

BAB III

RUANG NORM DAN RUANG BANACH

3.1. Ruang Produk.

Definisi 3.1.1.

Misal (X_i, \mathcal{T}_i) koleksi ruang topologi.

Ruang produk ditulis dengan (X, \mathcal{T}) dimana X himpunan produk dan merupakan topologi produk.

$X = \prod X_i$, X produk dari himpunan X_i .

\mathcal{T} = topologi pada X yang mana semua proyeksi.

$\pi_i = X \longrightarrow X_i$ kontinu.

Contoh :

Misal himpunan - himpunan X_1, \dots, X_n ($n > 1$), dan

$(X_i, \mathcal{P}(X_i)), \dots, (X_n, \mathcal{P}(X_n))$ adalah ruang topologi.

Misal \mathcal{T} adalah topologi produk dari topologi - topologi $\mathcal{P}(X_1), \dots, \mathcal{P}(X_n)$.

Maka $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X_1 \times \dots \times X_n)$

Untuk menyederhanakan tulisan, pernyataan di atas dibuktikan untuk $n = 2$.

Bukti :

$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ sebaliknya, misal $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$

Maka $\{a_1\}$ terbuka dalam X_1

$\{a_2\}$ terbuka dalam X_2

Sehingga $\{(a_1, a_2)\} = \{a_1\} \times \{a_2\} \in \mathcal{T}$.

untuk $A \subset X_1 \times X_2$ sebarang didapat $A = \bigcup_{(x_1, x_2) \in A} \{(x_1, x_2)\}$

karena $\{(x_1, x_2)\} \in \mathcal{T}$ dan \mathcal{T} memenuhi definisi 1.1.1. no.2

disimpulkan bahwa $A \in \mathcal{T}$.

Karena $A \subset X_1 \times X_2$ sebarang disimpulkan $\mathcal{P}(X_1 \times X_2)$.

Maka $P(X_1 \times X_2) = \mathcal{U}$

Sehingga produk dari ruang topologi $(X_1, P(X_1))$ dan $(X_2, P(X_2))$ adalah $(X_1 \times X_2, P(X_1, X_2))$.

Theorema 3.1.1.

Misal (X, \mathcal{U}) ruang produk.

$a = (a_i)_{i \in I} \in X$

$V \subset X$

Maka kedua pernyataan di bawah ini ekuivalen.

1. $V \in \mathcal{N}_X(a)$
2. Ada $(V_i)_{i \in I}, V_i \in \mathcal{N}_{X_i}(a_i), i \in I : \{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga dan $\bigcap_{i \in I} V_i \subset V$.

Bukti :

1) \implies 2) Diketahui $V \in \mathcal{N}_X(a) \implies \{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga.

$V \in \mathcal{N}_X(a)$ berarti ada himpunan asal $\bigcap_{i \in I} V_i$ sedemikian hingga $a \in \bigcap_{i \in I} V_i \subset V$. Jadi V_i terbuka dan $a_i \in V_i, \forall i \in I$.

Akibatnya $V_i \in \mathcal{N}_{X_i}(a_i)$.

Karena $\bigcap_{i \in I} V_i$ merupakan himpunan asal dan $V_i \neq X_i$.

juga $\bigcap_{i \in I} V_i \subset V$ maka $\{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga

2) \implies 1) Diketahui: $\{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga $\implies V \in \mathcal{N}_X(a)$

Misal $J = \{i, V_i \neq X_i\}$ berhingga.

Andaikata $\forall i \in J, D_i =$ himpunan terbuka sedemikian sehingga $a_i \in D_i \subset V_i$.

Diambil $D_i = X_i$ untuk $i \in I - J$.

Karena $D_i = X_i$ maka $\bigcap_{i \in I} D_i$ merupakan himpunan asal

Dari $a_1 \in D_1 \subset V_1$ }
 Dari $a_2 \in D_2 \subset V_2$ }
 Dari $a_3 \in D_3 \subset V_3$ }
 Dari $a_4 \in D_4 \subset V_4$ }
 Dari $a_5 \in D_5 \subset V_5$ }
 Dari $a_6 \in D_6 \subset V_6$ }
 Dari $a_7 \in D_7 \subset V_7$ }
 Dari $a_8 \in D_8 \subset V_8$ }
 Dari $a_9 \in D_9 \subset V_9$ }
 Dari $a_{10} \in D_{10} \subset V_{10}$ }
 Dari $a_{11} \in D_{11} \subset V_{11}$ }
 Dari $a_{12} \in D_{12} \subset V_{12}$ }
 Dari $a_{13} \in D_{13} \subset V_{13}$ }
 Dari $a_{14} \in D_{14} \subset V_{14}$ }
 Dari $a_{15} \in D_{15} \subset V_{15}$ }
 Dari $a_{16} \in D_{16} \subset V_{16}$ }
 Dari $a_{17} \in D_{17} \subset V_{17}$ }
 Dari $a_{18} \in D_{18} \subset V_{18}$ }
 Dari $a_{19} \in D_{19} \subset V_{19}$ }
 Dari $a_{20} \in D_{20} \subset V_{20}$ }
 Dari $a_{21} \in D_{21} \subset V_{21}$ }
 Dari $a_{22} \in D_{22} \subset V_{22}$ }
 Dari $a_{23} \in D_{23} \subset V_{23}$ }
 Dari $a_{24} \in D_{24} \subset V_{24}$ }
 Dari $a_{25} \in D_{25} \subset V_{25}$ }
 Dari $a_{26} \in D_{26} \subset V_{26}$ }
 Dari $a_{27} \in D_{27} \subset V_{27}$ }
 Dari $a_{28} \in D_{28} \subset V_{28}$ }
 Dari $a_{29} \in D_{29} \subset V_{29}$ }
 Dari $a_{30} \in D_{30} \subset V_{30}$ }
 Dari $a_{31} \in D_{31} \subset V_{31}$ }
 Dari $a_{32} \in D_{32} \subset V_{32}$ }
 Dari $a_{33} \in D_{33} \subset V_{33}$ }
 Dari $a_{34} \in D_{34} \subset V_{34}$ }
 Dari $a_{35} \in D_{35} \subset V_{35}$ }
 Dari $a_{36} \in D_{36} \subset V_{36}$ }
 Dari $a_{37} \in D_{37} \subset V_{37}$ }
 Dari $a_{38} \in D_{38} \subset V_{38}$ }
 Dari $a_{39} \in D_{39} \subset V_{39}$ }
 Dari $a_{40} \in D_{40} \subset V_{40}$ }
 Dari $a_{41} \in D_{41} \subset V_{41}$ }
 Dari $a_{42} \in D_{42} \subset V_{42}$ }
 Dari $a_{43} \in D_{43} \subset V_{43}$ }
 Dari $a_{44} \in D_{44} \subset V_{44}$ }
 Dari $a_{45} \in D_{45} \subset V_{45}$ }
 Dari $a_{46} \in D_{46} \subset V_{46}$ }
 Dari $a_{47} \in D_{47} \subset V_{47}$ }
 Dari $a_{48} \in D_{48} \subset V_{48}$ }
 Dari $a_{49} \in D_{49} \subset V_{49}$ }
 Dari $a_{50} \in D_{50} \subset V_{50}$ }
 Dari $a_{51} \in D_{51} \subset V_{51}$ }
 Dari $a_{52} \in D_{52} \subset V_{52}$ }
 Dari $a_{53} \in D_{53} \subset V_{53}$ }
 Dari $a_{54} \in D_{54} \subset V_{54}$ }
 Dari $a_{55} \in D_{55} \subset V_{55}$ }
 Dari $a_{56} \in D_{56} \subset V_{56}$ }
 Dari $a_{57} \in D_{57} \subset V_{57}$ }
 Dari $a_{58} \in D_{58} \subset V_{58}$ }
 Dari $a_{59} \in D_{59} \subset V_{59}$ }
 Dari $a_{60} \in D_{60} \subset V_{60}$ }
 Dari $a_{61} \in D_{61} \subset V_{61}$ }
 Dari $a_{62} \in D_{62} \subset V_{62}$ }
 Dari $a_{63} \in D_{63} \subset V_{63}$ }
 Dari $a_{64} \in D_{64} \subset V_{64}$ }
 Dari $a_{65} \in D_{65} \subset V_{65}$ }
 Dari $a_{66} \in D_{66} \subset V_{66}$ }
 Dari $a_{67} \in D_{67} \subset V_{67}$ }
 Dari $a_{68} \in D_{68} \subset V_{68}$ }
 Dari $a_{69} \in D_{69} \subset V_{69}$ }
 Dari $a_{70} \in D_{70} \subset V_{70}$ }
 Dari $a_{71} \in D_{71} \subset V_{71}$ }
 Dari $a_{72} \in D_{72} \subset V_{72}$ }
 Dari $a_{73} \in D_{73} \subset V_{73}$ }
 Dari $a_{74} \in D_{74} \subset V_{74}$ }
 Dari $a_{75} \in D_{75} \subset V_{75}$ }
 Dari $a_{76} \in D_{76} \subset V_{76}$ }
 Dari $a_{77} \in D_{77} \subset V_{77}$ }
 Dari $a_{78} \in D_{78} \subset V_{78}$ }
 Dari $a_{79} \in D_{79} \subset V_{79}$ }
 Dari $a_{80} \in D_{80} \subset V_{80}$ }
 Dari $a_{81} \in D_{81} \subset V_{81}$ }
 Dari $a_{82} \in D_{82} \subset V_{82}$ }
 Dari $a_{83} \in D_{83} \subset V_{83}$ }
 Dari $a_{84} \in D_{84} \subset V_{84}$ }
 Dari $a_{85} \in D_{85} \subset V_{85}$ }
 Dari $a_{86} \in D_{86} \subset V_{86}$ }
 Dari $a_{87} \in D_{87} \subset V_{87}$ }
 Dari $a_{88} \in D_{88} \subset V_{88}$ }
 Dari $a_{89} \in D_{89} \subset V_{89}$ }
 Dari $a_{90} \in D_{90} \subset V_{90}$ }
 Dari $a_{91} \in D_{91} \subset V_{91}$ }
 Dari $a_{92} \in D_{92} \subset V_{92}$ }
 Dari $a_{93} \in D_{93} \subset V_{93}$ }
 Dari $a_{94} \in D_{94} \subset V_{94}$ }
 Dari $a_{95} \in D_{95} \subset V_{95}$ }
 Dari $a_{96} \in D_{96} \subset V_{96}$ }
 Dari $a_{97} \in D_{97} \subset V_{97}$ }
 Dari $a_{98} \in D_{98} \subset V_{98}$ }
 Dari $a_{99} \in D_{99} \subset V_{99}$ }
 Dari $a_{100} \in D_{100} \subset V_{100}$ }

Karena diketahui $V_i \in \mathcal{N}_{X_i}(a_i)$ } sehingga $V \in \mathcal{N}_X(a)$

Theorema 3.1.2.

Misal (X, \mathcal{T}) ruang produk

$$A_i \subset X_i, \forall i \in I$$

Maka $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Bukti :

Misal $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$

Ambil $k \in I$ dan $V_k \in \mathcal{N}_{x_k}(X_k)$ sebarang,

$$V = \prod_{i \in I} D_i$$

$D_i = X_i$ jika $i \neq k$ dan $D_k = V_k$.

Dari theorema di atas $V \in \mathcal{N}_x(x)$ sehingga

$V \cap (\prod_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$. Tetapi

$$V \cap (\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} D_i \cap \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} (D_i \cap A_i) \neq \emptyset$$

maka didapat $D_k \cap A_k \neq \emptyset$

$$V_k \cap A_k \neq \emptyset.$$

Karena $V_k \in \mathcal{N}_{x_k}(X_k)$ sebarang disimpulkan bahwa $x_k \in \overline{A_k}$.

$k \in I$ Juga sebarang maka diperoleh $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

$x \in \prod_{i \in I} A_i$ sebarang disimpulkan bahwa

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} \subset \prod_{i \in I} \overline{A_i} \dots \dots (1)$$

Misal $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$

$V = \prod_{i \in I} D_i$ (himpunan asal yang mengandung x).

Maka $\forall i \in I$, D_i merupakan persekitaran dari x_i ,

dimana $D_i \cap A_i \neq \emptyset$ untuk $\forall i \in I$.

$$\text{Maka } V \cap (\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} (D_i \cap A_i) \neq \emptyset$$

Karena V sebarang disimpulkan $x \in \prod_{i \in I} A_i$.

Karena $x \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ sebarang maka didapat

$$\prod_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\prod_{i \in I} A_i} \dots \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$$

Dari theorem 3.1.2, didapat 3.1.2*

Jika $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, ..., $A_n \subset X_n$,

$$\text{maka } \overline{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \dots \times \overline{A_n}$$

3.2. Ruang Norm.

Definisi 3.2.1.

Misalkan X merupakan suatu ruang vektor riil.

Suatu norm pada X adalah suatu pemetaan $P : X \rightarrow \mathbb{R}$

yang mempunyai sifat - sifat :

1. $\|x\| > 0$ dan $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

Contoh :

1. \mathbb{R} merupakan himpunan semua bilangan riil Norm dari bilangan x , $x \in \mathbb{R}$ dapat didefinisikan sebagai

$$\|x\| = |x|.$$

2. Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sebarang elemen dari \mathbb{R}^n maka norm x didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3. Fungsi d atau jarak $d(x, y) = |x - y|$ dapat didefinisikan dalam norm menjadi $d(x, y) = \|x - y\|$ dengan $x, y \in X$.

Definisi 3.2.2.

Suatu pasangan (X, p) disebut ruang norm.

Contoh :

Contoh :

Dari contoh di atas maka ruang norm nya adalah :

1. $(\mathbb{R}, \|x\|)$.
2. $(X, \|x\|)$.
3. $(X, \|x - y\|)$.

Untuk selanjutnya ruang norm ditulis dengan X saja.

Theorema 3.2.1.

Jika X merupakan ruang norm, maka

- a. $\varphi : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ pada $\mathbb{R} \times X$ ke X kontinu pada $\mathbb{R} \times X$.
- b. $\gamma : (x, y) \mapsto x + y$ pada $X \times X$ ke X kontinu pada $X \times X$.

Bukti :

a> Dimisalkan untuk setiap $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$

maka untuk setiap $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda, x) - \varphi(\lambda_0, x_0)\| &= \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \\ &= \|\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0\| \\ &\leq |\lambda| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Diambil $\varepsilon > 0, \tau = \inf\{1, \varepsilon/2\|x_0\|\}$ dan $\delta = \varepsilon/2(1 + |\lambda_0|)$

$$U = W_\tau(\lambda_0)$$

$$V = W_\delta(x_0)$$

$$U \times V \in \mathcal{N}((\lambda_0, x_0))$$

$$(\lambda, x) \in U \times V$$

Akibatnya $|\lambda - \lambda_0| \leq \tau, \|x - x_0\| \leq \delta$.

sehingga $\|\varphi(\lambda, x) - \varphi(\lambda_0, x_0)\|$

$$\leq (1 + |\lambda_0|) \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|.$$

$$\leq (1 + |\lambda_0|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda_0|)} + \frac{\varepsilon}{2\|x_0\|} \|x_0\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

This document is Undip Institutional Repository 2.1 lecture. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka φ kontinu pada (λ_0, x_0) . The author(s) or copyright

owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.

$(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ sebarang, φ kontinu pada $\mathbb{R} \times X$

b. Misalkan $(x_0, y_0) \in X \times X$ maka $\forall (x, y) \in X \times X$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(x,y) - \mathcal{T}(x_0,y_0)\| &= \|(x+y) - (x_0+y_0)\| \\ &= \|(x-x_0) + (y-y_0)\| \\ &\leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\|. \end{aligned}$$

Diambil $\varepsilon > 0$, $U = W_{\varepsilon/2}(x_0)$.

$V = W_{\varepsilon/2}(y_0)$.

Maka $U \times V \in \mathcal{N}((x_0, y_0))$.

dan $(x, y) \in U \times V$

Akibatnya $\|x - x_0\| \leq \varepsilon/2$, $\|y - y_0\| \leq \varepsilon/2$.

Sehingga $\|\mathcal{T}(x,y) - \mathcal{T}(x_0,y_0)\| \leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\|$
 $\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka \mathcal{T} kontinu pada (x_0, y_0) .

$(x_0, y_0) \in X \times X$ sebarang, \mathcal{T} kontinu pada $X \times X$.

Definisi 3.2.3.

X ruang norm.

$F \subset X$ adalah ruang bagian dari X jika $(\mathcal{T}, x) \mapsto \mathcal{T}x$ pada

$R \times F \rightarrow F$ dan $(x, y) \mapsto x + y$ pada $F \times F \rightarrow F$

Sehingga F ruang bagian bila dan hanya bila $\varphi(R \times F) \subset F$

dan $\mathcal{T}(F \times F) \subset F$.

Theorema 3.2.2.

Jika X ruang norm dan $F \subset X$ adalah ruang bagian maka \bar{F} ruang bagian

Bukti :

X ruang norm dan $F \subset X$ adalah ruang bagian, menurut definisi 3.2.3. maka F ruang bagian bila dan hanya bila

$\varphi(R \times F) \subset F$ dan $\mathcal{T}(F \times F) \subset F$.

Dengan menggunakan theorema 3.1.2*

maka $\bar{R} \times \bar{F} = \overline{R \times F}$ sehingga $\varphi(\bar{R} \times \bar{F}) = \varphi(\overline{R \times F})$

$\bar{F} \times \bar{F} = \overline{F \times F}$ sehingga $\mathcal{T}(\bar{F} \times \bar{F}) = \mathcal{T}(\overline{F \times F})$.

Dengan menggunakan theorema 3.2.1.

$$\varphi(\overline{R \times F}) \subset \overline{\varphi(R \times F)}$$

$$\tau(\overline{F \times F}) \subset \overline{\tau(F \times F)}.$$

Sehingga menurut definisi 3.2.3.

$$\varphi(\overline{R \times F}) = \varphi(\overline{R \times F}) \subset \overline{\varphi(R \times F)} \subset \overline{F}$$

$$\tau(\overline{F \times F}) = \tau(\overline{F \times F}) \subset \overline{\tau(F \times F)} \subset \overline{F}$$

Maka \overline{F} adalah ruang bagian .

Definisi 3.2.4.

(X, p) ruang norm.

(X, p) komplet jika ruang metriknya merupakan ruang metrik komplet.

Contoh :

1. $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ dengan (R^m, d_m) ruang metrik komplet.

Norm pada R^m didefinisikan oleh $\|x\| = (\sum_{i=1}^m |x_i|^2)^{1/2}$

maka dapat dibuat ruang norm komplet $(R^m, \|x\|)$.

2. (X, d) ruang metrik komplet, norm pada X didefinisikan

oleh $\|x\| = |x|$

maka $(X, \|x\|)$ disebut ruang norm komplet.

3.3. Ruang Banach

Definisi 3.3.1.

(X, p) disebut ruang banach jika ruang norm (x, p) komplet.

Contoh :

dari contoh definisi 3.2.3. maka didapat

1. $(R^m, \|x\|)$ sebagai ruang banach.
2. $(X, \|x\|)$ sebagai ruang banach.

Definisi 3.3.2.

Misal (X, p) adalah ruang norm.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ merupakan deret yang dihasilkan oleh barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dari elemen-elemen X .

$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ adalah konvergen absolut jika $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ konvergen

Theorema 3.3.1.

Jika (X, p) ruang Banach dan

$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergen absolut

maka $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergen dan $\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$.

Bukti :

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

misal $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$ dan $t_n = \sum_{j=1}^n \|x_j\|$.

Mengingat bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\|S_n - S_m\| \leq |t_n - t_m|.$$

Karena $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ konvergen, barisan $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

konvergen dan merupakan barisan cauchy.

Disimpulkan bahwa $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ barisan cauchy.

Karena (X, p) ruang banach, $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke suatu

titik $S \in X$. Sehingga $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergen.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\| &= \|S\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|x_j\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|x_j\| \end{aligned}$$