BAB III

RUANG NORM DAN RUANG BANACH

3.1. Ruang Produk.

Definisi 3.1.1.

Misal $(X_i, \mathcal{T}_i)$ koleksi ruang topologi.

Ruang produk ditulis dengan $(X, \mathcal{T})$ dimana X himpunan produk dan merupakan topologi produk.

$X = \pi_i X_i$, X produk dari himpunan X_i.

$\mathcal{T}$ = topologi pada X yang mana semua proyeksi.

$\pi_i = X \longrightarrow X_i$ kontinu.

Contoh :

Misal himpunan – himpunan $X_1, \ldots, X_n$ ($n > 1$) dan $(X_1, P (X_1)), \ldots, (X_n, P(X_n))$ adalah ruang topologi.

Misal $\mathcal{T}$ adalah topologi produk dari topologi – topologi $P(X_1), \ldots, P(X_n)$.

Maka $\mathcal{T} = P (X_1 \times \ldots \times X_n)$

Untuk menyederhanakan tulisan, pernyataan di atas dibuktikan untuk $n = 2$.

Bukti :

$\mathcal{T} \subset P(X_1 \times X_2)$ sebaliknya, misal $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$

Maka $\{ a_1 \}$ terbuka dalam X_1

$\{ a_2 \}$ terbuka dalam X_2

Sehingga $\{(a_1, a_2)\} = \{a_1\} \times \{a_2\} \in \mathcal{T}$.

untuk $A \subset X_1 \times X_2$ sebarang didapat $A = \bigcup_{(x_1, x_2) \in A} \{(x_1, x_2)\}$

karena $\{(x_1, x_2)\} \in \mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}$ memenuhi definisi 1.1.1. no.2

disimpulkan bahwa $A \in \mathcal{T}$.

Karena $A \subset X_1 \times X_2$ sebarang disimpulkan $P(X_1 \times X_2)$.

Maka $P (X_1 \times X_2) = \mathcal{T}$

Sehingga produk dari ruang topologi $(X_1, P (X_1))$ dan $(X_2, P(X_2))$ adalah $(X_1 \times X_2, P (X_1, X_2))$.

Theorema 3.1.1.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang produk.

$a = (a_i)_{i \in I} \in X$

$V \subset X$

Maka kedua pernyataan di bawah ini ekwivalent.

1. $V \in \mathcal{N}_X (a)$
2. Ada $(V_i)_{i \in I}, V_i \in \mathcal{N}_{X_i} (a_i)$, $i \in I : \{ i, V_i \neq X_i \}$ berhingga dan $\pi_{i \in I} V_i \subset V$.

Bukti :

1) $\Longrightarrow$ 2) Diketahui $V \in \mathcal{N}_X(a) \Longrightarrow \{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga.

$V \in \mathcal{N}_X(a)$ berarti ada himpunan asal $\pi_{i \in I} V_i$ sedemikian hingga $a \in \pi_{i \in I} V_i \subset V$. Jadi V_i terbuka dan $a_i \in V_i, \forall_{i \in I}$.

Akibatnya $V_i \in \mathcal{N}_{X_i} (a_i)$.

Karena $\pi_{i \in I} V_i$ merupakan himpunan asal dan $V_i \neq X_i$.

juga $\pi_{i \in I} V_i \subset V$ maka $\{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga

2) $\Longrightarrow$ 1) Diketahui: $\{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga $\Longrightarrow V \in \mathcal{N}_X(a)$

Misal $J = \{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga.

Andaikata $\forall i \in J$, D_i = himpunan terbuka sedemikian sehingga $a_i \in D_i \subset V_i$.

Diambil $D_i = X_i$ untuk $i \in I - J$.

Karena $D_i = X_i$ maka $\pi_{i \in I} D_i$ merupakan himpunan asal

$$\text{Dari} \left. \begin{array}{l} a_i \in D_i \subset V_i \\ \pi_{i \in I} V_i \subset V \end{array} \right\} \text{maka } \pi_{i \in I} D_i \subset \pi_{i \in I} V_i \subset V.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Karena diketahui } V_i \in \mathcal{N}_{X_i} (ai) \\ \subset V \end{array} \right\} \text{sehingga } V \in \mathcal{N}_X(a)$$

Theorema 3.1.2.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang produk

$A_i \subset X_i, \forall\, i \in I$

Maka $\overline{\pi_{i\in I} \; A_i} = \pi_{i\in I} \; \overline{A_i}$.

Bukti :

Misal $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{\pi_{i\in I} \; A_i}$.

Ambil $k \in I$ dan $V_k \in \mathcal{N}_{x_k}(X_k)$ sebarang,

$V = \pi_{i\in I} \; D_i$

$D_i = X_i$ jika $i \neq k$ dan $D_k = V_k$.

Dari theorema di atas $V \in \mathcal{N}_x(x)$ sehingga

$V \cap (\pi_{i\in I} \; A_i) \neq \emptyset$. Tetapi

$V \cap (\pi_{i\in I} A_i) = \pi_{i\in I} \; D_i \cap \pi_{i\in I} \; A_i = \pi_{i\in I} \; (D_i \cap A_i) \neq \emptyset$

maka didapat $D_k \cap A_k \neq \emptyset$

$V_k \cap A_k \neq \emptyset$.

Karena $V_k \in \mathcal{N}_{x_k}(x_k)$ sebarang disimpulkan bahwa $x_k \in \overline{A_k}$.

$k \in I$ Juga sebarang maka diperoleh $x = (x_i)_{i\in I} \in \pi_{i\in I} \overline{A_i}$.

$x \in \overline{\pi_{i\in I} A_i}$ sebarang disimpulkan bahwa

$\overline{\pi_{i\in I} \; A_i} \subset \pi_{i\in I} \; \overline{A_i}$ ..... (1)

Misal $x = (x_i)_{i\in I} \in \pi_{i\in I} \; \overline{A_i}$

$V = \pi_{i\in I} D_i$ (himpunan asal yang mengandung X).

Maka $\forall\, i \in I$, D_i merupakan persekitaran dari x_i ,

dimana $D_i \cap A_i \neq \emptyset$ untuk $\forall\, i \in I$.

Maka $V \cap (\pi_{i\in I} A_i) = \pi_{i\in I} \; (D_i \cap A_i) \neq \emptyset$

Karena V sebarang disimpulkan $x \in \overline{\pi_{i\in I} \; A_i}$.

Karena $x \in \pi_{i\in I} \overline{A_i}$ sebarang maka didapat

$\pi_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\pi_{i\in I} \; A_i}$ .... (2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa

$$\overline{\pi_{i \in I} \; A_i} = \pi_{i \in I} \; \overline{A_i}$$

Dari theorema 3.1.2, didapat 3.1.2*

Jika $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, ..., $A_n \subset X_n$,

maka $\overline{A_1 \times A_2 \ldots \times A_n} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \ldots\ldots\ldots \times \overline{A_n}$

3.2. Ruang Norm.

Definisi 3.2.1.

Misalkan X merupakan suatu ruang vektor riil.

Suatu norm pada X adalah suatu pemetaan $P : X \longrightarrow R$ yang mempunyai sifat - sifat :

1. $\| x \| > 0$ dan $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \; \| x \|$. $\lambda \in R$, $x \in X$.
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, $x, y \in X$.

Contoh :

1. R merupakan himpunan semua bilangan riil Norm dari bilangan x, $x \in R$ dapat didefinisikan sebagai $\| x \| = | x |$.
2. Jika $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ sebarang elemen dari R^n maka norm x didefinisikan oleh

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}$$

3. Fungsi d atau jarak $d (x,y) = | x - y |$ dapat didefinisikan dalam norm menjadi $d(x,y) = \| x - y \|$ dengan $x, y \in X$.

Definisi 3.2.2.

Suatu pasangan (x,p) disebut ruang norm.

dimana X = suatu ruang vektor

p = suatu norm pada X.

Contoh :

Contoh :

Dari contoh di atas maka ruang norm nya adalah :

1. $(R, \|x\|)$.

2. $(X, \|x\|)$.

3. $(X, \|x - y\|)$.

Untuk selanjutnya ruang norm ditulis dengan X saja.

Theorema 3.2.1.

Jika X merupakan ruang norm, maka

a. $\varphi : (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ pada R x X ke X kontinu pada R x X.

b. $\psi : (x,y) \longmapsto x + y$ pada X x X ke X kontinu pada X x X.

Bukti :

a> Dimisalkan untuk setiap $(\lambda_o, x_o) \in R \times X$

maka untuk setiap $(\lambda, x) \in R \times X$

$$\|\varphi(\lambda,x) - \varphi(\lambda_o,x_o)\| = \|\lambda x - \lambda_o x_o\|$$
$$= \|\lambda(x-x_o) + (\lambda - \lambda_o)x_o\|$$
$$\leq |\lambda|\|x-x_o\| + |\lambda - \lambda_o| \; \|x_o\|$$

Diambil $\varepsilon > 0, \tau = \inf\{1, \varepsilon/2\|x_o\|\}$ dan $\delta = \varepsilon/2(1+|\lambda_o|)$

$U = W_\tau(\lambda_o)$

$V = W_\delta(x_o)$

$U \times V \in \mathcal{N}((\lambda_o, x_o))$

$(\lambda, x) \in U \times V$

Akibatnya $|\lambda - \lambda_o| \leq \tau$, $\|x - x_o\| \leq \delta$.

sehingga $\|\varphi(\lambda,x) - \varphi(\lambda_o,x_o)\|$

$$\leq (|1 + \lambda_o|)\|x-x_o\| + |\lambda - \lambda_o| \; \|x_o\|.$$
$$\leq (1 + |\lambda_o|)\frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda_o|)} + \frac{\varepsilon}{2\|x_o\|}\|x_o\|$$
$$= 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka φ kontinu pada (λ_o, x_o).

$(\lambda_o, x_o) \in R \times X$ sebarang, φ kontinu pada R x X

b. Misalkan $(x_o, y_o) \in X \times X$ maka $\forall (x,y) \in X \times X$

$$\| \tau(x,y) - \tau(x_o,y_o)\| = \| (x+y) - (x_o+y_o) \|.$$
$$= \| (x-x_o) + (y-y_o) \|.$$
$$\leq \| x-x_o \| + \| y-y_o \|.$$

Diambil $\varepsilon > 0$, $U = W_{\varepsilon/2}(x_o)$.

$V = W_{\varepsilon/2}(y_o)$.

Maka $U \times V \in \mathcal{N}((x_o,y_o))$

dan $(x,y) \in U \times V$

Akibatnya $\| x - x_o \| \leq \varepsilon/2$, $\| y - y_o \| \leq \varepsilon/2$.

Sehingga $\| \tau(x,y) - \tau(x_o,y_o) \| \leq \| x-x_o \| + \| y-y_o \|$

$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > o$ sebarang, maka τ kontinu pada (x_o,y_o).

$(x_o,y_o) \in X \times X$ sebarang, τ kontinu pada $X \times X$.

<u>Definisi 3.2.3.</u>

X ruang norm.

$F \subset X$ adalah ruang bagian dari X jika $(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$ pada $R \times F \longrightarrow F$ dan $(x,y) \longmapsto x + y$ pada $F \times F \longrightarrow F$

Sehingga F ruang bagian bila dan hanya bila $\varphi(R \times F) \subset F$ dan $\tau(F \times F) \subset F$.

<u>Theorema 3.2.2.</u>

Jika X ruang norm dan $F \subset X$ adalah ruang bagian maka $\overline{F}$ ruang bagian

<u>Bukti :</u>

X ruang norm dan $F \subset X$ adalah ruang bagian, menurut definisi 3.2.3. maka F ruang bagian bila dan hanya bila $\varphi(R \times F) \subset F$ dan $\tau(F \times F) \subset F$.

Dengan menggunakan theorema 3.1.2*

maka $\overline{R} \times \overline{F} = \overline{R \times F}$ sehingga $\varphi(\overline{R} \times \overline{F}) = \varphi(\overline{R \times F})$

$\overline{F} \times \overline{F} = \overline{F \times F}$ sehingga $\tau(\overline{F} \times \overline{F}) = \tau(\overline{F \times F})$.

Dengan menggunakan theorema 3.2.1.

$\varphi(\overline{R \times F}) \subset \overline{\varphi(R \times F)}$

$\psi(\overline{F \times F}) \subset \overline{\psi(F \times F)}$.

Sehingga menurut definisi 3.2.3.

$\varphi(\overline{R} \times \overline{F}) = \varphi(\overline{R \times F}) \subset \overline{\varphi(R \times F)} \subset \overline{F}$

$\psi(\overline{F} \times \overline{F}) = \psi(\overline{F \times F}) \subset \overline{\psi(F \times F)} \subset \overline{F}$

Maka $\overline{F}$ adalah ruang bagian .

Definisi 3.2.4.

(X,p) ruang norm.

(X,p) komplet jika ruang metriknya merupakan ruang metrik komplet.

Contoh :

1. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$ dengan (R^m, d_m) ruang metrik komplet.

   Norm pada R^m didefinisikan oleh $\| x \| = (\sum_{i=1}^{m} |x_i^2|)^{1/2}$

   maka dapat dibuat ruang norm komplet ($R^m, \| x \|$).

2. (X,d) ruang metrik komplet, norm pada X didefinisikan oleh $\| x \| = |x|$

   maka (X, $\| x \|$) disebut ruang norm komplet.

3.3. Ruang Banach

Definisi 3.3.1.

(X,p) disebut ruang banach jika ruang norm (x,p) komplet.

Contoh :

dari contoh definisi 3.2.3. maka didapat

1. (R^m, $\| x \|$) sebagai ruang banach.
2. (X, $\| x \|$) sebagai ruang banach.

Definisi 3.3.2.

Misal (x,p) adalah ruang norm.

$\sum_{n \in N} x_n$ merupakan deret yang dihasilkan oleh barisan $\{ x_n \}_{n \in N}$ dari elemen-elemen X.

$\sum_{n \in N} x_n$ adalah konvergen absolut jika $\sum_{n \in N} \|x_n\|$ konvergen

Theorema 3.3.1.

Jika (X,p) ruang Banach dan

$\sum_{n \in N} x_n$ konvergen absolut

maka $\sum_{n \in N} x_n$ konvergen dan $\| \sum_{n \in N} x_n \| \leq \sum_{n \in N} \| x_n \|$.

Bukti :

Untuk setiap $n \in N$

misal $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ dan $t_n = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|$.

Mengingat bahwa untuk setiap $n \in N$, $m \in N$

$$\| S_n - S_m \| \leq | t_n - t_m | .$$

Karena $\sum_{n \in N} \| x_n \|$ konvergen , barisan $(t_n)_{n \in N}$ konvergen dan merupakan barisan cauchy.

Disimpulkan bahwa $\{ S_n \}_{n \in N}$ barisan cauchy.

Karena (X,p) ruang banach, $\{ S_n \}_{n \in N}$ konvergen ke suatu titik $S \in X$. Sehingga $\sum_{n \in N} x_n$ konvergen.

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n \in N} x_n \| = \| S \| &= \lim_{n \to \infty} \| S_n \| \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \| x_j \| \\
&\leq \lim_{n \to \infty} t_n \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|
\end{aligned}$$