BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab I ini dibicarakan konsep - konsep yang dapat menunjang masalah-masalah yang dibahas pada bab IV. Diantara konsep - konsep itu adalah konsep tentang definisi ruang topologi, himpunan tertutup, penutup dari suatu himpunan, persekitaran dan titik limit. Kemudian sebagai pelengkap dari bab I akan ditulis pada bab II.

1.1. Definisi Ruang Topologi

Definisi 1.1.1.

Misal X adalah suatu himpunan tidak kosong.

Suatu kelas $\mathcal{T}$ yang anggotanya himpunan bagian - himpunan bagian dari X disebut topologi pada X, bila dan hanya bila memenuhi ketiga axioma berikut :

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
2. Gabungan dari himpunan-himpunan anggota $\mathcal{T}$ adalah anggota $\mathcal{T}$ pula.
3. Irisan dari dua himpunan anggota $\mathcal{T}$ adalah anggota $\mathcal{T}$.

   Anggota-anggota $\mathcal{T}$ disebut himpunan terbuka dan pasangan $(X, \mathcal{T})$ disebut ruang topologi.

Contoh :

Ambil $X = \{ a,b,c,d \}$

$$2^X = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, X \}$$

1. $\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X \}$ adalah suatu topologi pada X.

2. τ_2 = { Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}, X } adalah suatu topologi pada X.
3. τ_3 = { Ø,X } adalah suatu topologi terkecil pada X (indiscrete topologi).
4. τ_4 = 2^X adalah suatu topologi terbesar pada X (discrete topologi).
5. τ_5 = { {a}, {b}, {a,b}, X } bukan suatu topologi karena Ø $\notin$ τ_5.
6. τ_6 = { Ø , {a}, {b}, {a,b} } bukan suatu topologi karena X $\notin$ τ_6.
7. τ_7 = { Ø , {a}, {b}, {c}, X } bukan suatu topologi, karena gabungan beberapa anggota τ_7 tak ada di dalamnya.
8. τ_8 = { Ø , {b}, {b,c}, X } adalah suatu topologi pada X.
9. τ_9 = { Ø , {b}, {b,d}, X } adalah suatu topologi pada X.
10. τ_{10} = { Ø , {b}, {b,c}, {b,d}, X } bukan suatu topologi pada X,karena gabungan beberapa anggota τ_{10} tak ada di dalamnya yaitu {b,c} $\cup$ {b,d} = {b,c,d}.

    Terlihat dari contoh no. 10 bahwa gabungan dua topologi ($\tau_8 \cup \tau_9$) belum tentu merupakan suatu topologi pula.
11. τ_{11} = { Ø , {b} , X }, adalah suatu topologi pada X. Tetapi contoh no. 11 memperlihatkan irisan dari dua topologi merupakan topologi pula.

    ($\tau_{11} = \tau_8 \cap \tau_9$).

Dari contoh di atas terlihat bahwa anggota - anggota X merupakan titik dan anggota-anggota merupakan himpunan terbuka.

Sedang yang dimaksud dengan :

Topologi terkecil adalah suatu topologi yang anggotanya hanya terdiri dari himpunan X dan Ø

Topologi terbesar adalah suatu topologi yang anggotanya terdiri dari semua himpunan bagian dari X.

1.2. Himpunan Tertutup

Definisi 1.2.1.

Misal (X, $\mathcal{T}$) ruang topologi dan F $\subset$ X.

Himpunan F tertutup bila dan hanya bila F^c terbuka.

Contoh :

1. X = { a,b,c }.

   $\mathcal{T}$ = { Ø , {a}, {b}, {a,b}, X }.

   Ø , {a}, {b}, {a,b}, X merupakan himpunan terbuka di (X, $\mathcal{T}$).

   Komplemennya X, {b,c} , {a,c} , {c} . Ø merupakan himpunan tertutup.

2. X = { a,b }.

   $\mathcal{T}$ = { Ø , X }.

   himpunan terbukanya Ø dan X pada (X, $\mathcal{T}$) komplemennya X dan Ø merupakan himpunan tertutup.

3. X = { a,b }.

   $\mathcal{T}$ = { Ø , {a} , {b}, , X }.

   himpunan terbukanya Ø , {a} , {b} , X pada (X, $\mathcal{T}$) komplemennya X, {b} , {a} , Ø merupakan himpunan tertutup.

Pada topologi discrete, setiap himpunan didalamnya adalah terbuka sekaligus tertutup.

Theorema 1.2.1.

Misal ($X, \mathcal{T}$) ruang topolofgi, maka kelas dari himpunan bagian – himpunan bagian dari X memiliki sifat-sifat berikut :

1. $\emptyset$ dan X adalah himpunan tertutup.
2. Jika A_i suatu himpunan tertutup, I = himpunan terbatas maka $\bigcup_{i \in I} A_i$ juga merupakan himpunan tertutup.
3. Jika A_α merupakan himpunan tertutup, $\forall_\alpha \in I$, I = sebarang himpunan index maka $\bigcap_{\alpha \in I} A\alpha$ juga merupakan himpunan tertutup.

Bukti :

1. $\emptyset$ dan X adalah anggota topologi dan sudah diketahui merupakan himpunan terbuka. Sedangkan $\emptyset$ dan X juga merupakan komplemen dari X dan $\emptyset$.

   ($X^c = \emptyset$ dan $\emptyset^c = X$) jadi $\emptyset$ dan X adalah himpunan tertutup.
2. A_i himpunan tertutup, maka A_i^c adalah himpunan terbuka untuk $i \in I$.

   I = himpunan terbatas maka $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ adalah himpunan terbuka.

   $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$, jadi $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$ merupakan himpunan terbuka dan mengakibatkan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ adalah himpunan tertutup.
3. $A\alpha$ himpunan tertutup $\forall\ \alpha \in I$ jadi A^c_α adalah himpunan terbuka. Sehingga $\bigcup_{\alpha \in I} A^c_\alpha$ adalah himpunan terbuka.

   $\bigcup_{\alpha \in I} A^c_\alpha = (\bigcap_{\alpha \in I} A\alpha)^c$, sehingga $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ adalah himpunan terbuka. Maka $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ adalah himpunan tertutup.

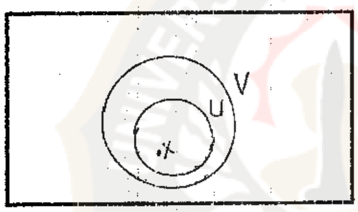
1.3. Persekitaran Dan Titik Limit.

Definisi 1.3.1.

($X, \mathcal{T}$) misalkan suatu ruang topologi.

Himpunan $V \subset X$ disebut persekitaran dari $x \in X$ jika ada himpunan $U \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$.

Dengan kata lain $V \subset X$ adalah persekitaran dari $x \in X$ bila dan hanya bila V memuat himpunan terbuka U yang memuat x.



($X, \mathcal{T}$)

$\mathcal{N}(x)$ merupakan himpunan semua persekitaran dari $x \in X$.

Untuk selanjutnya $\mathcal{N}(x)$ merupakan koleksi himpunan terbuka Dan $\mathcal{N}(x)$ dinamakan sistim persekitaran.

Contoh :

1. Diambil $\alpha \in R$, setiap interval tertutup $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ dengan pusat α merupakan persekitaran dari α.

   Karena interval tertutup $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ memuat interval terbuka $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ yang memuat α atau $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \subset [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$.

   Demikian pula jika $p \in R^2$ (p adalah suatu titik didalam bidang R^2), maka setiap cakram tertutup $\{ q \in R^2 \mid d(p,q) \le \delta = 0 \}$ dengan pusat p, merupakan persekitaran dari p karena termuatnya cakram terbuka dengan pusat p dalam cakram tertutup itu.

2. Diambil ($X, \mathcal{T}$) ruang topologi dengan

X={a,b,c,d,e} dan topologinya $\mathcal{T}$ = { X,Ø, {a} , {a,b} , {a,c} , {a,c,d} , {a,b,c,d} , {a,b,e}}.

- Persekitaran dari titik d adalah sebarang himpunan bagian dari X yang memuat himpunan terbuka dari $\mathcal{T}$ dan memuat titik d.

  Himpunan - himpunan terbuka dari $\mathcal{T}$ yang memuat titik d adalah {a,c,d} , {a,b,c,d} dan X.

  Himpunan - himpunan bagian dari X yang memuat

  {a,c,d} adalah {a,c,d} , {a,b,c,d} , {a,c,d,e} dan X.

  {a,b,c,d} adalah {a,b,c,d} dan X.

  X adalah X.

  Sehingga sistim persekitaran dari titik d adalah

  $\mathcal{N}$(d) = {{a,c,d}, {a,b,c,d}, {a,c,d,e}, X }

- Persekitaran dari titik e adalah sebarang himpunan bagian dari X yang memuat himpunan terbuka dari $\mathcal{T}$ dan memuat titik e.

  Himpunan - himpunan terbuka dari $\mathcal{T}$ yang memuat titik e adalah {a,b,e} dan X.

  Himpunan - himpunan bagian dari X yang memuat {a,b,e} adalah {a,b,e} , {a,b,e,c} , {a,b,e,d} dan X.

  X adalah X.

  sehingga sistim persekitaran dari titik e adalah $\mathcal{N}$ (e) = { {a,b,e} , {a,b,c,e} , {a,b,d,e} , X }.

Theorema 1.3.1.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi.

Apabila diketahui $A \subset X$ maka A terbuka bila dan hanya bila $A \in \mathcal{N}(t)$, $\forall\ t \in A$.

Bukti :

($\Longrightarrow$) Jika A terbuka maka A merupakan persekitaran dari setiap titik di dalamnya.

Misal sebarang titik t di dalam A, maka bisa didapat himpunan terbuka U yang memuat titik t dengan U = A.

Sehingga $t \in U \subseteq A$.

Maka sesuai dengan definisi A merupakan persekitaran dari setiap titik di dalamnya

($\Longleftarrow$) Jika A merupakan persekitaran dari setiap titik di dalamnya, maka A terbuka.

Misal $t \in A$, karena $A \in \mathcal{N}_t$ ada V_t terbuka sedemikian sehingga $t \in V_t \subset A$.

Misal $V = \bigcup_{t \in A} V_t$.

Sesuai dengan definisi topologi axioma 2 maka V terbuka.

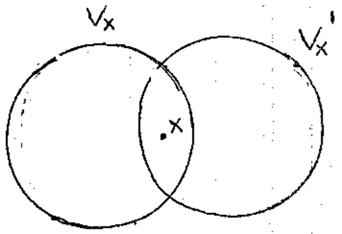
Karena $V_t \subset A$ untuk semua $t \in A$ didapat $V \subset A$. Karena untuk setiap $t \in A$, $t \in V_t$ didapat $A = V$, sehingga A terbuka.

Proposisi :

1. Setiap persekitaran V_x tidak mungkin kosong dan

x merupakan titik yang dimuat persekitaran V_x.

2. Irisan dari dua persekitaran V_x merupakan persekitaran V_x pula.



$x \in U_x \subseteq V_x$

$x \in U'_x \subseteq V'_x$

$x \in U_x \cap U'_x \subseteq V_x \cap V'_x$

Karena U_x dan U'_x terbuka maka irisan dari keduanya terbuka atau $U_x \cap U'_x$ juga terbuka (sesuai dengan axioma 3 dari topologi).

Sehingga $V_x \cap V'_x$ merupakan persekitaran dari x pula.

3. Suatu himpunan yang memuat persekitaran dari V_x adalah persekitaran dari x.

4. Apabila V_x adalah persekitaran dari x maka ada himpunan terbuka $U_x \subseteq V_x$ sedemikian sehingga V_x merupakan persekitaran dari setiap titik di U_x. (sesuai dengan theorema 1.3.1.)

<u>Definisi 1.3.2.</u>

Misal ($X, \mathcal{T}$) ruang topologi.

Titik $x \in X$ disebut titik limit dari A dimana $A \subset X$ bila dan hanya bila untuk setiap persekitaran V_x berlaku $V_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ dan untuk selanjutnya himpunan dari titik - titik limit diberi notasi A^d.

<u>Contoh :</u>

1. $X = \{a, b, c\}$.

$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X, \{a\} , \{b\} , \{a, b\} \}$.

$A = \{a\}$.

Karena $X \cap \{a\} - \{c\} = \{a\} - \{c\} \neq \emptyset$

(X merupakan satu - satunya himpunan terbuka yang memuat c).

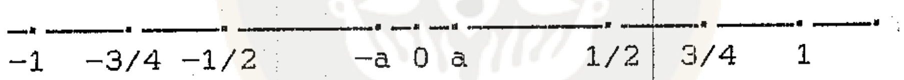
Maka titik c merupakan titik limit dari $A = \{a\}$.

2. Misal (R,U) ruang topologi.

R = himpunan bilangan riil.

$A = \{ 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\ldots. \}$.

Titik 0 adalah titik limit dari A, karena himpunan terbuka G dengan $0 \in G$ memuat interval terbuka $(-a_1, a_2) \subset G$ dengan $-a_1 < 0 < a_2$. Dimana interval terbuka itu memuat titik dari A. Tetapi titik limit 0 bukan anggota A. $A^d = \{0\}$.



3. Dalam ruang topologi ($X, \mathcal{T}$)

dengan $X = \{ a,b,c,d,e \}$.

$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X \}$ topologi indiscrete

- $A_1 = \emptyset$ maka $A_1^d = \emptyset$

- $A2 = \{ b \}$.

Kita selidiki titik - titik limit A_2 dari semua titik di X.

Untuk titik a $= X \cap \{b\} - \{a\} = \{b\} - \{a\} \neq \emptyset$

jadi a titik limit.

b $= X \cap \{b\} - \{b\} = \{b\} - \{b\} = \emptyset$

maka b bukan titik limit.

c $= X \cap \{b\} - \{c\} = \{b\} - \{c\} \neq \emptyset$

jadi c titik limit.

Dengan cara sama d dan e juga merupakan titik limit

maka $A_2^d = \{ a, c, d, e \}$.

- $A_3 = \{ a, b, c \}$.

Kita selidiki titik - titik limit A_3 dari semua titik dalam X .

Untuk titik $a = X \cap \{a,b,c\} - \{a\} = \{a,b,c\} - \{a\} = \{b,c\}$

$b = X \cap \{a,b,c\} - \{b\} = \{a,b,c\} - \{b\} = \{a,c\}$

$c = X \cap \{a,b,c\} - \{c\} = \{a,b,c\} - \{c\} = \{a,b\}$

$d = X \cap \{a,b,c\} - \{d\} = \{a,b,c\} - \{d\} \neq \emptyset$

$e = X \cap \{a,b,c\} - \{e\} = \{a,b,c\} - \{e\} \neq \emptyset$

Karena semua tidak $\emptyset$ maka semua merupakan titik limit. Jadi $A_3^d = \{a,b,c,d,e\}$.

Sifat - sifat Titik Limit.

1. Jika A subset dari B, maka setiap titik limit dari A juga merupakan titik limit dari B.

$$A \subset B \Longrightarrow A^d \subset B^d$$

Bukti :

Andaikan $p \in A^d$ maka $(V_p - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap himpunan terbuka V_p yang berisi p.

Karena $B \supset A$ maka

$(V_p - \{p\}) \cap B \supset (V_p - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

sehingga $p \in A^d$ berakibat $p \in B^d$ yaitu $A^d \subset B^d$.

Maka terbukti $A \subset B \Longrightarrow A^d \subset B^d$.

2. Andaikata $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi

$A, B \subset X$ maka $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$

Bukti :

Dari sifat no. 1 didapat

$A \subset A \cup B \Longrightarrow A^d \subset (A \cup B)^d$

$B \subset A \cup B \Longrightarrow B^d \subset (A \cup B)^d$

$A^d \cup B^d \subset (A \cup B)^d$ *)

Sekarang kita buktikan $(A \cup B)^d \subset A^d \cup B^d$

Andaikan $p \notin A^d \cup B^d$ maka $p \notin A^d$ dan $p \notin B^d$

Sehingga

$$\left.\begin{array}{l} V_p \cap A - \{p\} = \emptyset \\ \\ V_p \cap B - \{p\} = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow V_p \cap A \cup B - \{p\} = \emptyset$$

berarti $p \notin (A \cup B)^d$

Sehingga $(A \cup B)^d \subset A^d \cup B^d$ **)

Dari *) dan **) didapat $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$

3. $(A \cap B)^d \subseteq A^d \cap B^d$

Bukti :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \Longrightarrow (A \cap B)^d \subseteq A^d \\ \\ A \cap B \subseteq B \Longrightarrow (A \cap B)^d \subseteq B^d \end{array}\right\} \Longrightarrow (A \cap B)^d \subseteq A^d \cap B^d$$

1.4. Penutup Dari Suatu Himpunan

Definisi 1.4.1.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi

$A \subset (X, \mathcal{T})$

Penutup suatu himpunan A adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A dan diberi notasi $\bar{A}$. Dengan kata lain jika F_i dengan $i \in I$ adalah koleksi himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A, maka $\bar{A} = \bigcap_i F_i$.

Karena $\bar{A}$ merupakan irisan dari sebarang himpunan tertutup, maka $\bar{A}$ juga merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A maka $A \subset \overline{A} \subset F$ dan A tertutup bila dan hanya bila $A = \overline{A}$.

Contoh :

1. Misal : $X = \{a,b,c,d,e\}$

   $\mathcal{T} = \{ \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}, X\}$.

   Maka $\emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$, X adalah himpunan terbuka.

   Komplemennya X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,e\}$, $\{b,e\}, \{a\}, \emptyset$ merupakan himpunan tertutup.

   Jadi $\{\overline{b}\} = \{b,e\}$

   $\{\overline{a,c}\} = X$

   $\{\overline{b,d}\} = \{b,c,d,e\}$.

2. $X = \{a,b,c\}$.

   $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$.

   Maka himpunan tertutupnya X, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{c\}$, $\emptyset$

   Jadi $A = \{a\}$ maka $\overline{A} = \{a,c\}$

   $B = \{b\}$ maka $\overline{B} = \{b,c\}$

   $C = \{c\}$ maka $\overline{C} = \{c\}$.

3. Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi tak berhingga yaitu komplemen dari himpunan berhingga dan $\emptyset$ adalah himpunan terbuka. Maka himpunan tertutup pasti himpunan bagian dari X.

   Sehingga jika $A \subset X$ berhingga maka $\overline{A} = A$ karena A tertutup.

   Jika $A \subset X$ tak berhingga maka X hanya himpunan tertutup yang memuat A.

   Maka $\overline{A} = X$.

Theorema 1.4.1.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi dan $A \subset X$

Maka $\bar{A}$ adalah gabungan dari A sendiri dengan himpunan titik limitnya yang dinyatakan dengan
$\bar{A} = A \cup A^d$.

Bukti :

Karena A merupakan himpunan tertutup maka $A \cup A^d$, juga merupakan himpunan tertutup dan titik limitnya terletak pada $A \cup A^d$. Berarti $A \cup A^d$ merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A. Jadi $\bar{A} = A \cup A^d$.

Dalam theorema di atas diperlihatkan hubungan antara penutup suatu himpunan dengan titik limitnya.

Definisi 1.4.2.

Misal (X, $\mathcal{T}$) ruang topologi dan $A \subset X$

Theorema di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$P \in X$ disebut titik penutup dari A jika $P \in \bar{A}$ atau
$P \in X$ adalah titik penutup dari A jika $P \in A$ atau
P merupakan titik limit dari A.

Ada beberapa axioma yang dapat digunakan dan berhubungan dengan uraian di atas.

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$
2. $\bar{X} = X$
3. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
4. $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
5. A tertutup $\Longleftrightarrow \bar{A} = A$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
7. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

Bukti :

Untuk no. 1 dan no. 2 sudah jelas, karena dalam topologi $\emptyset$ dan X pasti tertutup.

Sekarang kita buktikan axioma no. 3 sampai dengan no. 7.

3. $\overline{A}$ maka himpunan penutupnya $\overline{\overline{A}}$ yang berimpit dengan dirinya sendiri yaitu $\overline{A}$ sehingga $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

atau $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup (\overline{A})^d = (A \cup A^d) \cup (A \cup A^d)^d =$

$A \cup A^d \cup A^d \cup A^{dd} = A \cup A^d = \overline{A}$.

4. Akan dibuktikan $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Dari $A \subseteq B \Longrightarrow A^d \subseteq B^d$ mengakibatkan

$\overline{A} = A \cup A^d \subseteq B \cup B^d = \overline{B}$

Jadi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Maka $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

5. A tertutup $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} = A$

($\Longrightarrow$) A tertutup, maka $A^d \subseteq A$ akibatnya

$\overline{A} = A^d \cup A = A$

($\Longleftarrow$) $\overline{A} = A$, karena $\overline{A} = A \cup A^d$ mengakibatkan

$A^d \subseteq A$ sehingga A tertutup.

6. Akan dibuktikan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)^d = A \cup B \cup A^d \cup B^d =$

$(A \cup A^d) \cup (B \cup B^d) = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. Akan dibuktikan $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

$A \cap B \subseteq A \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$

$A \cap B \subseteq B \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$

$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

1.5. Definisi Batas Atas Terkecil Dan Batas Bawah Terbesar.

Definisi . 1.5.1.

Misal $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi

$P \in X$ dinamakan batas atas terkecil dari A atau p = supremum A notasinya p = sup A, jika

1. p batas atas A
2. Jika q batas atas lain dari A maka $p < q$

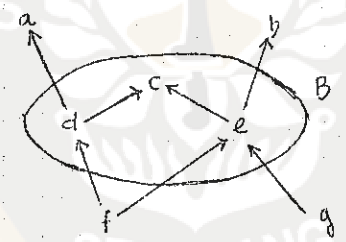
$r \in X$ dinamakan batas bawah terbesar dari A atau

r = infimum A notasinya r = inf A, jika :

1. r batas bawah A
2. Jika s batas bawah lain dari A, maka $r > s$

Contoh :

1. Misal X ={a,b,c,d,e,f,g} susunan mengikuti diagram



Misal B = {c.d.e} , maka a,b dan c batas atas B dan f batas bawah B. g bukan batas bawah B, karena g tidak mendahului d.

Selanjutnya c = sup B anggota B dan f = inf B bukan anggota B.

2. Misal Q = himpunan bilangan rasional

$$B = \{ x \mid x \in Q,\ x > 0,\ 2 < x^2 < 3 \}$$

B terdiri dari titik rasional yang mana terletak antara √2 dan √3 pada garis riil.

Maka B mempunyai tak berhingga banyak batas atas dan batas bawah, tetapi inf B dan sup B tidak ada.

Bilangan riil √2 dan √3 bukan anggota Q dan tidak dapat dianggap batas atas atau batas bawah B.

3. Misal (X, $\mathcal{T}$) ruang topologi

   A = { x | 2 < x ≤ 5 }.

   batas bawah terbesar dari A atau inf A yaitu 2 karena 2 lebih besar dari batas bawah A yang lainnya.

4. Misal (X, $\mathcal{T}$) ruang topologi.

   A = { x | x < 3 }.

   Batas atas terkecil dari A atau sup A = 3, karena 3 lebih kecil dari batas atas A yang lainnya.