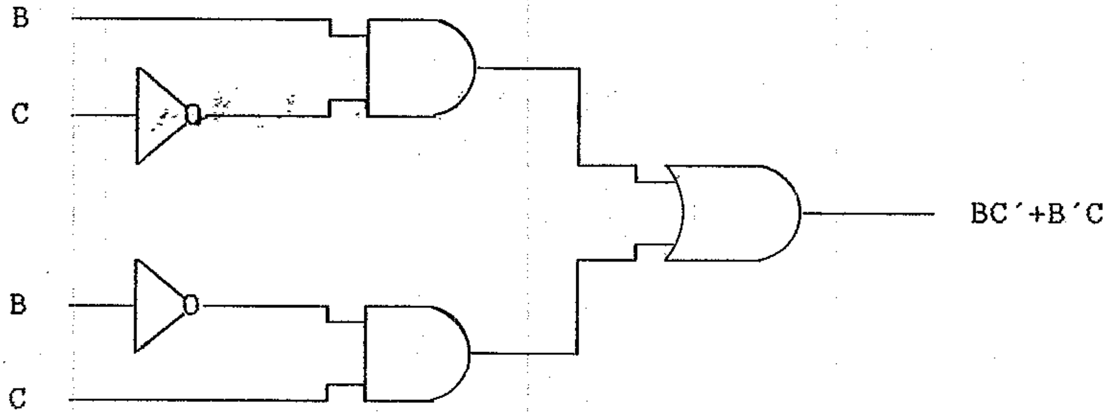


Gerbang Exclusive-OR (XOR)
Gambar 9.

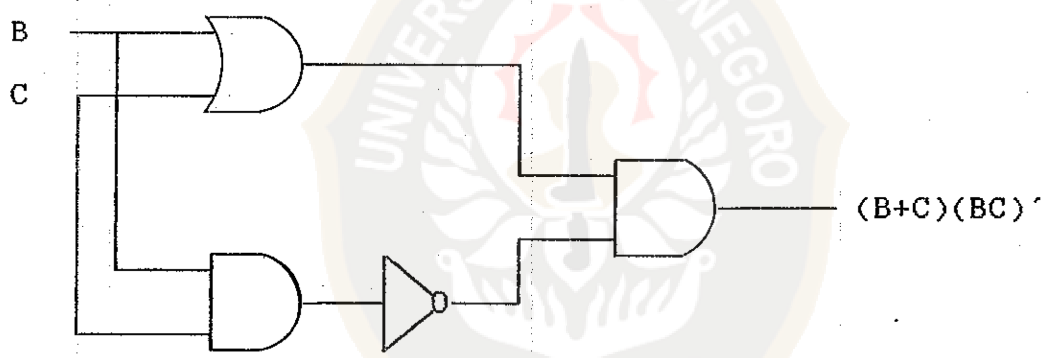
Fungsi XOR ini dapat juga dinyatakan dalam fungsi-fungsi DAN, ATAU dan TIDAK. Jika XOR dinyatakan dengan fungsi logika menjadi :

$$B \oplus C = BC' + B'C \quad \text{atau} \quad B \oplus C = (B+C)(BC)'$$

Rangkaian logikanya dapat dilihat pada gambar 10 dan 11 dibawah ini.



Rangkaian logika B ⊕ C = BC´+B´C
Gambar 10.



Rangkaian logika B ⊕ C = (B+C)(BC)´
Gambar 11.

2.3.8 Postulat-postulat,teorema-teorema serta rangkaian logikanya

Postulat-postulat, hukum-hukum dan teorema dibawah ini akam sangat berguna dalam penyederhanaan dan pemakaian dari fungsi Logika (Boole).

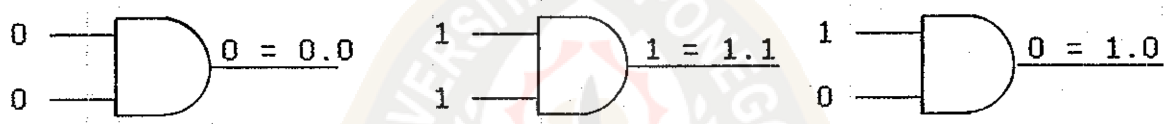
2.3.8.1 Postulat-postulat. B_2 = Aljabar logika, a ∈ B_2

1.a. a = 1 (jika a = 0)	1.b. a = 0 (jika a = 1)
2.a. 0 . 0 = 0	2.b. 0 + 0 = 0
3.a. 1 . 1 = 1	3.b. 1 + 1 = 1
4.a. 1 . 0 = 0	4.b. 1 + 0 = 1

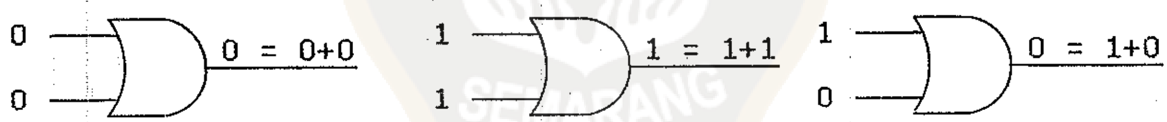
5.a. 1′ = 0   5.b. 0′ = 1

Karena postulat, dengan sendirinya harus diakui kebenarannya. Postulat 1a dan 1b menyatakan suatu variabel hanya mungkin bernilai "1" atau "0".
Sedang Postulat 2a, 3a, 4a mendefinisikan fungsi DAN.
Postulat 2b, 3b, 4b mendefinisikan fungsi ATAU.
Postulat 5a dan 5b mendefinisikan fungsi TIDAK.

Rangkaian logika dari postulat-postulat diatas dapat dilihat pada gambar - gambar di bawah ini.



Rangkaian logika dari Postulat 2a, 3a, 4a.
Gambar 12.



Rangkaian logika dari Postulat 2b, 3b, 4b.
Gambar 13.

Rangkaian logika dari postulat 5a, 5b.
Gambar 14.

2.3.8.2 Sifat-sifat aljabar logika

Sifat-sifat yang dimiliki oleh aljabar pada bilangan real juga dimiliki oleh aljabar logika. Namun harus tetap kita ingat aljabar logika hanya memiliki dua elemen.

Bila B aljabar logika a,b,c $\in$ B maka berlaku sifat-sifat

- Komutatif
  6.a. $a.b = b.a$ 6.b. $a + b = b + a$

- Assosiatif
  7.a. $a(bc) = (ab)c$ 7.b. $a + (b + c) = (a + b) + c$

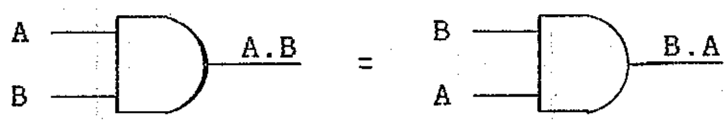
- Distributif
  8.a. $a(b + c) = ab + ac$ 8.b. $a + bc = (a + b) + (a + c)$

- Sifat komutatif ini menyatakan, pada suatu rangkaian listrik, urutan dari variabel masukan tidak mempengaruhi keluaran dari rangkaian .

- Sifat assosiatif menyatakan, pada suatu rangkaian listrik pemindahan tempat masukan, tidak mempengaruhi hasil keluaran.

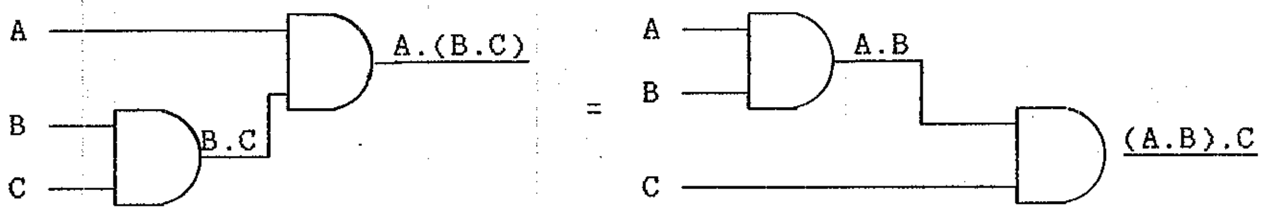
- Sifat distributif dibuktikan dengan sifat-sifat perkalian aljabar.

Rangkaian logika dapat dilihat pada gambar 15. di bawah ini.

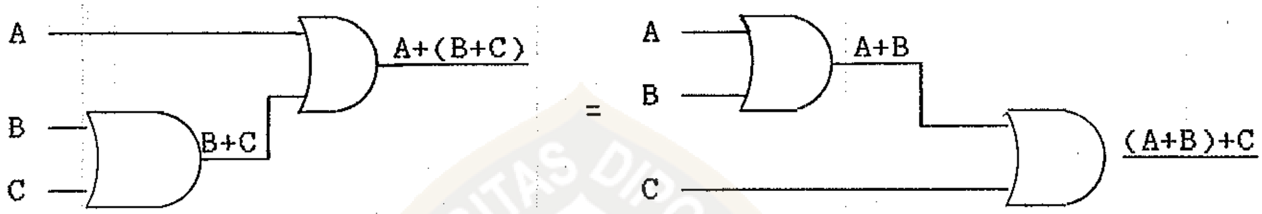


Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 6a

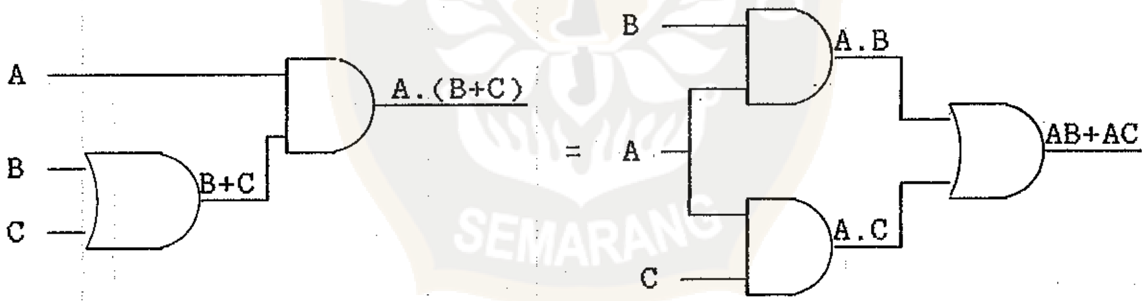
Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 6b.



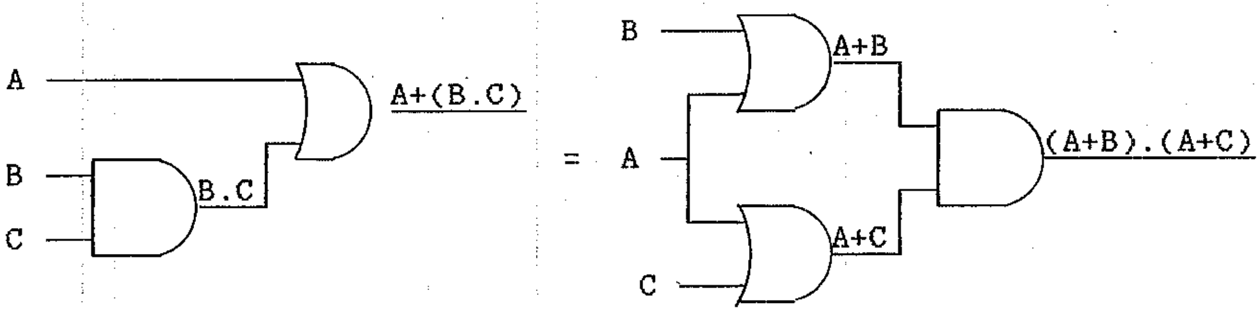
Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 7a.



Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 7b.



Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 8a.



Rangkaian logika untuk memperlihatkan sifat 8b.

Gambar 15.

2.3.8.3 Teorema-teorema

Teorema - teorema berikut mendefinisikan penggunaan operator-operator "." dan "+" pada variabel-variabel logika.

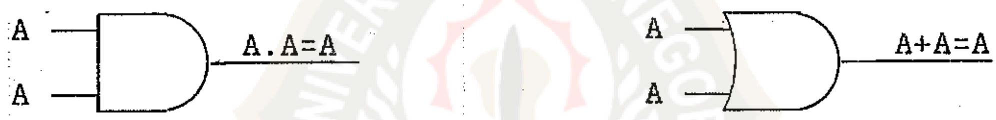
$a \cdot a = a$ dan $a + a = a$ Teorema 1

$a \cdot 0 = 0$ dan $a + 1 = 1$ Teorema 2

$a \cdot a' = 0$ dan $a + a' = 1$ Teorema 5

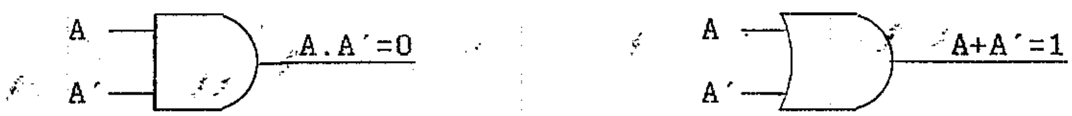
$a = (a')'$ Teorema 6

Bukti dari teorema diatas, dapat dilihat pada pasal 2.2. simbol-simbol logika dari teorema-teorema diatas adalah seperti tertera pada gambar 16.

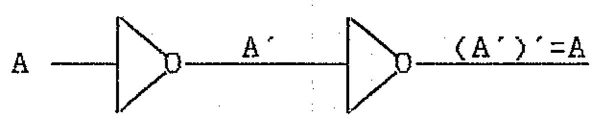


Teorema 1

Teorema 2



Teorema 5



Teorema 6

Rangkaian logika dari teorema -teorema 1,2,5 dan 6

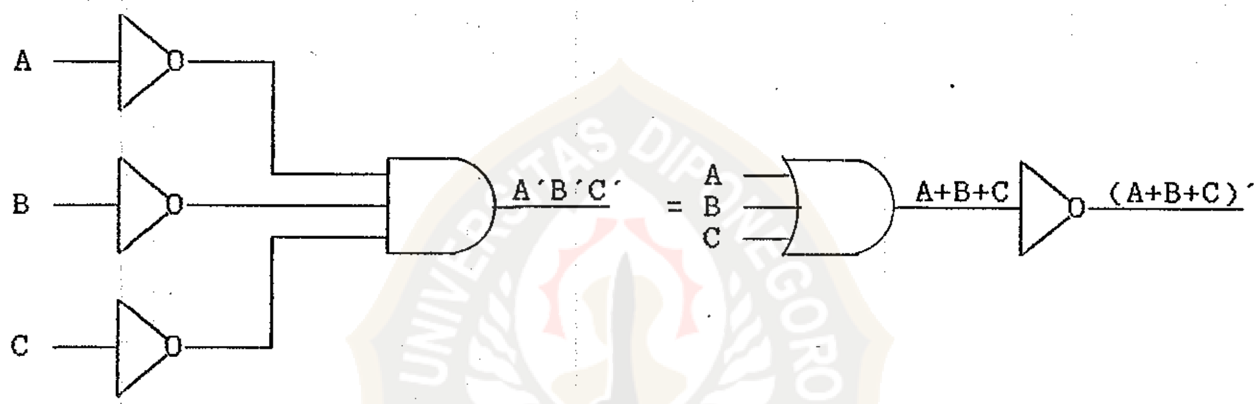
Gambar 16

Teorema De Morgan (teorema 8).

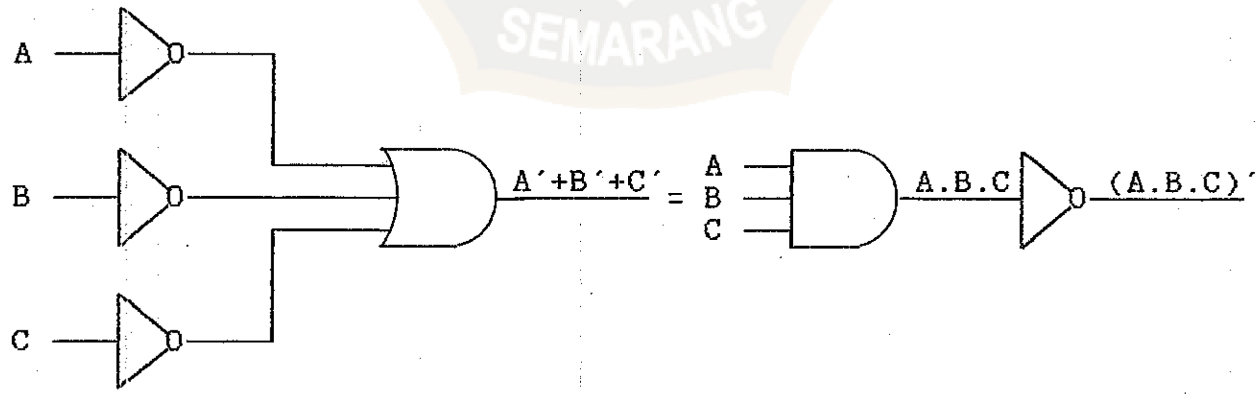
Jika a,b,c ∈ B , maka berlaku :

$a'.b'.c' = (a + b + c)'$ dan $a' + b' + c' = (a.b.c)'$

Salah satu metode penyederhanaan dari fungsi logika adalah dengan menggunakan ekwivalensi dari teorema De Morgan. Rangkaian logika teorema De Morgen adalah sebagai berikut :



Rangkaian logika $A'.B'.C' = (A + B + C)'$



Rangkaian logika $A' + B' + C' = (A.B.C)'$

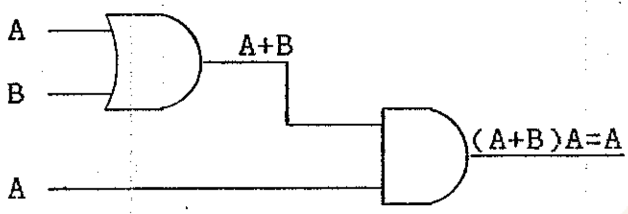
Gambar 17.

Teorema Absorption (Teorema 3).

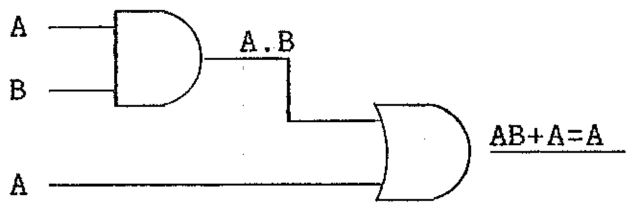
Jika a,b ∈ B , maka berlaku :

$a(a + b) = a$ dan $a + ab = a$

Pada teorema 3 dinyatakan bahwa nilai dari variabel b tidak diperlukan (mubazir) jadi keluaranya hanya bergantung dari nilai a . Keluaranya benar jika nilai a benar.
Rangkain logikanya tertera pada gambar dibawah ini.



Rangkaian logika (A + B)A = A



Rangkaian logika AB + A = A

Gambar 18.