BAB III

BEBERAPA METODE PENYELESAIAN MENCARI AKAR SUATU POLINOMIAL

3.1. METODE BERNOULLI.

Metode ini diperkenalkan oleh Daniel Bernoulli untuk mendapatkan akar dari persamaan polinomial :

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}X + a_n = 0 \qquad (3.1.1)$$

Dimana $a_0=1$ dan a_i, $i=1,2,\ldots,n$ adalah koeffisien dari polinomial. Bentuk dari (3.1.1) dapat dirubah kedalam bentuk persamaan defferensi menjadi :

$$a_0U_k + a_1U_{k-1} + \ldots + a_{n-1}U_{k-n+1} + a_nU_{k-n} = 0 \qquad (3.1.2)$$

dimana a_i, $i=0,1,\ldots n$ adalah koeffisien dari persamaan polinomial (3.1.1).

Jika harga akar-akar dari (3.1.1) adalah α_1, $\alpha_2,\ldots\ldots\ldots,\alpha_n$ dan jika (3.1.2) merupakan persamaan defferensi, maka penyelesaian umum yang diperoleh adalah (jika sebuah akar penyelesaian dari (3.1.2) diandaikan berbentuk $U_k = \alpha^k$, dengan demikian dapat ditemukan persamaan karakteristik untuk mendapatkan harga yang dapat diterima dari bentuk (3.1.1)) :

$$U_k = C_1\alpha_1^k + C_2\alpha_2^k + C_3\alpha_3^k + \ldots + C_n\alpha_n^k \qquad (3.1.3)$$

Jadi α_1^k, $\alpha_2^k,\ldots,\alpha_n^k$ adalah semua penyelesaian, dan ditunjukkan superposisi, (3.1.3) menunjukkan sebagian bentuk penyelesaian, dengan menganggap harga k adalah bulat. Dimana C_i, $i=1,2,3,\ldots,n$ adalah merupakan konstante yang besarnya ditentukan oleh harga-harga dari : U_0, U_1, $U_2,\ldots$ dan U_{n-1}, jika akar-akar tersebut bukan merupakan bentuk akar pengulangan. Anggapan diatas, dimisalkan besarnya akar-akar pada waktu pengurutan menunjukkan harga yang makin kecil, dimana α_1 adalah akar paling besar dari persamaan (3.1.1).

Dari (3.1.3) didapat :

$$U_k = C_1\alpha_1^{\,k}\left\{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^k + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^k\right\} \qquad (3.1.4)$$

dimana $C_1 \neq 0$, dapat ditunjukkan pada deret yang dihasilkan oleh (3.1.2), bentuk pendekatan ke k oleh $C_1\,\alpha_1^{\,k}$ dimana $k \longrightarrow \infty$, adalah merupakan perbandingan :

$$\frac{U_k}{U_{k-1}} = \frac{C_1\alpha_1^{\,k}\left\{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^k + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^k\right\}}{C_1\alpha_1^{\,k-1}\left\{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{k-1} + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{k-1} + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{k-1}\right\}}$$

$$= \alpha_1\left\{\frac{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^k + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^k}{1 + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{k-1} + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{k-1} + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{k-1}}\right\}$$

Karena α_1 adalah merupakan akar dominan (terbesar) maka berlaku :

$$\lim \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right) = 0 \text{ untuk } i=2,3,4,\ldots\ldots,n.$$

Dengan demikian maka berlaku :

$$\frac{U_k}{U_{k-1}} = \alpha_1\left\{\frac{1 + \frac{C_2}{C_1}(0) + \frac{C_3}{C_1}(0) + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}(0)}{1 + \frac{C_2}{C_1}(0) + \frac{C_3}{C_1}(0) + \cdots\cdots + \frac{C_n}{C_1}(0)}\right\}$$

Maka : $r_1 = \frac{U_k}{\quad} = \alpha_1$ (3.1.5)

Jika akar terbesar α_1 adalah riil dan bukan bentuk pengulangan dan tidak ada akar lain yang besarnya sama maka persamaan (3.1.5) diatas dapat berlaku.

Jika akar terbesar α_1 adalah merupakan bilangan kompleks, α_2 juga merupakan bilangan kompleks yang sekawan dan koeffisien dari polinomial (3.1.1) riil. Maka hasil akar-akar α_1 dan α_2 yang merupakan bilangan kompleks tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$\alpha_1 = \xi_1 + i\,\eta_1 = \beta_1 e^{i\phi_1}$$
$$\alpha_2 = \xi_1 - i\,\eta_1 = \beta_1 e^{-i\phi_1} \qquad (3.1.6)$$

dimana $\beta_1 > 0$ dan ξ_1, η_1, β_1 dan ϕ_1 adalah riil sehingga bentuk α_1 dan α_2 dapat menjadi :

$$\alpha_1^k = \beta_1^k(\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 + i\ \mathrm{Sin}\ k\,\phi_1)$$
$$\alpha_2^k = \beta_1^k(\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 - i\ \mathrm{Sin}\ k\,\phi_1)$$

Bentuk α_1 dan α_2 diatas dimasukkan dalam persamaan (3.1.3), dengan mengganti $C_1 = (C_1 + i\ C_2)/2$ dan $C_2 = (C_1 - i\ C_2)/2$, didapat :

$$U_k = \beta_1^k \frac{C_1 - C_2 i}{2}(\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 + i\ \mathrm{Sin}\ k\,\phi_1) +$$
$$\beta_1^k \frac{C_1 + i\ C_2}{2}(\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 - i\ \mathrm{Sin}\ k\,\phi_1)$$
$$= \beta_1^k\Big\{\frac{C_1}{2}\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 + \frac{iC_1}{2}\mathrm{Sin}\ k\,\phi_1 - \frac{iC_2}{2}\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 +$$
$$\frac{C_2}{2}\mathrm{Sin}\ k\,\phi_1 + \frac{C_1}{2}\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 - \frac{iC_1}{2}\mathrm{Sin}\ k\,\phi_1 +$$
$$\frac{iC_2}{2}\mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 + \frac{C_2}{2}\mathrm{Sin}\ k\,\phi_1\Big\}$$
$$= \beta_1^k\ \{\ C_1\ \mathrm{Cos}\ k\,\phi_1 + C_2\ \mathrm{Sin}\ k\,\phi_1\}$$

Jika α_1 dan α_2 bukan bentuk pengulangan dan jika ajar-akar lainnya besarnya lebih kecil dari pada β_1, ini ditunjukkan :

$$U_k \approx \beta_1^{\,k}(C_1 \mathrm{Cos}\; k\phi_1 + C_2 \mathrm{Sin}\; k\phi_1) \qquad k \longrightarrow \infty \quad (3.1.7)$$

Tetapi jika U_k yang diberikan oleh bagian sebelah kanan (3.1.7) tepat sekali maka akan memenuhi hubungan :

$$U_{k+1} - 2U_k \beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 + \beta_1^{\,2} U_{k-1} = 0 \qquad (3.1.8)$$

dan sebaliknya, dengan mudah dapat diperiksa.

Hubungan lainnya, diperlukan 2 bilangan riil yang tidak diketahui besarnya β_1 dan ϕ_1, dengan menganti k oleh k-1 didapat bentuk :

$$U_k - 2U_{k-1}\,\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 + \beta_1^{\,2} U_{k-2} = 0 \qquad (3.1.9)$$

Hasil eleminasi $\mathrm{Cos}\,\phi_1$ dari persamaan (3.1.9) dan (3.1.8) adalah :

dari (3.1.8) ; $\mathrm{Cos}\,\phi_1 = \dfrac{U_{k+1} + \beta_1^{\,2} U_{k-1}}{2\,U_k\,\beta_1}$

dari (3.1.9) ; $\mathrm{Cos}\,\phi_1 = \dfrac{U_k + \beta_1^{\,2}\,U_{k-2}}{2\,U_{k-1}\,\beta_1}$

$$\frac{U_{k+1} + \beta_1^{\,2}\,U_{k-1}}{2\,U_k\,\beta_1} = \frac{U_k + \beta_1^{\,2}\,U_{k-2}}{2\,U_{k-1}\,\beta_1}$$

$$U_{k-1}(U_{k+1} + \beta_1^{\,2} U_{k-1}) = U_k(U_k + \beta_1^{\,2} U_{k-2})$$

$$U_{k-1}U_{k+1} + \beta_1^{\,2} U_{k-1}^2 = U_k^{\,2} + \beta_1^{\,2} U_k U_{k-2}$$

$$\beta_1^{\,2}(U_{k-1}^2 - U_k U_{k-2}) = U_k^{\,2} - U_{k+1}U_{k-1}$$

$$\beta_1^{\,2}(U_{k-1}^2 - U_k U_{k-2}) = U_k^{\,2} - U_{k+1}U_{k-1} \qquad (3.1.10)$$

Dari eleminasi $\beta_1^{\,2}$ darp persamaan (3.1.8) dan (3.1.9) ,

dari (3.1.8) ; $\beta_1^{\,2} = \dfrac{2U_k\,\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_{k+1}}{U_{k-1}}$

dari (3.1.9) ; $\beta_1^{\,2} = \dfrac{2U_{k-1}\,\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_k}{U_{k-2}}$

$$\frac{2\,U_k\,\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_{k+1}}{U_{k-1}} = \frac{2U_{k-1}\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_k}{U_{k-2}}$$

$$(2U_k\,\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_{k+1})U_{k-2} = (2U_{k-1}\beta_1 \mathrm{Cos}\,\phi_1 - U_k)U_{k-1}$$

didapat :

$$2U_kU_{k-2}\beta_1\cos\phi_1 - U_{k+1}U_{k-2} = 2U_{k-1}^2\beta_1\cos\phi_1 - U_{k-1}U_k$$

didapat :

$$2(U_{k-1}^2 - 2U_kU_{k-2})\,\beta_1\cos\phi_1 = U_kU_{k-1} - U_{k+1}U_{k-2} \qquad (3.1.11)$$

Jadi, jika kita gunakan definisi :

$$V_k = U_k^{\,2} - U_{k+1}U_{k-1} \quad ; \quad t_k = U_kU_{k-1} - U_{k+1}U_{k-2} \qquad (3.1.12)$$

Dari hasil perkalian α_1 dan α_2 dari (3.1.6) didapat :

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 &= (\xi_1 + i\eta_1)(\xi_1 - i\eta_1)\\ &= \beta_1 e^{i\phi_1}\beta_1 e^{-i\phi_1}\\ &= \xi_1^{\,2} + \eta_1^{\,2} \equiv \beta_1^{\,2}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.10);(3,1,11) dan (3.1.12) menjadi :

Dari (3.1.10) dan (3.1.12) diperoleh hubungan :

$$\beta_1^{\,2} \equiv \xi_1^{\,2} + \eta_1^{\,2} = \frac{U_k^{\,2} - U_{k+1}U_{k-1}}{U_{k-1}^2 - U_kU_{k-2}}$$

Sehingga : $$\beta_1^{\,2} = \frac{V_k}{V_{k-1}} \qquad (3.1.13a)$$

Dari penjumlahan α_1 dan α_2 dari persamaan (3.1.6)

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= \xi_1 + i\eta_1 + \xi_1 - i\eta_1\\ &\equiv \beta_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1 + \cos\phi_1 - i\sin\phi_1)\\ &= 2\xi_1 = 2\beta_1\cos\phi_1\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.11) dan (3.1.12) diperoleh hubungan :

$$2\beta_1\cos\phi_1 = 2\xi_1 = \frac{U_kU_{k-1} - U_{k+1}U_{k-2}}{U_{k-1}^2 - 2U_kU_{k-2}}$$

Sehingga : $$2\beta_1\cos\phi_1 = 2\xi_1 = \frac{t_k}{V_{k-1}} \qquad (3.1.13b)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.13a) dan (3.1.13b), kecuali kalau terjadi $C_1 = C_2 = 0$ pada persamaan (3.1.3), seperti telah disebutkan bahwa C_1 dan C_2 adalah meru - pakan koeffisien dari persamaan-persamaan defferensi.

sebab dengan menggunakan pilihan harga $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ perbandingan $\frac{V_k}{V_{k-1}}$ dan $\frac{t_k}{V_{k-1}}$ dapat ditentukan untuk mendapatkan β_1^2 dan $2\beta_1 \cos\phi_1$ untuk harga $k \longrightarrow \infty$, dimana akhirnya dapat ditentukan harga β_1 dan ϕ_1 atau harga ξ_1 dan η_1, dengan demikian sepasang akar kompleks dari persamaan (3.1.6) dapat dihitung.

Jika α_1 adalah sebuah harga pengulangan akar riil, dari dua jenis akar, supaya $\alpha_2 = \alpha_1$, maka akan didapatkan bentuk hubungan α_1 dan α_2 pada (3.1.3) adalah dalam bentuk $\alpha_1^k(C_1 + C_2k)$.

Kemudian ditentukan harga U_k untuk $k \longrightarrow \infty$ dengan mengikuti hubungan U_k dibawah ini :

$$U_{k+1} - 2U_k\alpha_1 + U_{k-1}\alpha_1^2 = 0 \qquad (3.1.14)$$

dimana $k \longrightarrow \infty$.

Mengingat sebuah pendekatan untuk α_1, dimana α_1 berlaku untuk $k \longrightarrow \infty$, maka dapat ditentukan tepat satu dari dua akar dalam persamaan (3.1.14), dengan jalan mengganti k dengan k-1 dari persamaan diatas, dan eleminasi α_1^2 dari dua buah hubungan ini :

$$2\alpha_1 = \frac{t_k}{V_{k-1}} \qquad (3.1.15)$$

dengan menggunakan hasil persamaan (3.1.12).

Untuk masalah lain yang khusus, dimana beberapa akar mempunyai harga maksimum absolut sama, dapat diperoleh dengan jalan yang sama.

Kalau akar terbesar α_1 adalah riil dan bukan bentuk pengulangan dan tidak terdapat harga akar lain dengan nilai absolut sama, perbandingan r_k mendekati α_1, kecepatan dari konvergensi tergantung pada besarnya perbandingan $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ dari 2 buah akar terbesar.

persamaan (3.1.7) menunjukkan r_k mendekati harga nol. Jika $\alpha_1 = \alpha_2$ atau $\alpha_1 \approx \alpha_2$, konvergensi pada perbandingan r_k menuju α_1 dapat terjadi lamban, pada kejadian ini perbandingan $\frac{t_k}{V_{k-1}}$ akan konvergen dengan cepat pada $2\alpha_1$ atau $\alpha_1 + \alpha_2$. Dengan cara ini setelah beberapa pendekatan, biasanya akan menujukkan nilai yang benar untuk urutan ke r, dan dengan demikian diperoleh harga α_1.

Jika α_1 riil dan bukan bentuk pengulangan, keadaan yang baik akan tercapai bila $U_0, U_1, \ldots U_{n-1}$ yang diberikan itu terpilih $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$ pada persamaan (3.1.3) supaya $U_0, U_1, \ldots U_{n-1}$ sebanding dengan 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_1^{n-1}$. Perhitungan pertama dari r adalah $r_n = U_n/U_{n-1}$, sehingga akan sebanding dengan α_1. Harga-harga awal $U_0, U_1, \ldots U_{n-2}$ untuk memulai perhitungan dapat menentukan cepat tidaknya mendapatkan harga α_1. Jika tidak ada keterangan mengenai harga-harga tersebut maka diberikan sebagai berikut :

$$U_0 = U_1 = \ldots\ldots = U_{n-2} = 0 \qquad U_{n-1} = 1$$

adalah sering kali tepat digunakan. Dengan hal diatas maka mudah ditentukan bahwa jika $C_1 = 0$ maka perhitungan tidak dapat dilakukan.

Sehingga bentuk umum ke n diatas dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$U_r = -(a_1U_{r-1} + a_2U_{r-2} + \ldots + a_{r-1}U_1 + a_r) \qquad (3.1.16)$$

$$r = 1, 2, \ldots n$$

dengan $U_0 = U_{-1} = U_{-2} = \ldots = 0$

Bentuk persamaan (3.1.16) didapat dari persamaan (3.1.2) diatas dimana $r > n$.

Sehingga dalam bentuk umum dapat ditulis :

$$U_k = 0 \qquad \text{untuk } 0 \leq k < n-1$$

$$U_k = 1 \qquad \text{untuk} \quad k = n - 1$$

Kemudian untuk harga U_k, untuk $k \geqslant n$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.1.16) yaitu :

$$U_k = -(a_1U_{k-1} + a_2U_{k-2} + \cdots\cdots + a_{k-1}U_1 + a_k)$$

Besarnya k adalah tidak terbatas, hal ini disesuaikan dengan pendekatan yang diinginkan. Demikian selanjutnya proses ini berulang sehingga didapat nilai dari α_1 dan α_2 dengan menggunakan persamaan (3.1.5) dan (3.1.13a) atau (3.1.13b).

3.1.1. Program BASIC Metode Bernoulli.

Metode Bernoulli dalam program ini adalah untuk persamaan (3.1.1), walaupun hanya dapat menghasilkan dua harga akar riil.

Data untuk program ini adalah :

K = banyaknya harga pengulangan maksimum.

N = harga derajad polinomial.

NP = N + 1

KP = K + 1

EPS = bilangan positip yang sangat kecil yang digunakan untuk menguji harga persamaan polinomial setelah akarnya dimasukkan.

C(I) = Besarnya koeffisien persamaan polinomial untuk koeffisien ke I.

Program (langkah) pertama adalah membagi koeffisien C(I), I = 1,2,3,. . .,NP oleh C(1) atau oleh koeffisien C(I) dengan I = 1 dan hasil pembagian ini disebut A(1) = 1.

Setelah proses diatas selesai, langkah berikutnya adalah memberi harga U(I) dimana I = 1,2,3,...,KP.

Harga U(I), I = 1,2,...,N-1 adalah nol, untuk U(N) = 1.

Untuk perhitungan selanjutnya (J = NP, NP+1,. . . .,KP) dengan menggunakan :

$$U(J) = U(J) - \sum_{J=NP}^{KP} \sum_{I=2}^{NP} A(I)\ U(J-I+1).$$

Demikian proses diatas diulang-ulang sehingga kita dapatkan harga U(J) yang dapat digunakan untuk mencari harga α_1. Proses ini akan berhenti jika α_1 yang dihasilkan dapat memenuhi syarat, yaitu jika α_1 dapat menghasilkan besaran yang lebih kecil dari EPS pada pengujian. Kalau pengujian tersebut tidak berhasil, maka proses akan berhenti kalau pendekatan sudah sampai pada pendekatan ke KP. Harga α_1 yang dihasilkan kemudian digunakan untuk mencari harga α_2.

Program BASIC metode Bernoulli :

```
5   REM METODE MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
10  REM DENGAN METODE BERNOULLI
20  DIM U(100),A(100),B(100),C(100),KAR1(50),KAR2(5),E1(50)
35  A(1)=1
40  FPLUS=1
50  INPUT "MASUKKAN HARGA DERAJAD POLYNOMIAL          =";K
60  INPUT "MASUKKAN HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM        =";N
70  INPUT "MASUKKAN HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN =";EPS
80  KP=K+1
90  KM=K-1
100 NP1=N+1
110 NP2=N+2
120 NP3=N-2
130 ND=N-1
140 FOR I= 1 TO KP
150 INPUT "MASUKKAN HARGA KOEFISIEN PERSAMAAN C(I) =";C(I)
160 NEXT I
170 FOR I= 2 TO KP
180 A(I)=C(I)/C(1)
190 NEXT I
195 OPEN "O",#3,"lpt1"
200 PRINT#3,TAB(10);"HASIL PERHITUNGAN AKAR SUATU POLYNOMIAL"
210 PRINT#3,TAB(10);"DENGAN METODE BERNOULLI"
220 PRINT#3,TAB(10);"======================================="
230 PRINT#3,"                         "
240 PRINT#3,TAB(13);"POLYNOMIAL DERAJAD              =   ";K
250 PRINT#3,TAB(13);"PENGULANGAN MAKSIMUM            =   ";N
260 PRINT#3,TAB(13);"HARGA F(X) YANG DIIJINKAN       =   ";EPS
270 FOR I= 1 TO KP
280 PRINT#3,SPC(5);A(I);
290 NEXT I
```

```
300 FOR I= 1 TO KM
310 U(I)=0
320 NEXT I
330 U(K)=1
340 PRINT#3,TAB(5);"===================================================
350 PRINT#3,TAB(6);"K";SPC(3);"U(K)";SPC(10);"U(K)/U(K-1)";SPC(S);"E(K-1
360 PRINT#3,TAB(5);"===================================================
370 FOR I= 1 TO K
380 PRINT#3,TAB(4);I;TAB(8);U(I)
390 NEXT I
400 FOR J= KP TO NP1
405 U(J)=0
410 FOR I= 2 TO KP
420 M=J-I+1
440 U(J)=U(J)-A(I)*U(M)
450 NEXT I
470 P=J-1
480 KAR1(J)=U(J)/U(P)
490 IF J=KP GOTO 510
500 E1(J)=KAR1(J)-KAR1(P)
504 JR=J
505 IF ABS(E1(J))<EPS GOTO 535
510 PRINT#3,TAB(4);J;TAB(7);U(J);TAB(22);KAR1(J);TAB(36);E1(J)
530 NEXT J
532 JR=J-1
535 KAR(1)=KAR1(JR)
545 RJ=JR+1
550 RS=JR+2
570 FOR N= RJ TO RS
580 U(N)=0
590 FOR I= 2 TO KP
600 M=N-I+1
610 U(N)=U(N)-A(I)*U(M)
620 NEXT I
625 PRINT#3,TAB(4);N;TAB(7);U(N)
630 NEXT N
635 SR=JR-1
637 DD=U(SR):AA=U(JR):BB=U(RJ):CC=U(RS)
650 VA=AA*CC-BB^2
660 VI=DD*BB-AA^2
670 KAR=(VA/VI)
680 KAR(2)=KAR/KAR(1)
690 PRINT#3,TAB(10);"HARGA AKAR-AKARNYA : "
700 PRINT#3,"                              "
710 FOR I= 1 TO 2
720 PRINT#3,TAB(10);"AKAR (";I;") = ";KAR(I)
730 NEXT I
740 END
```

HASIL PERHITUNGAN AKAR SUATU POLYNOMIAL
DENGAN METODE BERNOULLI

POLYNOMIAL DERAJAD = 4
PENGULANGAN MAKSIMUM = 20
HARGA F(X) YANG DIIJINKAN = 9E-10

1 -10 35 -50 24

K	U(K)	U(K)/U(K-1)	E(K-1)
1	0		
2	0		
3	0		
4	1		
5	10	10	0
6	65	6.5	-3.5
7	350	5.384616	-1.115385
8	1701	4.86	-.5246153
9	7770	4.567901	-.292099
10	34105	4.389318	-.1785832
11	145750	4.273567	-.1157513
12	611501	4.195547	-7.801962E-02
13	2532530	4.141498	-5.404949E-02
14	1.039174E+07	4.103305	-3.819227E-02
15	4.235594E+07	4.075922	-2.738333E-02
16	1.717988E+08	4.056073	-1.984882E-02
17	6.943366E+08	4.041569	-1.450443E-02
18	2.798803E+09	4.030903	-1.066637E-02
19	1.125965E+10	4.023022	-7.880688E-03
20	4.523201E+10	4.017179	-5.843163E-03
21	1.815085E+11	4.012834	-4.344464E-03
22	7.277762E+11		
23	2.916332E+12		

HARGA AKAR-AKARNYA :

AKAR (1) = 4.012834
AKAR (2) = 2.991841

HASIL PERHITUNGAN AKAR SUATU POLYNOMIAL
DENGAN METODE BERNOULLI

POLYNOMIAL DERAJAD = 4
PENGULANGAN MAKSIMUM = 20
HARGA F(X) YANG DIIJINKAN = 9E-11

1 -5 9 -7 2

K	U(K)	U(K)/U(K-1)	E(K-1)
1	0		
2	0		
3	0		
4	1		
5	5	5	0
6	16	3.2	-1.8
7	42	2.625	-.5750001
8	99	2.357143	-.2678571
9	219	2.212121	-.1450217
10	466	2.127854	-8.426738E-02
11	968	2.077253	-5.060077E-02
12	1981	2.046488	-3.076553E-02
13	4017	2.027764	-1.872373E-02
14	8100	2.01643	-.0113337
15	16278	2.00963	-6.800413E-03
16	32647	2.005591	-4.039288E-03
17	65399	2.003216	-2.374172E-03
18	130918	2.001835	-1.381397E-03
19	261972	2.001039	-7.960797E-04
20	524097	2.000584	-4.546643E-04
21	1048365	2.000326	-2.579689E-04
22	2096920		
23	4194050		

HARGA AKAR-AKARNYA :

AKAR (1) = 2.000326
AKAR (2) = 1.118239

3.2 METODE MEMFAKTORKAN BERULANG-ULANG.

Metode memfaktorkan berulang-ulang suatu polinomial adalah metode mencari akar persamaan polinomial dengan jalan memecah polinomial tersebut menjadi beberapa bagian. Sehingga dengan metode ini kita dapat memperkecil derajat suatu polinomial, sehingga akan memperoleh harga akar polinomial tersebut.

Misalkan Untuk polinomial berikut ini :

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots\ldots + a_n.$$

Adalah polinomial sembarang derajat n.

Polinomial diatas dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i} \;, \quad a_0 = 1 \qquad (3.2.1)$$

Polinomial (3.2.1) diatas dapat dibagi dengan polinomial sembarang dengan derajat $m < n$, misalkan polinomial pembagi ini adalah g(X).

$$g(X) = p_0 X^m + p_1 X^{m-1} + p_2 X^{m-2} + \ldots\ldots + p_m.$$

Atau dapat ditulis :

$$g(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i X^{m-i} \;, \quad p_0 = 1 \qquad (3.2.2)$$

Dengan demikian hasil pembagian dari f(X) dengan g(X) misalkan adalah polinomial h(X) dengan sisa hasil pembagian adalah :

$$\sum_{i=0}^{m-1} r_i X^i$$

$$h(X) = b_0 X^{n-m} + b_1 X^{n-m-1} + \ldots\ldots + b_{n-m}$$

atau h(X) dapat ditulis :

$$h(X) = \sum_{i=0}^{n-m} b_i X^{n-m-i} \qquad (3.2.3)$$

Sehingga :

$$f(X) = g(X)h(X) + \sum_{i=0}^{m-1} r_i X^i$$

$$f(X) = p_0 b_0 X^n + b_0 p_1 X^{n-1} + b_0 p_2 X^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + p_m b_0 X^{n-m}$$
$$+ b_1 p_0 X^{n-1} + b_1 p_1 X^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + p_{m-1} b_1 X^{n-m} +$$
$$p_m b_1 X^{n-m-1} + \cdot\cdot\cdot + b_2 p_0 X^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + p_0 b_{n-m} X^m$$
$$+ \cdot\cdot\cdot + p_m b_{n-m} + r_0 + r_1 X + r_2 X^2 + \cdot\cdot\cdot + r_{m-1} X^{m-1}$$

Karena :

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + a_n$$

maka :

$$p_0 b_0 = a_0$$
$$p_1 b_0 + p_0 b_1 = a_1$$
$$p_2 b_0 + p_1 b_1 + p_0 b_2 = a_2$$
$$p_3 b_0 + p_2 b_1 + p_1 b_2 + p_0 b_3 = a_3$$

. . . .

. . . .

$$p_m b_0 + p_{m-1} b_1 + p_{m-2} b_2 + \cdot\cdot\cdot + p_1 b_{m-1} + p_0 b_m = a_k$$

dengan $0 \leqslant k \leqslant n$, maka dapat ditulis dalam bentuk umum menjadi :

$$\sum_{i=0}^{m} p_i b_{k-i} = a_k \text{ , } b_j = 0 \text{ untuk } j < 0 \qquad (3.2.4)$$

Kemudian harga r_i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$ dapat dihitung dengan hasil perkalian terdahulu sehingga :

$$p_m b_{n-m} + r_0 = a_n$$

Harga a_n dari persamaan (3.2.4) adalah :

$$a_n = p_0 b_n + p_1 b_{n-1} + p_2 b_{n-2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + p_m b_{n-m}$$

subsitusikan hasil diatas pada persamaan :

$$p_m b_{n-m} + r_0 = a_n$$

Sehingga :

$$p_m b_{n-m} + r_0 = p_0 b_n + p_1 b_{n-1} + p_2 b_{n-2} + \cdot\cdot\cdot + p_m b_{n-m}$$

$$r_0 = p_0 b_n + p_1 b_{n-1} + p_2 b_{n-2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + p_{m-1} b_{n-m+1}$$

$$p_{m-1} b_{n-m} + p_m b_{n-m-1} + r_1 = a_{n-1}$$

Harga a_{n-1} dari (3.2.4) adalah :

$$a_{n-1} = p_0 b_{n-1} + p_1 b_{n-2} + p_2 b_{n-3} + \dots\dots\dots + p_{m-1} b_{n-m} + p_m b_{n-m-1}$$

Sehingga setelah disubsitusikan :

$$r_1 = p_0 b_{n-1} + p_1 b_{n-2} + p_2 b_{n-3} + \dots + p_{m-2} b_{n-m+1}$$

Demikian selanjutnya sehingga dapat ditulis dalam bentuk umum menjadi :

$$r_j = \sum_{i=0}^{m-j-1} p_i b_{n-j-i} \quad , \text{ untuk } 0 \leq j \leq m-1$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.4) kita dapatkan harga b_{n-m+1} , b_{n-m+2}, ... , b_n dengan menggunakan harga p_1, p_2, p_3, ... ,p_m yang ada.

Sehingga persamaan polinomial sekarang menjadi :

$g(X) = \sum_{i=0}^{m} \rho_i X^{m-i}$, $\rho_0 = 1$ dimana harga dari $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_m)$, dan polinomial $h(X)$ dapat ditulis

$h(X) = \sum_{i=0}^{n-m} \beta_i X^{n-m-i}$ dengan $\beta_0 = 1$ dimana harga $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-m})$ diberikan oleh :

$\beta = \lim_{j \to \infty} (b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)}, \dots, b_{n-m}^{(j)})$ dimana j menunjukkan perhitungan yang ke j.

Sehingga dari (3.2.4) kita dapatkan harga $b_k^{(j)}$ dari :

$$\sum_{i=0}^{m} p_i^{(j)} b_{k-i}^{(j)} = a_k \ , \quad b_k^{(j)} = 0 \text{ untuk } k < 0 \qquad (3.2.5)$$

dimana j menyatakan harga perhitungan yang ke j.

Indeks untuk b tetap dihitung sampai ke n, walaupun harga b yang dipakai adalah sampai pada indeks yang ke n-m.

Dengan hasil dari b_k, $0 \leq k \leq n$ diatas dapat ditentukan harga p_i^{j+1}, dimana j+1 adalah pendekatan yang ke j+1 (p_i baru), $1 \leq i \leq m$.

Sebelum menghitung p_i baru diatas harus dihitung c_k^j dimana $0 \leqslant k \leqslant n$ dengan persamaan ini :

$$\sum_{i=0}^{m} p_i^{(j)} \, c_{k-i}^{(j)} = - b_k^{\,j} \tag{3.2.6}$$

dimana $c_s^{\,j} = 0$ untuk $s < 0$.

Atau,

$$p_0^{(j)} \, c_0^{(j)} = - b_0^{(j)}$$

$$p_0^{\,j} \, c_1^{\,j} + p_1^{\,j} \, c_0^{\,j} = - b_1^{(j)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_0^{\,j} \, c_k^{\,j} + p_1^{\,j} \, c_{k-1}^{\,j} + \cdots\cdots + p_m^{\,j} \, c_{k-m}^{\,j} = - b_k^{(j)}$$

Dari perhitungan c_l, $0 \leqslant l \leqslant n-m$ diatas dapat digunakan untuk menghitung harga $p_i^{\,j+1}$ atau p_i baru dengan menggunakan persamaan :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^{(j+1)} \, c_{k-i}^{(j)} = - 2 \, b_k^{(j)} - c_k^{(j)} \tag{3.2.7}$$

dengan $n-m+1 \leqslant k \leqslant n$.

Sehingga nanti didapatkan suatu persamaan linier dalam p dengan m perubah.

$$p_1^{(j+1)} \, c_{n-m}^{(j)} + p_2^{(j+1)} \, c_{n-m-1}^{(j)} + \cdots + p_m^{(j+1)} \, c_{n-2m+1}^{(j)}$$
$$= -2 \, b_{n-m+1}^{(j)} - c_{n-m+2}^{(j)}$$

$$p_1^{(j+1)} c_{n-m+1}^{(j)} + p_2^{(j+1)} \, c_{n-m}^{(j)} + \cdots + p_m^{(j+1)} c_{n-2m+2}^{(j)}$$
$$= -2 \, b_{n-m+2}^{(j)} - c_{n-m+2}^{(j)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_1^{(j+1)} c_{n-1}^{(j)} + p_2^{(j+1)} c_{n-2}^{(j)} + \cdots + p_m^{(j+1)} c_{n-m}^{(j)} = -2b_n^{(j)} - c_n^{(j)}$$

Sistem persamaan linear diatas dapat diselesaikan antara lain dengan metode Eleminasi Gauss Jordan, sehingga didapatkan $p_1^{(j+1)}$; $p_2^{(j+1)}$; $p_3^{(j+1)}$; . . . . . .; $p_m^{(j+1)}$.

Hasil dari $p_i^{(j+1)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ dan juga $p_0^{\,j+1} = 1$ digunakan untuk menghitung harga b_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ lagi, seperti diberikan dalam persamaan (3.2.1).

Demikian selanjutnya dihitung lagi harga dari c_{k-i}^{baru}, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant m$; p_i baru, $0 \leqslant i \leqslant m$, sehingga akhirnya kita dapatkan harga b_{k-i}, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant m$ dan p_i dimana $0 \leqslant i \leqslant m$ yang terakhir.

Hasil terakhir diatas yang akan digunakan dalam penyelesaian persamaan, yaitu persamaan polinomial (3.2.1) dapat dipecah menjadi :

$f(X) = g(X).h(X)$ dimana,

$$g(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i \, X^{m-i} \quad \text{dan} \quad h(X) = \sum_{i=0}^{n-m} b_i \, X^{n-m-i}$$

dimana p_i dan b_i dalam persamaan polinomial $g(X)$ dan $h(X)$ diatas adalah p_i dan b_i akhir yang dihasilkan dalam perhitungan.

3.2.1. Program BASIC Metode Memfaktorkan Berulang-ulang:

Metode memfaktorkan berulang-ulang dalam metode ini hanya memecah persamaan menjadi dua buah persamaan dengan derajad yang lebih kecil dari derajad polinomial asal.

Data untuk program ini adalah :

N = derajad dari persamaan polinomial.

M = derajad dari persamaan pembagi dimana $M < N$.

PMAX = banyaknya pengulangan maksimum yang diinginkan.

EPS = harga persamaan polinomial, dimana adalah merupakan bilangan bulat positip yang dekat dengan nol.

EPS2 = bilangan positip, dimana merupakan pembatas koeffisien B(I) dimana $I > M+1$.

A(I) = harga koeffisien persamaan polinomial, dimana $I = 1,2,3,\ldots,(N+1)$, dapat merupakan bilangan bulat atau ganjil, positip atau negatip.

P(I) = harga koeffisien persamaan pembagi dimana

$I = 1,2,\ldots,(M+1)$, $P(I)$ adalah merupakan bilangan sembarang.

Langkah yang pertama kali adalah membaca data yang diperlukan, karena koeffisien dari $A(1)$ dan $P(1)$ dalam persamaan polinomial dan persamaan pembagi belum tentu sama dengan satu, maka harus diusahakan supaya $A(1) = 1$ dan $P(1) = 1$, yaitu dengan jalan membagi koeffisien $A(I)$ dengan $A(1)$ dan juga koeffisien $P(I)$ dengan $P(1)$.

Sehingga :

$$A(I) = A(I)/A(1) \quad , \; I = 2,3,\ldots,(N+1) \qquad (3.2.8)$$

$$A(1) = 1.$$

$$P(I) = P(I)/P(1) \quad , \; I = 2,3,\ldots,(M+1) \qquad (3.2.9)$$

$$P(1) = 1.$$

Setelah harga koeffisien dari $P(I)$ dan $A(I)$ tersebut benar untuk harga $P(1)$ dan $A(1)$ maka koeffisien dari $A(I)$ dan $P(I)$ dapat digunakan untuk menghitung harga koeffisien $B(I)$ dimana merupakan hasil pembagian dari $A(I)$ dan $P(I)$. Harga $B(I)$ dapat dihitung dengan :

$$B(1) = A(1) = 1.$$

$$B(I) = A(I) - \sum_{J=2}^{I} P(J).B(I-J), \quad I < M \qquad (3.2.10)$$

$$B(I) = A(I) - \sum_{J=2}^{M+1} P(J).B(I-J), \quad I \geqslant M$$

Hasil dari $B(I)$ diatas digunakan untuk menghitung $C(I)$ yang diberikan oleh rumus perhitungan :

$$C(1) = -B(1) = -1.$$

$$C(I) = -B(I) - \sum_{J=2}^{I} P(J).C(I-J), \quad I < M \qquad (3.2.11)$$

$$C(I) = -B(I) - \sum_{J=2}^{M+1} P(J).C(I-J), \quad I \geqslant M.$$

Dalam (3.2.10) dan (3.2.11), J menyatakan jumlah indeks, dan bukan perhitungan pengulangan dari (3.2.5) dan (3.2.6)

Untuk menguji apakah perhitungan boleh dihentikan walaupun belum sampai pada pengulangan ke PMAX adalah dengan menjumlahkan harga B(N-M+1), B(N-M+2), ... B(N) dimana akan dekat dengan nol bilamana g(X) atau persamaan pembagi sudah sempurna atau benar sebagai salah satu bagian dari persamaan polinomial.
Bilamana jumlah koeffisien diatas lebih kecil atau sama dengan EPS2 maka proses akan berhenti.

$$\sum_{I=N-M+1}^{N} \left| B(I) \right| \leqslant EPS2 \qquad (3.2.12)$$

Jika pada uji (3.2.12) diatas perhitungan berhenti maka harga P(I), I=1,2,. . . .,(N+1) adalah hasil koeffisien P(I) yang terakhir.
Jika pada uji (3.2.12) tidak dapat menghentikan proses perhitungan, maka didapat persamaan linier dengan m perubah (3.2.7) untuk mendapatkan harga P(I) yang baru I = 2,3,. . . . ,(M+1), P(I) baru = P'(I) :

$$\begin{aligned}
&C(N-M)\,P'(1) + C(N-M-1)\,P'(2) + \ldots + C(N-2M+1)\,P'(M) \\
&\qquad = -(2B(N-M+1) + C(N-M+1)) \\
&C(N-M+1)\,P'(1) + C(N-M)\,P'(2) + \ldots + C(N-2M+2)\,P'(M) \\
&\qquad = -(2B(N-M+2) + C(N-M+2)) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.2.13) \\
&C(N-1)\,P'(1) + C(N-2)\,P'(2) + \ldots + C(N-M)\,P'(M) = \\
&\qquad -(2B(N) - C(N))
\end{aligned}$$

Harga C(K) dimana $K < 0$ adalah sama dengan nol, persamaan (3.2.13) diatas diselesaikan dengan Metode Gauss Jordan, persamaan (3.2.13) diatas dibuat menjadi matriks yaitu :

$$\begin{aligned}
&X(I,J) = C(N-M-J+I) \text{ untuk } N-M-J+I \geqslant 0 \\
&X(I,J) = 0 \text{ untuk } N-M-J+I < 0 \qquad (3.2.14) \\
&X(I,M+1) = -(2B(N-M+I) + C(N-M+I))
\end{aligned}$$

I = 1,2, ... M dan J = 1,2, ... M

Sehingga dari persamaan matriks yang didapat dari (3.2.14) dibuat sebagai matriks identitas, sehingga didapat harga P(I) yang baru ialah sama dengan X(I,M+1).

Atau : P(K) = P'(K)

P'(K) = X(I,M+1), I = 1,2,3,. . . . . .,M

K = 2,3,. . . . . . .,M.

P'(K) = 1.

Sehingga P(K) = X(I,M+1).

Hasil perhitungan dari P(K) diatas digunakan untuk mengerjakan pendekatan berikutnya pada persamaan (3.2.10), kemudian dilanjutkan dengan proses berikutnya sampai pendekatan terakhir seperti yang diinginkan.

Proses perhitungan ini akan berhenti jika memenuhi uji pada persamaan (3.2.12) atau jika telah sampai pada pendekatan yang diinginkan.

Program BASIC nya :

```
10   REM PROGRAM UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
20   REM DENGAN METODE MEMFAKTORKAN BERULANG-ULANG
30   REM OLEH  ARIAWAN D RACHMANTO
50   DIM A(100),B(100),C(100),P(100),X(100,100)
60   INPUT "MASUKKAN DERAJAD POLYNOMIAL                = ";N
70   INPUT "MASUKKAN DERAJAD PEMBAGI                   = ";M
80   INPUT "MASUKKAN BANYAKNYA PEMGULANGAN             = ";PMAX
90   INPUT "MASUKKAN HARGA PEMBATAS B(I)               = ";EPS
100  INPUT "MASUKKAN HARGA PERSAMAAN UNTUK P           = ";EPS2
110  NP1=N+1
120  MP1=M+1
125  OPEN "O",#3,"lpt1"
130  FOR I= 1 TO NP1
140  INPUT "MASUKKAN KOEFFISIEN DARI PERSAMAAN A(I)   = ";A(I)
150  NEXT I
160  FOR I= 1 TO MP1
170  INPUT "MASUKKAN KOEFFISIEN PEMBAGI P(I)           = ";P(I)
180  NEXT I
190  FOR I= 2 TO NP1
200  A(I)=A(I)/A(1)
210  NEXT I
220  FOR I=2 TO MP1
230  P(I)=P(I)/P(1)
```

```
240  NEXT I
250  A(1)=1:B(1)=1:C(1)=-1:P(1)=1
290  IF M<N GOTO 360
300  PRINT,TAB(10);"DATA KOEFFISIEN UNTUK PERSAMAAN PEMBAGI KURANG BENAR
310  PRINT,TAB(10);"DATA UNTUK PEMBAGI HARUS DIBENARKAN"
320  PRINT,TAB(10);"KETIK AR = 1 UNTUK KEMBALI DAN AR =0 UNTUK KELUAR"
330  INPUT "MASUKKAN HARGA AR     = ";AR
340  IF AR=1 GOTO 60
350  IF AR=0 GOTO 1150
360  PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL"
370  PRINT#3,TAB(5);"DENGAN MEMFAKTORKAN BERULANG-ULANG"
380  PRINT#3,TAB(5);"==================================="
390  PRINT#3,TAB(5);"                                    "
400  PRINT#3,TAB(10);"DERAJAD POLYNOMIAL                  = ";N
410  PRINT#3,TAB(10);"DERAJAD PERSAMAAN PEMBAGI           = ";M
420  PRINT#3,TAB(10);"BANYAKNYA PENGULANGAN               = ";PMAX
430  PRINT#3,TAB(10);"HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN      = ";EPS
440  PRINT#3,TAB(10);"HARGA PERSAMAAN PEMBAGI             = ";EPS2
450  PRINT#3,TAB(10);"HARGA KOEFFISIEN PERSAMAAN            : "
460  FOR I= 1 TO NP1
470  PRINT#3,USING " ###.####      ";A(I);
480  NEXT I
485  PRINT#3,"                    "
490  PRINT#3,TAB(10);"HARGA KOEFFISIEN PERSAMAAN PEMBAGI :"
500  FOR I=1 TO MP1
510  PRINT#3,USING " ###.####      ";P(I);
520  NEXT I
525  PRINT#3,"                    "
530  FOR R= 1 TO PMAX
540  JUM=0:K=1:P(1)=1
560  FOR I=2 TO NP1
570  B(I)=A(I)
580  IF K<MP1 THEN K=K+1
590  FOR J= 2 TO K
600  IMJ=I-J+1
620  B(I)=B(I)-P(J)*B(IMJ)
630  NEXT J
640  NP2=NP1-M
650  IF I>NP2 THEN JUM=JUM+ABS(B(I))
660  C(I)=-B(I)
670  FOR J= 2 TO K
680  IMJ=I-J+1
700  C(I)=C(I)-P(J)*C(IMJ)
710  NEXT J
720  NEXT I
725  PRINT#3,SPC(20);STRING$(40,"-")
730  PRINT#3,TAB(10);"PENDEKATAN KE  = ";R
740  PRINT#3,TAB(10);"HARGA KOEFFISIEN P(I)  : "
750  FOR I= 1 TO MP1
760  PRINT#3,USING " #####.####    ";P(I);
770  NEXT I
775  PRINT#3,"                    "
780  PRINT#3,TAB(10);"HARGA KOEFFISIEN B(I)   : "
790  FOR I=1 TO NP1
800  PRINT#3,USING " #####.####    ";B(I);
810  NEXT I
815  PRINT#3,"                    "
820  PRINT#3,TAB(10);"HARGA KOEFFISIEN C(I)   : "
830  FOR I= 1 TO NP1
840  PRINT#3,USING " #####.####    ";C(I);
850  NEXT I
855  PRINT#3,"                    "
860  IF JUM>EPS GOTO 950
870  PRINT#3,TAB(10);"MAKA PERSAMAAN DAPAT DIPECAH MENJADI : "
```

```
905  PRINT#3,SPC(5);"                    "
910  FOR I=1 TO NP1
920  PRINT#3,USING " #####.####     ";B(I);
930  NEXT I
940  GOTO 1150
950  FOR I= 1 TO M
960  FOR J= 1 TO M
970  SNMJ=N-M-J+I
980  MJI=SNMJ+1
990  X(I,J)=0
1000 IF (SNMJ>=0) THEN X(I,J)=C(MJI)
1010 NEXT J
1020 MI1=N-M+I+1
1030 X(I,MP1)=-(2*B(MI1)+C(MI1))
1040 NEXT I
1050 GOSUB 1160
1060 FOR I= 1 TO M
1070 MP1MI=MP1-I
1080 MP1M=MP1MI+1
1090 P(MP1M)=P(MP1MI)
1100 NEXT I
1110 P(1)=1
1120 NEXT R
1140 PRINT#3,TAB(10);"PEMFAKTORAN TERSEBUT TIDAK KONVERGEN "
1150 END
1160 REM **PERMULAAN PROGRAM SUBROUTIN**
1170 FOR I= 1 TO M
1175 LM=X(I,I)
1180 FOR J= I TO MP1
1190 X(I,J)=X(I,J)/LM
1200 NEXT J
1210 FOR K= 1 TO M
1220 IF K=I GOTO 1280
1230 MAL=X(K,I)
1240 FOR J= I TO MP1
1250 X(K,J)=X(K,J)-MAL*X(I,J)
1260 NEXT J
1270 X(K,I)=0
1280 NEXT K
1290 NEXT I
1300 FOR I=1 TO M
1320 P(I)=X(I,MP1)
1330 NEXT I
1340 RETURN
```

Misalkan pada persamaan dibawah ini :

$$f(X) = X^5 - 15,52773\ X^4 + 74,4186\ X^3 - 157,585\ X^2 + 141,9499\ X - 41,73524$$

$$g(X) = X^3 + 4\ X^2 + 4\ X$$

Dengan menggunakan persamaan pembagi g(X), yang derajat polinomialnya lebih kecil dari derajat polinomial f(X), maka dengan program BASIC diatas dapat dihasilkan perhitungan sebagai berikut :

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL
DENGAN MEMFAKTORKAN BERULANG-ULANG

```
     DERAJAD POLYNOMIAL                      =  5
     DERAJAD PERSAMAAN PEMBAGI               =  3
     BANYAKNYA PENGULANGAN                   =  20
     HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN          =  .002
     HARGA PERSAMAAN PEMBAGI                 =  .0004
     HARGA KOEFFISIEN PERSAMAAN                 :
1.0000      -15.5277      74.4186      %-157.5850      141.9499      -41.735

     HARGA KOEFFISIEN PERSAMAAN PEMBAGI :
1.0000       4.0000        4.0000       0.0000

     PENDEKATAN KE  =  1
     HARGA KOEFFISIEN P(I) :
 1.0000      4.0000        4.0000       0.0000
     HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
 1.0000    -19.5277      148.5294    -673.5919     2242.2000     -6316.167

     HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000     23.5277     -238.6402    1534.0420    -7423.8070     29875.230

     PENDEKATAN KE  =  2
     HARGA KOEFFISIEN P(I) :
 1.0000     -2.5277      -37.3799     -89.3999
     HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
 1.0000    -13.0000       78.9387    -354.5933     1034.1680     -3625.235

     HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000     10.4724      -89.8478     429.5428    -2370.6960      5656.751

     PENDEKATAN KE  =  3
     HARGA KOEFFISIEN P(I) :
 1.0000     -7.9859      -43.0283     -12.7326
     HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
 1.0000     -7.5418       57.2189     -12.4150     2408.8120     19389.240

     HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000     -0.4442     -103.7945    -848.3263   %-13655.2600    %-16626
0000

     PENDEKATAN KE  =  4
     HARGA KOEFFISIEN P(I) :
 1.0000     -8.5811      -15.1144      24.2310
     HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
 1.0000     -6.9466       29.9236     -30.0309      504.8510      3111.478

     HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000     -1.6346      -59.0645    -477.2835    -5453.6020    %-55692.2
)

     PENDEKATAN KE  =  5
     HARGA KOEFFISIEN P(I) :
 1.0000    -10.4723        7.4769      68.9751
     HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
 1.0000     -5.0554       14.0001     -42.1477      -55.4173     -1272.606

     HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000     -5.4169      -63.2511    -510.7613    -4446.8800    %-37114.8
```

```
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -11.8554       19.4341       49.5392
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -3.6723       11.4482       -0.0342      100.9812      588.97

       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -8.1832      -89.0288     -846.8692    -8005.3970    %-74627.
00
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  7
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -11.9436       24.4960       15.9299
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -3.5841        7.1153       -0.7362       15.9560       53.52

       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -8.3594      -82.4609     -763.4379    -6981.0020    %-63416.
00
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  8
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -11.8808       25.8838       -1.5825
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -3.6469        5.2068        0.2539        4.4234       12.48
:
       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -8.2339      -77.1487     -705.3003    -6400.0930    %-57917.
:00
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  9
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -11.5607       23.7347       -8.3302
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -3.9670        4.8225        0.6526        1.9871        5.92

       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -7.5937      -68.8759     -625.0020    -5655.9480    %-51132.
)00
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  10
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -10.7864       16.4273       -5.5167
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -4.7413        6.8498       -0.2970        0.0669        1.65
|
       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -6.0451      -55.6277     -505.9375    -4576.8530    %-41365.
500
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  11
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -10.8490       17.0809       -6.2853
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -4.6787        6.5782       -0.0158        0.0098       -0.01
5
       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
  -1.0000       -6.1702      -56.4377     -513.1674    -4642.1150    %-41951.
500
              ------------------------------------------------------

       PENDEKATAN KE  =  12
       HARGA KOEFFISIEN P(I) :
   1.0000      -10.8456       17.0568       -6.3403
       HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
   1.0000       -4.6821        6.5818        0.0000        0.0001       -0.0(
8
       HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
```

```
PENDEKATAN KE  =  13
HARGA KOEFFISIEN P(I) :
1.0000     -10.8456     17.0564     -6.3403
HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
1.0000     -4.6821      6.5819      -0.0000      0.0002      -0.0
8
HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000    -6.1635     -56.3719    -512.5997   -4637.0200   %-41905
900
-----------------------------------------------------------------
PENDEKATAN KE  =  14
HARGA KOEFFISIEN P(I) :
1.0000     -10.8454     17.0547     -6.3407
HARGA KOEFFISIEN B(I)  :
1.0000     -4.6823      6.5824       0.0000     -0.0000       0.0
?
HARGA KOEFFISIEN C(I)  :
-1.0000    -6.1631     -56.3687    -512.5721   -4636.7710   %-41903
500
MAKA PERSAMAAN DAPAT DIPECAH MENJADI :
1.0000    -10.8454     17.0547     -6.3407
1.0000     -4.6823      6.5824      0.0000      -0.0000
).0009
```

Dari hasil perhitungan dengan program BASIC diatas persamaan f(X) dapat dipecah menjadi :

$$f(X) = (X^3 - 10,8454\ X^2 + 17,0547\ X - 6,3407)\ (X^2 - 4,6823\ X + 6,5824).$$

Jika hasil perkalian diatas kita tulis adalah :

$$f(X) = X^5 - 15,5277\ X^4 + 74,418516\ X^3 - 157,58498\ X^2 + 141,94912\ X - 41,737024$$

3.3. METODE SISA HASIL BAGI RUTISHAUSER.

Metode ini adalah merupakan metode yang sangat umum, disusun oleh Stiefel, Rutishauser dan Henrici adalah merupakan modifikasi dari metode Bernoulli.

Nama yang lengkap untuk metode ini adalah Quotient Difference Algorithm, metode ini dapat digunakan untuk memperoleh akar-akar dari polinomial.

Misalkan diberikan polinomial :

$$f(X) = a_0\ X^n + a_1\ X^{n-1} + a_2\ X^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (3.3.1)$$

Bentuk dari (3.3.1) diatas seperti dalam metode Bernoulli dapat dirubah menjadi bentuk persamaan defferensi menjadi :

$$a_0 U_k + a_1 U_{k-1} + \dots\dots + a_{n-1} U_{k-n+1} + a_n U_{k-n} = 0 \qquad (3.3.2)$$

dimana a_i, $i=0,1,2,\dots\dots,n$ adalah koeffisien dari persamaan polinomial (3.3.1), harga koeffisien $a_0 = 1$. Sehingga persamaan (3.3.2) diatas menjadi :

$$U_k = -a_1 U_{k-1} - a_2 U_{k-2} - \dots\dots - a_{n-1} U_{k-n+1} - a_n U_{k-n}$$

$$U_k = -\sum_{i=1}^{n} a_i U_{k-i} \qquad (3.3.3)$$

Seperti pada metode Bernoulli dengan menganggap $U_k = 0$ untuk $k < 0$ dan $U_k = 1$ untuk $k = 0$ maka dari persamaan (3.3.3) dapat dihitung harga-harga $U_1, U_2, \dots\dots, U_m$. Atau dapat juga dengan menganggap $U_k = 0$ untuk $0 \leq k < n-1$ dan $U_k = 1$ untuk $k = n-1$ maka dapat dihitung $U_n, U_{n+1}, \dots\dots, U_m$ dimana m adalah bilangan bulat yang menunjukkan berapa kali pengulangan harus dilakukan.

Pada prinsipnya metode ini menggunakan susunan belah ketupat (rhombic) dari angka-angka $e_k^{(i)}$ dan $q_k^{(i)}$, dimana harga dari :

$$e_k^{(0)} = e_k^{(n)} = 0$$

untuk $i=1,2,3,\dots\dots,n$, n adalah merupakan derajat persamaan polinomial.

Sehingga dapat disusun seperti berikut :

K	U_k	e_k^0	q_k^1	$e_k^1 \dots\dots q_k^n$	e_k^n
0	U_0	0	q_0^1	$e_0^1 \dots\dots q_0^n$	0
1	U_1	0	q_1^1	$e_1^1 \dots\dots q_1^n$	0
2	U_2	0	q_2^1	$e_2^1 \dots\dots q_2^n$	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮
m	U_m	0	q_m^1	$e_m^1 \quad q_m^n$	0

Metode Rutishauser dibandingkan dengan metode Bernoulli adalah dengan penambahan deret-deret q_k^2, q_k^3, ... , q_k^n sehingga dapat ditemukan harga - harga $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$.

Misalkan pada persamaan polinomial (3.3.1) kita dapatkan akar-akar $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ dan harga-harga $0 < |X_1| < |X_2| < |X_3| < \ldots\ldots < |X_n|$.

Maka $\frac{1}{f(X)}$ dapat dinyatakan seperti jumlah dari bagian pecahan-pecahan :

$$\frac{1}{f(X)} = \frac{A_1}{X-X_1} + \frac{A_2}{X-X_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{X-X_n} \qquad (3.3.4)$$

Kita ambil sebuah bagian dari pecahan-pecahan tersebut, misalkan :

$$\frac{A_1}{X - X_1} = \frac{A_1}{-X_1\left(1 - \frac{X}{X_1}\right)} = -\frac{A_1}{X_1}\left(\frac{1}{1 - \frac{X}{X_1}}\right)$$

$$= -A_1\left(\frac{1}{X_1} + \frac{X}{X_1^2} + \frac{X^2}{X_1^3} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$\frac{A_2}{X - X_2} = \frac{A_2}{-X_2\left(1 - \frac{X}{X_2}\right)} = -\frac{A_2}{X_2}\left(\frac{1}{1 - \frac{X}{X_2}}\right)$$

$$= -A_2\left(\frac{1}{X_2} + \frac{X}{X_2^2} + \frac{X^2}{X_2^3} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_n}{X - X_n} = \frac{A_n}{-X_n\left(1 - \frac{X}{X_n}\right)} = -\frac{A_n}{X_n}\left(\frac{1}{1 - \frac{X}{X_n}}\right)$$

$$= -A_n\left(\frac{1}{X_n} + \frac{X}{X_n^2} + \frac{X^2}{X_n^3} + \ldots\ldots\right)$$

Sehingga harga $\frac{1}{f(X)}$ dengan mengganti $\frac{A_1}{X - X_1}$; $\frac{A_2}{X - X_2}$;

$\frac{A_3}{X - X_3}; \ldots\ldots ; \frac{A_n}{X - X_n}$ persamaan diatas menjadi :

$$\frac{1}{f(X)} = -A_1 \left(\frac{1}{X_1} + \frac{X}{X_1^{\,2}} + \frac{X^2}{X_1^{\,3}} + \ldots\ldots \right) - A_2 \left(\frac{1}{X_2} + \frac{X}{X_2^{\,2}} + \frac{X^2}{X_2^{\,3}} + \ldots\ldots \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- A_n \left(\frac{1}{X_n} + \frac{X}{X_n^{\,2}} + \frac{X^2}{X_n^{\,3}} + \ldots\ldots \right)$$

$$= - \left(\frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2} + \frac{A_3}{X_3} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{X_n} \right) - \left(\frac{A_1}{X_1^{\,2}} + \frac{A_2}{X_2^{\,2}} + \frac{A_3}{X_3^{\,2}} + \ldots\ldots \right) X - \left(\frac{A_1}{X_1^{\,3}} + \frac{A_2}{X_2^{\,3}} + \frac{A_3}{X_3^{\,3}} + \ldots\ldots \right) X^2 - \ldots\ldots - \left(\frac{A_1}{X_1^{\,n}} + \frac{A_2}{X_2^{\,n}} + \ldots\ldots \right) X^{n-1}$$

Sehingga dapat dimisalkan :

$$- \left(\frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{X_n} \right) = - \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{X_r^{\,i+1}} = \alpha_i$$

dimana $i = 0$.

$$- \left(\frac{A_1}{X_1^{\,2}} + \frac{A_2}{X_2^{\,2}} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{X_n^{\,2}} \right) = - \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{X_r^{\,i+1}} = \alpha_i$$

dimana $i = 1$.

Demikian seterusnya sehingga kita dapatkan bentuk umumnya:

$$\alpha_i = - \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{X_r^{\,i+1}} \quad \text{dimana } i = 0, 1, \ldots\ldots n.$$

Dari hasil α_i diatas maka $\frac{1}{f(X)}$ dapat ditulis menjadi :

$$\frac{1}{f(X)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \qquad (3.3.5)$$

dimana $\alpha_i = - \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{X_r^{\,i+1}}$

Kemudian kita hitung hasil bagi antara α_i dan α_{i-1} dimisalkan sebagai $q_{(i)}$:

$$q_{(i)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{\frac{A_1}{X_1^{\,i+1}} + \frac{A_2}{X_2^{\,i+1}} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{X_n^{\,i+1}}}{\frac{A_1}{X_1^{\,i}} + \frac{A_2}{X_2^{\,i}} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{X_n^{\,i}}}$$

$$= \frac{\frac{A_1}{X_1^{\,i+1}}}{\frac{A_1}{X_1^{\,i}}} \left\{ \frac{1 + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{X_1^{\,i+1}}{X_2^{\,i+1}}\right) + \cdots\cdots + \frac{A_n}{X_n^{\,i+1}}\,\frac{X_1^{\,i+1}}{A_1}}{1 + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{A_1}\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}} \right\}$$

Karena $0 < |X_1| < |X_2| < \cdots\cdots < |X_n|$ dengan demikian maka $\frac{X_1}{X_n} < 1$

Sehingga berlaku :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1}{X_n} = 0 \text{ untuk } n = 2, 3, \ldots\ldots n.$$

Maka dapat ditemukan hasil :

$$\lim_{i \to \infty} q_{(i)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{\frac{1}{X_1}\left(\frac{A_1}{X_1^{\,i}}\right)}{\frac{A_1}{X_1^{\,i}}} = \frac{1}{X_1}$$

Sehingga : $\lim_{i \to \infty} q_{(i)} = \frac{1}{X_1}$ (3.3.6)

$$\frac{1}{X_1} - q_{(i)} = \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_1}\left\{ \frac{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+1} + \cdots\cdots}{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots} \right.$$

$$\left.\frac{\cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i+1}}{\cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}}\right\}$$

$$= \frac{1}{X_1}\left\{1 - \frac{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+1} + \cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i+1}}{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}}\right\}$$

$$= \frac{1}{X_1}\left\{\frac{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i} - 1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+1} - \cdots\cdots - \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i+1}}{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}}\right\}$$

$$= \frac{1}{X_1}\left\{\frac{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i} - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+1} - \cdots\cdots - \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i+1}}{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}}\right\}$$

$$\frac{\frac{1}{X_1} - q_{(i)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i}} = \frac{1}{X_1}\left\{\frac{\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i}\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}\left(1 - \frac{X_1}{X_n}\right)}{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i} + \cdots\cdots\cdots + \left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^{i}}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{i}\right\}$$

$$= \frac{1}{X_1}\left\{ \frac{\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right)+\frac{A_3}{A_1}\left(\frac{X_2}{X_3}\right)^i\left(1-\frac{X_1}{X_3}\right)}{1+\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i+\cdots\cdots\cdots} \right.$$

$$\frac{+\cdots\cdots+\left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_2}{X_n}\right)^i\left(1-\frac{X_1}{X_n}\right)}{\cdots+\left(\frac{A_n}{A_1}\right)\left(\frac{X_1}{X_n}\right)^i}$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{X_1}-q_{(i)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i} = \frac{1}{X_1}\left\{\frac{\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right)+\frac{A_3}{A_1}\,0}{1+0+0+\cdots} \right.$$

$$\left.\frac{0+0+\cdots 0}{\cdots\cdots+0}\right\}$$

$$= \frac{1}{X_1}\,\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right) \qquad (3.3.7)$$

Jika kita ganti i dengan i+1, akan didapatkan :

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{X_1}-q_{(i+1)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+1}} = \frac{1}{X_1}\,\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right)$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{X_1}-q_{(i+1)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i}} = \frac{1}{X_1}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right)$$

Sehingga :

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{X_1}-q_{(i+1)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i}} = \left(\frac{1}{X_2}\right)\frac{A_2}{A_1}\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right) \qquad (3.3.8)$$

Untuk i diganti dengan i+2 maka :

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{1}{X_1}-q_{(i+2)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{i+2}} = \frac{1}{X_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1-\frac{X_1}{X_2}\right)$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\frac{1}{X_1} - q_{(i+2)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i} = \frac{1}{X_1}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)$$

Sehingga diperoleh :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\frac{1}{X_1} - q_{(i+2)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i} = \frac{X_1}{X_2^2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right) \tag{3.3.9}$$

Hasil pengurangan persamaan (3.3.7) dan (3.3.8) akan mendapatkan hasil :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{q_{(i+1)} - q_{(i)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i} = \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}\right)\frac{A_2}{A_1}\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{q_{(i+2)} - q_{(i+1)}}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^i} = \frac{1}{X_2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right) - \frac{X_1}{X_2^2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)$$

$$= \left(\frac{X_2 - X_1}{X_2^2}\right)\frac{A_2}{A_1}\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)$$

Bila $e_{(i)} = q_{(i+1)} - q_{(i)}$ dan $e_{(i+1)} = q_{(i+2)} - q_{(i+1)}$

maka diperoleh :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{(i+1)}}{e_{(i)}} = \frac{\frac{X_2 - X_1}{X_2^2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}\right)\frac{A_2}{A_1}\left(1 - \frac{X_1}{X_2}\right)}$$

$$= \frac{X_2 - X_1}{X_2^2} \quad \frac{X_1 X_2}{X_2 - X_1} = \frac{X_1}{X_2}$$

Maka diperoleh :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{(i+1)}}{e_{(i)}} = \frac{X_1}{X_2} \tag{3.3.10}$$

Dari persamaan (3.3.6) menghasilkan akar pertama X_1, sementara harga akar kedua X_2 diperoleh dengan mengeleminasi X_1 dalam (3.3.10).

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{(i+1)}}{e_{(i)}} q_{(i+1)} = \frac{X_1}{X_2} \frac{1}{X_1}$$

$$\therefore \lim_{i \to \infty} \frac{e_{(i+1)}}{e_{(i)}} q_{(i+1)} = \frac{1}{X_2} \qquad (3.3.11)$$

Jika persamaan (3.3.11) ini untuk harga q dan e diberi harga index 1,2,. . . .,n sehingga diperoleh :

$$\frac{e^1_{(i+1)}}{e^1_i} q^1_{(i+1)} = q^2_i \qquad (3.3.12)$$

Dimana $\lim\limits_{i \to \infty} q^1_i = \frac{1}{X_1}$ dan $\lim\limits_{i \to \infty} q^2_i = \frac{1}{X_2}$.

Setelah kita hitung harga q^2_i, dimana $0 < i < k$ maka akan kita hitung e^2_i yaitu dengan menggunakan persamaan :

$$e^1_i = q^1_{i+1} - q^1_i$$

$$e^1_i = q^1_{i+1} - q^1_i + 0$$

Karena harga $e^0_1 = e^0_2 = ... = e^0_k = 0$ maka,

$$e^1_i = q^1_{i+1} - q^1_i + e^0_{i+1}$$

Dengan hasil diatas untuk harga e^2_i dapat dihitung dengan menggunakan persamaan :

$$e^2_i = q^2_{i+1} - q^2_i + e^1_{i+1} \qquad (3.3.13)$$

Demikian kemudian kita hitung lagi harga-harga q^3_i, e^3_i, q^4_i, e^4_i, ..., q^n_i, e^n_i dimana harga $0 < i \leq k$.

Sehingga bentuk umumnya dapat ditulis :

$$e^n_k = \left\{ q^n_{k+1} - q^n_k \right\} + e^{n-1}_{k+1} \qquad (3.3.14)$$

$$\text{dan} \quad q^{(n+1)}_k \; e^n_k = e^n_{k+1} \; q^n_{k+1}$$

Seperti dalam metode Bernoulli, untuk harga q^1_k dapat dihitung dengan :

$$q^1_k = \frac{U_{k+1}}{U_k}$$

Harga-harga akar $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ akan didapat pada kolom q_k^n dimana harga $|e_k^n|$ lebih kecil atau sama dengan harga persamaan yang diijinkan (bilangan yang paling dekat dengan harga nol).

Sehingga deret dari q_k^n dan e_k^n dapat ditulis sebagai hubungan belah ketupat (rhombic) yaitu dalam sebuah belah ketupat dengan sebuah elemen e dipuncak, hasil kali dari dua elemen q dan e adalah sama dengan hasil kali dua elemen q dan e lainnya.

Jumlahan elemen q dan e, dengan elemen q dipuncak adalah sama dengan jumlah elemen q dan e lainnya.

3.3.1. Program BASIC Metode Sisa Hasil Bagi Rutishauser.

Metode Sisa hasil bagi Rutishauser dalam program ini adalah untuk persamaan (3.3.1), dimana data yang diperlukan untuk program ini ialah :

K = banyaknya harga pengulangan yang diinginkan.

N = harga derajad polinomial.

NP = N + 1

KP = K + 1

EPS = bilangan positip yang sangat kecil dekat dengan nol yang digunakan untuk menguji harga e_k^n.

A(I) = besarnya koeffisien polinomial untuk koeffisien ke I.

Program (langkah) pertama adalah membagi koeffisien A(I), I=1,2,3,. . . .,NP dengan A(1) sehingga akan menghasilkan harga A(1) = 1. Setelah proses pembagian diatas langkah berikutnya adalah memberi harga U(J) = 0 untuk J=1,2,3,. . . .,N-1 dan U(N)=1 atau dapat juga dengan U(J) = 0 untuk J 0 dan U(0) = 1.

Proses selanjutnya adalah menghitung harga $U(J)$ dimana digunakan perhitungan :

$$U(J) = U(J) - \sum_{J=NP}^{KP} \sum_{I=2}^{NP} A(I)\ U(J-I+1) \qquad (3.3.15)$$

Disamping menghitung harga $U(J)$, juga kita hitung harga q_{KP}^{N} dan e_{KP}^{NP} dengan $N = 1,2,3,\ldots,N+1$ (merupakan derajat polinomial, $KP = 1,2,3,\ldots,(K+1)$ (merupakan harga pendekatan yang diinginkan).

Harga-harga diatas dilambangkan dengan :

$$q_{KP}^{NP} = Q(M,L) \quad \text{dan} \quad e_{KP}^{NP} = E(M,L) \qquad (3.3.16)$$

dengan $L = 1,2,3,\ldots,NP$ (derajat polinomial).

$M = 1,2,3,\ldots,KP$ (harga pendekatan).

Dimana untuk $L = 1$ harga $Q(M,1)$ dan $E(M,1)$ dihitung dengan perhitungan :

$$Q(M,1) = \frac{U(M)}{U(M-1)} \quad \text{dan}$$

$$E(M,1) = Q(M,1) - Q(M-1,1) \qquad (3.3.17)$$

Harga $Q(M,1)$ akan merupakan harga pendekatan dari harga akar jika harga :

$$|E(M,1)| \leqslant EPS \qquad (3.3.18)$$

Sehingga jika persamaan (3.3.18) tersebut dipenuhi maka proses perhitungan untuk mencari akar pertama akan berhenti sehingga harga M ini mungkin akan terhenti sebelum pada pendekatan ke KP.

Setelah perhitungan akar pertama ini selesai kemudian dilanjutkan dengan perhitungan harga-harga $Q(M,L)$ dan $E(M,L)$ untuk $L = 2,3,\ldots,N$ dan $M = 1,2,\ldots,MP$ dimana MP adalah harga pendekatan terakhir dari akar pertama dimana keadaan (3.3.18) dipenuhi.

Harga $Q(M,L)$ dan $E(M,L)$ untuk yang berikutnya adalah dihitung dengan persamaan :

$LP = L - 1$ dan $KL = M + 1$

$$Q(M,L) = \frac{E(KL,LP)}{E(M,LP)}\, Q(KL,LP)$$

$$E(M,L) = Q(KL,L) - Q(M,L) + E(KL,LP) \qquad (3.3.19)$$

dimana $L = 2, 3, \ldots, N$ dan $M = 1, 2, \ldots, MP$.

Syarat untuk menghentikan pendekatan karena harga akar sudah dipenuhi atau belum, sehingga akan melanjutkan ke harga akar yang berikutnya adalah dengan menggunakan :

$$|E(M,L)| \leqslant EPS \qquad (3.3.20)$$

Sehingga jika syarat (3.3.20) ini dipenuhi maka perhitungan akar yang sedang dicari ini berhenti karena harga akarnya sudah diperoleh, kemudian dilanjutkan pada perhitungan akar selanjutnya.

Demikian proses diulang kembali hingga diperoleh semua harga akar dengan menggunakan persamaan (3.3.19).

Program BASIC nya :

```
15 REM METODE MENCARI AKAR PERSAMAAN
20 REM DENGAN METODE RUTISHAUSER'S
30 DIM U(50),A(20),C(20),Q(50,50),E(50,50),KAR(20)
40 SW=0:BRS=10
50 INPUT "MASUKKAN HARGA DERAJAD POLINOMIAL        = ";K
60 INPUT "MASUKKAN HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM      = ";N
70 INPUT "MASUKKAN BATAS KESALAHAN YANG DIIJINKAN = ";EPS
75  INPUT "MASUKKAN BATAS PENGUJIAN                 = ";EPS2
80 KP=K+1:KM=K-1:NP1=N+1:KP2=K+2:NP3=N-2:ND=N-1
90 FOR I= 1 TO KP
100 INPUT "MASUKKAN HARGA KOEFISIEN POLINOMIAL      = ";C(I)
110 NEXT I
120 FOR I= 1 TO KP
130 A(I)=C(I)/C(1)
140 NEXT I
145 OPEN "O",#3,"lpt1"
150 PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR SUATU POLINOMIAL"
160 PRINT#3,TAB(5);"DENGAN METODE SISA HASIL BAGI"
170 PRINT#3,TAB(5);STRING$(39,"=")
180 PRINT#3,"                    "
190 PRINT#3,TAB(7);"POLINOMIAL DERAJAD                      = ";K
200 PRINT#3,TAB(7);"PENGULANGAN MAKSIMUM                    = ";N
210 PRINT#3,TAB(7);"BATAS KESALAHAN YANG DIIJINKAN    = ";EPS
220 PRINT#3,TAB(7);"KOEFISIEN POLINOMIAL ADALAH :"
230 FOR I= 1 TO KP
240 PRINT#3,SPC(3);C(I);
250 NEXT I
```

```
255 PRINT#3,"                                          "
260 FOR I= 1 TO KM
270 U(I)=0
280 NEXT I
290 U(K)=1
300 FOR J= KP TO NP1
310 U(J)=0:P=J-1
320 FOR I= 2 TO KP
330 M=J-I+1
340 U(J)=U(J)-A(I)*U(M)
350 NEXT I
360 Q(J,1)=U(J)/U(P)
370 IF J=KP GOTO 400
380 E(P,1)=Q(J,1)-Q(P,1)
385 JR=J
390 IF ABS(E(P,1))<EPS GOTO 405
400 NEXT J
405 JR=J-1
410 KAR(1)=Q(JR,1)
420 FOR I= 2 TO K
430 R=I-1:Q(I,KP)=0
440 FOR L= KP2 TO JR
450 P=L+1:LP=L-1
460 Q(L,I)=(E(L,R)*Q(L,R))/E(LP,R)
465 NEXT L
468 KAR(I)=Q(LP,I)
470 FOR L= KP2 TO JR
475 LP=L-1
480 E(LP,I)=Q(L,I)-Q(LP,I)+E(LP,R)
485 RJ=L
490 IF ABS(E(LP,I))<EPS GOTO 525
500 NEXT L
510 RJ=JR-2
525 JR=RJ
530 NEXT I
540 NAS=1:KAS=2
550 FOR I= NAS TO KAS
560 PRINT#3,"     Q";I;SPC(11);"  E";I;SPC(11);
570 NEXT I
590 PRINT#3,TAB(3);STRING$(70,"=")
600 FOR I= KP TO NP1
610 FOR J= NAS TO KAS
615 IF Q(I,J)=0 GOTO 630
620 PRINT#3,USING "##.######                                   ";Q(I,J);
630 NEXT J
631 PRINT#3,"                 "
633 FOR J= NAS TO KAS
634 IF E(I,J)=0 GOTO 650
635 PRINT#3,USING "                 ##.######                 ";E(I,J);
650 NEXT J
652 BRS=BRS+2
654 PRINT#3,"                 "
655 IF BRS<=65 GOTO 670
660 BRS=0:PRINT#3,CHR$(12)
670 NEXT I
675 PRINT#3,TAB(10);STRING$(40,"-")
677 PRINT#3,"        "
680 IF KAS=K GOTO 730
690 IF BRS<=65 GOTO 710
700 BRS=0:PRINT#3,CHR$(12)
710 NAS=KAS+1:KAS=NAS+1
715 IF KAS>K THEN KAS=NAS
720 GOTO 550
```

```
730 PRINT#3,"                    "
740 PRINT#3,TAB(10);"HARGA AKAR-AKARNYA ADALAH :"
800 FOR I=1 TO K
830 PRINT#3,TAB(10);"AKAR     = ";KAR(I)
840 NEXT I
850 END
```

HASIL PERHITUNGAN AKAR SUATU POLINOMIAL
DENGAN METODE SISA HASIL BAGI
=======================================

POLINOMIAL DERAJAD = 4
PENGULANGAN MAKSIMUM = 16
BATAS KESALAHAN YANG DIIJINKAN = .0000009
KOEFISIEN POLINOMIAL ADALAH :
1 -10 35 -50 24

Q 1	E 1	Q 2	E 2
10.000000			
	-3.500000		-1.428572
6.500000		2.071429	
	-1.115385		-0.654187
5.384616		2.532626	
	-0.524615		-0.351256
4.860000		2.705985	
	-0.292099		-0.205366
4.567901		2.792718	
	-0.178583		-0.126301
4.389318		2.845000	
	-0.115751		-0.080247
4.273567		2.880504	
	-0.078020		-0.051984
4.195547		2.906541	
	-0.054049		-0.034139
4.141498		2.926451	
	-0.038192		-0.022631
4.103305		2.942013	
	-0.027383		-0.014961
4.075922		2.954435	
	-0.019849		-0.010328
4.056073		2.963956	
	-0.014504		[illegible]

Q 3	E 3	Q 4	E 4
	-0.480000		0.000027
0.948572		0.480026	
	-0.242905		-0.000624
1.359855		0.722307	
	-0.129022		0.006085
1.582088		0.857414	
	-0.069924		-0.037760
1.717530		0.889578	
	-0.036216		0.166753
1.807615		1.092548	
	-0.021890		-0.332600
1.865972		0.781838	
	-0.009172		-0.174099
1.908784		0.616910	
	-0.002964		10.906520
1.939958		11.526390	
	-0.017612		
1.944977			
	0.079522		
2.039460			

HARGA AKAR-AKARNYA ADALAH :

AKAR = 4.041569
AKAR = 2.963956
AKAR = 1.944977
AKAR = .61691

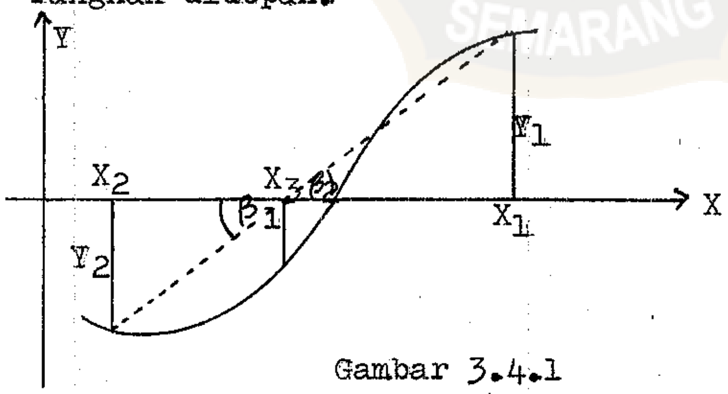
3.4. METODE SECANT

Metode Secant adalah termasuk metode tertua yang digunakan untuk menyelesaikan akar-akar persamaan polinomial.

$$f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots\ldots + a_n \qquad (3.4.1)$$

Metode Secant ini dilupakan orang sampai akhir-akhir ini, sedangkan metode ini sangat menguntungkan sekali untuk penggunaan komputer.

Metode Secant ini hampir sama dengan metode Regula Falsi (metode False Position atau Linear Interpolation method). Pada metode Bisection terdahulu dengan menggunakan 2 buah titik pendekatan X_1 dan X_2 dimana harga-harga $f(X_1)$ dan $f(X_2)$ mempunyai tanda yang berbeda sehingga $f(X_1).f(X_2) < 0$, dengan demikian maka diantara titik X_1 dan X_2 terdapat sebuah harga akar, seperti telah diterangkan didepan.



Gambar 3.4.1

Karena besarnya $\beta_1 = \beta_2$

Maka diperoleh hubungan, $tg\ \beta_1 = tg\ \beta_2$

$$tg\ \beta_1 = \frac{-Y_2}{X_3 - X_2} \quad \text{dan} \quad tg\ \beta_2 = \frac{Y_1}{X_1 - X_3}$$

Sehingga diperoleh harga :

$$\frac{-Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_1}{X_1 - X_3}$$

$$\frac{Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_1}{X_3 - X_1}$$

$$Y_2 (X_3 - X_1) = Y_1 (X_3 - X_2)$$

$$Y_2X_3 - Y_2X_1 = Y_1X_3 - Y_1X_2$$

$$Y_2X_3 - Y_1X_3 = Y_2X_1 - Y_1X_2$$

$$X_3 (Y_2 - Y_1) = Y_2X_1 - Y_1X_2$$

$$X_3 = \frac{Y_2X_1 - Y_1X_2}{Y_2 - Y_1}$$

Karena $Y_1 = f(X_1)$ dan $Y_2 = f(X_2)$ maka :

$$X_3 = \frac{X_1 \; f(X_2) - X_2 \; f(X_1)}{f(X_2) - f(X_1)}$$

$$X_3 = \frac{X_1 \; f(X_2)}{f(X_2) - f(X_1)} - \frac{X_2 \; f(X_1)}{f(X_2) - f(X_1)}$$

$$= X_1 + \frac{X_1 \; f(X_2)}{f(X_2) - f(X_1)} - \frac{X_2 \; f(X_1)}{f(X_2) - f(X_1)} - X_1$$

$$= X_1 + \frac{X_1 \; f(X_2) - X_1 f(X_2) + X_1 f(X_1)}{f(X_2) - f(X_1)} - \frac{X_2 f(X_1)}{f(X_2) - f(X_1)}$$

$$= X_1 + \frac{X_1 \; f(X_1) - X_2 \; f(X_2)}{f(X_2) - f(X_1)}$$

$$= X_1 + \frac{f(X_1) \; (X_1 - X_2)}{f(X_2) - f(X_1)}$$

Demikian juga untuk harga-harga $X_4; X_5; \ldots \ldots X_4$, sehingga bentuk umum diatas dapat ditulis

$$X_{i+1} = X_{i-1} + \frac{f(X_{i-1}) \; (X_{i-1} - X_i)}{f(X_i) - f(X_{i-1})} \qquad (3.4.2)$$

dimana X_i = harga X pendekatan yang ke i.

Bentuk pendekatan (3.4.2) diatas disebut dengan Metode Regula Falsi. Bentuk Regula Falsi dapat juga diturunkan dari metode Bisection, yaitu :

$$X_r = \frac{X_1 + X_1}{2}$$

$$X_r = X_u + \tfrac{1}{2}(X_l - X_u)$$

Sehingga bentuk diatas dapat ditulis menjadi :

$$X_r = X_u + W_r\,(X_l - X_u)$$

dimana $0 < W_r < 1$ dan $X_l < X_r < X_u$

Harga W_r tersebut dapat dicari dengan menggunakan,

$$W_r = \frac{f(X_u)}{f(X_u) - f(X_l)}$$

Bentuk persamaan (3.4.2) diatas dapat dirubah menjadi persamaan berikut :

$$X_{i+1} = \frac{X_{i-1}\,(f(X_i) - f(X_{i-1})) + f(X_{i-1})(X_{i-1} - X_i)}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$

$$= \frac{X_{i-1}f(X_i) - X_{i-1}f(X_{i-1}) + X_{i-1}f(X_{i-1}) - X_i f(X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$

$$= \frac{X_{i-1}\;f(X_i) - X_i\;f(X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$

$$= \frac{X_{i-1}\;f(X_i) - X_i\;f(X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})} - X_i + X_i$$

$$= X_i + \frac{X_{i-1}\;f(X_i) - X_i\;f(X_{i-1}) - X_i\;f(X_i) + X_i\;f(X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$

$$= X_i - \frac{X_i\;f(X_i) - X_{i-1}\;f(X_i)}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$

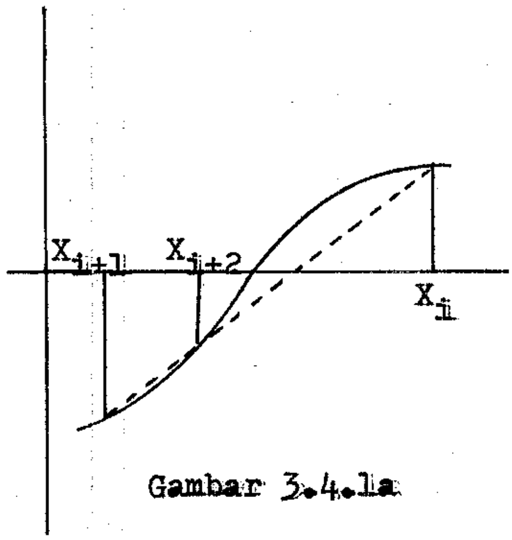
$$= X_i - \frac{f(X_i)}{f(X_i) - f(X_{i-1})}\,(X_i - X_{i-1}) \qquad (3.4.3)$$

untuk $i = 2,3,4,5,\ldots, n$.

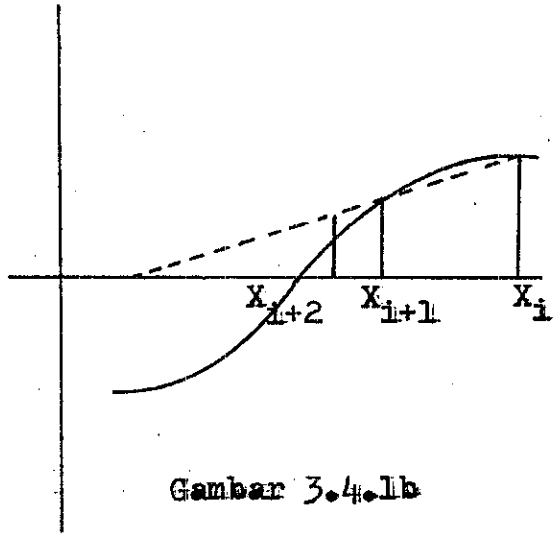
Mencari akar dengan menggunakan persamaan (3.4.3) diatas disebut dengan metode Secant.

Pada metode Regula Falsi dua harga pendekatan yang dipakai selalu mengapit sebuah harga akar, karena harga $f(X_i)$ dan $f(X_{i+1})$ selalu berlawanan tanda.

Tetapi dengan metode Secant kita tidak harus selalu bekerja dengan dua harga pendekatan yang harga f(X) nya



Gambar 3.4.1a



Gambar 3.4.1b

Dari gambar 3.4.1a misal digunakan X_i dan X_{i+1} sebagai pendekatan awal dimana $f(X_i).f(X_{i+1}) < 0$.
Dengan menggunakan persamaan (3.4.3) diperoleh X_{i+2}, dengan demikian $f(X_{i+1}).f(X_{i+2}) > 0$, demikian seterusnya sehingga diperoleh X_{i+3}, X_{i+4}, ...,X_{i+n}.
Demikian pula dengan gambar 3.4.1b, kita tentukan dua buah harga pendekatan yang sembarang, dimana harga $f(X_i)$ dikalikan $f(X_{i+1})$ lebih besar nol atau $f(X_i).f(X_{i+1}) > 0$.
Dengan persamaan (3.4.3) akan diperoleh X_{i+2} yang harga $f(X_{i+2}) > 0$, sehingga $f(X_{i+1}).f(X_{i+2}) > 0$. Karena dari metode Secant kita dapatkan harga-harga X_i yang mengganti X_{i-1}, X_{i+1} yang mengganti X_i dan seterusnya X_{i+n} yang mengganti X_{i+n-1}, sampai kita dapatkan harga pendekatan yang merupakan akar yang dicari.

Jika sebuah harga akar sudah ditemukan pada suatu interval, maka harga akar-akar lain dapat ditemukan pada interval yang lain.

3.4.1. Program BASIC Metode Secant.

Metode Secant adalah perhitungan harga akar-akar dengan menggunakan dua harga pendekatan.

Data untuk program ini adalah :

KD = harga persamaan yang diijinkan.

PM = harga pengulangan yang diinginkan.

X(I) = harga pendekatan akar ke I.

Program (langkah) pertama adalah memberikan definisi persamaan polinomial yang akan dicari harga akarnya. Dalam membuat program kita dapat menggunakan pengujian $f(X_i).f(X_{i+1}) < 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa antara X_i dan X_{i+1} terdapat sebuah harga akar, atau pengujian diatas tidak perlu dilakukan.

Sehingga dengan menggunakan persamaan :

$$X_{i+2} = X_{i+1} - \frac{f(X_{i+1})}{f(X_{i+1}) - f(X_i)} (X_{i+1} - X_i) \quad (3.4.4)$$

Dengan persamaan (3.4.4) diatas, dapat kita hitung harga-harga X_{i+2} ; X_{i+3} ; X_{i+4}; . . . . . . ;X_n.

Disamping mencari harga-harga X_{i+2} ; X_{i+3} ;. . . . ; X_n untuk mengakhiri proses perhitungan, disamping menggunakan batas pendekatan ke PM, juga dilakukan dengan menghitung harga $f(X_i)$;$f(X_{i+1})$;$f(X_{i+2})$;. . . . . . ;$f(X_n)$.

Proses perhitungan akan berhenti disamping telah melewati pendekatan ke PM, dapat juga jika harga $|f(X_n)| <$ KD.

Artinya perhitungan akan berhenti jika harga mutlak dari salah satu f(X) sudah lebih kecil dari KD.

Dengan demikian kita dapat menemukan sebuah harga akar.

Untuk harga akar-akar lainnya dapat dicari dengan mengganti harga-harga X_i dan X_{i+1} diatas.

Program BASIC nya :

```
5     DIM X(50)
10    REM ROGRAM UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
15    REM DENGAN METODA SECANT
20    REM OLEH ARIAWAN D RACHMANTO
```

```
40    DEF FNF(X)=X^3-6*X^2-2*X+12
50    INPUT "MASUKKAN HARGA PERSAMAAN YANG DAPAT DITERIMA=";KD
60    INPUT "MASUKKAN HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM=";PM
65    BRS=10
70    FOR I=1 TO 2
80    INPUT "MASUKKAN HARGA PENDEKATAN X(I)=";X(I)
90    NEXT I
100   IF FNF(X(1))=0 GOTO 380
110   IF FNF(X(2))=0 GOTO 400
120   IF FNF(X(1))*FNF(X(2))<0 GOTO 172
130   PRINT "HARGA FNF(X(1))=";FNF(X(1))
140   PRINT "HARGA FNF(X(2))=";FNF(X(2))
150   PRINT "KETIK AR=1 UNTUK PERUBAHAN X(I) DAN AR=2 UNTUK KELUAR"
155   INPUT "MASUKKAN HARGA AR = ";AR
160   IF AR=1 GOTO 70
170   IF AR=2 GOTO 410
172   INPUT "MASUKKAN HARGA X ANTARA X1 DAN X2 SERTA DEKAT X1 = ";X
175   X(2)=X
177   OPEN "o",#3,"lpt1"
180   PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL"
190   PRINT#3,TAB(5);"DENGAN MENGGUNAKAN METODA SECANT"
200   PRINT#3,TAB(5);"==============================================="
210   PRINT#3,TAB(5);"HARGA PENDEKATAN X(1)            = ";X(1)
220   PRINT#3,TAB(5);"HARGA PENDEKATAN X(2)            = ";X(2)
230   PRINT#3,TAB(5);"HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM       = ";PM
240   PRINT#3,TAB(5);"HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN = ";KD
245   PRINT#3,"                         "
250   PRINT#3,TAB(5);"NO";TAB(15)"X(I)";TAB(30);"FNF(X(I))"
255   PRINT#3,TAB(5);STRING$(37,"-")
260   FOR I=3 TO PM
270   P=I-1:M=I-2
275   AB=X(P)
280   AA=FNF(X(P))
285   BA=X(M)
290   BB=FNF(X(M))
294   AC=AA-BB
295   CA=AB-BA
300   X(I)=AB-(AA*(CA/AC))
310   BA=FNF(X(I))
320   PRINT#3,TAB(5);I;TAB(15);X(I);TAB(30);BA
324   BRS=BRS+1
326   IF BRS<=65 GOTO 330
328   PRINT#3,CHR$(12):BRS=0
330   N=I
335   IF ABS(BA)<=KD GOTO 360
350   NEXT I
355   N=I-1
360   PRINT#3,TAB(5);"AKAR YANG DICARI=";X(N)
370   GOTO 410
380   PRINT#3,TAB(5);"AKAR YANG DICARI=";X(1)
390   GOTO 410
400   PRINT#3,TAB(5);"AKAR YANG DICARI=";X(2)
410   END
```

HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
DENGAN MENGGUNAKAN METODA SECANT

HARGA PENDEKATAN X(1) = 0
HARGA PENDEKATAN X(2) = 1
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = 30
HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN = 9E-09

NO	X(I)	FNF(X(I))
3	1.714286	-4.023321
4	1.3958	.2382355
5	1.413604	7.903099E-03
6	1.414215	-2.002716E-05
7	1.414214	9.536743E-07
8	1.414214	-1.907349E-06
9	1.414214	9.536743E-07
10	1.414214	9.536743E-07
11	-1.622593E+32	1.701412E+38
12	0	12
13	1.144409E-05	11.99998
14	6	0

AKAR YANG DICARI= 6

HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
DENGAN MENGGUNAKAN METODA SECANT

HARGA PENDEKATAN X(1) = 0
HARGA PENDEKATAN X(2) = 1
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = 30
HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN = 9.000001E-06

NO	X(I)	FNF(X(I))
3	1.714286	-4.023321
4	1.3958	.2382355
5	1.413604	7.903099E-03
6	1.414215	-2.002716E-05
7	1.414214	9.536743E-07

AKAR YANG DICARI= 1.414214

HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
DENGAN MENGGUNAKAN METODA SECANT

HARGA PENDEKATAN X(1) = 3
HARGA PENDEKATAN X(2) = 4
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = 30
HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN = 9.000001E-06

NO	X(I)	FNF(X(I))
3	2.384186E-07	12
4	1.2	2.688
5	1.546392	-1.742819
6	1.410142	5.278206E-02
7	1.414147	8.630753E-04
8	1.414214	9.536743E-07

```
HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
DENGAN MENGGUNAKAN METODA SECANT
==================================================
HARGA PENDEKATAN X(1)              = -1
HARGA PENDEKATAN X(2)              = -1.5
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM         =  30
HARGA PERSAMAAN YANG DIIJINKAN =  9.000001E-06

NO          X(I)            FNF(X(I))
-------------------------------------------------
 3        -1.394366         .4121847
 4        -1.413403         1.699352E-02
 5        -1.414222        -1.659393E-04
 6        -1.414214        -1.907349E-06
AKAR YANG DICARI=-1.414214
```

3.5. METODE LAGUERRE.

Andaikan semua harga nol dari polinomial,

$$f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots\cdots + a_n \qquad (3.5.1)$$

adalah riil dan harga akar-akarnya ditunjukkan oleh :

$$X_1 \leqslant X_2 \leqslant X_3 \leqslant \cdots\cdots\cdots \leqslant X_n \quad \text{dengan} \quad n > 2.$$

Misalkan r adalah harga pendekatan untuk sebuah akar dan diperkirakan bahwa $r \in [I_i]$, dimana :

$$I_i = [X_i, X_{i+1}], \quad 0 \leqslant i \leqslant n \qquad (3.5.2)$$

$$\text{dengan } X_0 = -\infty \text{ dan } X_{n+1} = \infty$$

Sehingga pendekatan r ini terletak pada beberapa interval I_i.

Metode Laguerre adalah metode penyelesaian dengan menyusun sebuah parabola, dengan dua harga nol (akar) riil pada I_i, sehingga sekurang-kurangnya dapat ditemukan sebuah harga akar dari polinomial f(X) yang mendekati X_i atau X_{i+1}. Sehingga dengan demikian untuk mendapatkan n harga akar maka didapat dengan n parabola, misalkan parabola-parabola tersebut tergantung pada sebuah parameter riil λ, dan λ yang dipilih itu mungkin adalah harga akar dari polinomial f(X) diatas. Maka persamaan-persamaan parabola ini dapat ditulis $(\lambda - X)^2$, sehingga berlaku hubungan :

$$\left\{\frac{\lambda - X}{r - X}\right\}^2 > 0$$

Karena ada n harga akar maka terdapat n parabola sehingga berlaku hubungan :

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda - X_i}{r - X_i} \right)^2 > 0 \qquad (3.5.3)$$

Sehingga bentuk persamaannya menjadi :

$$\emptyset(y) = (r - y)^2 \, S(\lambda) - (\lambda - y)^2 = 0 \qquad (3.5.4)$$

dimana mempunyai dua akar riil, yaitu $y_1 = \alpha_1$ dan $y_2 = \alpha_2$ dengan $\lambda \neq r$, karena itu didapat kemungkinan jika $f(r) \neq 0$, dari persamaan (3.5.3) dan (3.5.4), maka diperoleh $\emptyset(r) < 0$ dan $\emptyset(X_i) > 0$, $i=0,1,2,\ldots,n+1$. Oleh karena itu jika $r \in I_i$, $i = 0,1,2,3,\ldots,n$ dua akar y_1 dan y_2 keduanya terletak di I_i, sebuah diantara X_i dan r dan yang lainnya terletak diantara r dan X_{i+1}.

Dengan diketahuinya $\emptyset(y)$ sebagai sebuah fungsi dari λ untuk sebuah harga akar X_i.

Dengan memilih λ sebagai satu harga akar dari $\emptyset(y)$, adalah memungkinkan untuk ditemukan sebuah harga akar dari f(X). Ini dimaksudkan jika kita ingin memaximalkan $|r - y|$ sebagai sebuah fungsi dari λ atau sebagai fungsi alternatif dari parameter $U = \lambda - r$.

Dari persamaan (3.5.1) jika polinomial yang diberikan :

$$f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_n$$

maka polinomial diatas dapat ditulis :

$$f(X) = (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)\ldots(X - X_n).$$

Sehingga,

$$f'(X) = (X - X_2)(X - X_3)\ldots(X - X_n) + (X - X_1)(X - X_3)\ldots(X - X_n) + \ldots + (X - X_1)(X - X_2)\ldots(X - X_{n-1})$$

Maka,

$$\frac{f'(X)}{f(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - X_i} = S_1 \qquad (3.5.5)$$

jika persamaan (3.5.5) diatas diturunkan akan menjadi :

$$\frac{[f'(X)]^2 - f(X)\;f''(X)}{[f(X)]^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - X_i)^2} \equiv S_2 \qquad (3.5.6)$$

Jika $U = \lambda - r$ maka $\lambda = U + r$

$$\left(\frac{\lambda - X_i}{r - X_i}\right)^2 = \frac{(\lambda - X_i)^2}{(r - X_i)^2} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda X_i + X_i^2}{(r - X_i)^2}$$

$$= \frac{(U + r)^2 - 2(U + r)\,X_i + X_i^2}{(r - X_i)^2}$$

$$= \frac{U^2 + 2Ur + r^2 - 2UX_i - 2rX_i + X_i^2}{(r - X_i)^2}$$

$$= \frac{U^2}{(r - X_i)^2} + \frac{r^2 - 2rX_i + X_i^2}{(r - X_i)^2} + \frac{2Ur - 2UX_i}{(r - X_i)^2}$$

$$= \frac{U^2}{(r - X_i)^2} + \frac{r^2 - 2rX_i + X_i^2}{(r - X_i)^2} + 2U\,\frac{(r - X_i)}{(r - X_i)^2}$$

$$= \frac{U^2}{(r - X_i)^2} + 2\,U\,\frac{1}{r - X_i} + 1 \qquad (3.5.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda - X_i}{r - X_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{U^2}{(r - X_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2\,U}{r - X_i} + n$$

Dengan menggunakan persamaan (3.5.3) dan (3.5.5) kedalam (3.5.7), persamaan (3.5.4) menjadi :

$$(r - Y)^2\,S(\lambda) - (\lambda - Y)^2 = 0$$

$$(r - Y)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda - X_i}{r - X_i}\right)^2 - (\lambda - Y)^2 = 0$$

$$(r - Y)^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{U^2}{(r - X_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2\,U}{r - X_i} + n\right\} -$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda Y + Y^2) = 0$$

$$(r - Y)^2 (U^2S_2 + 2US_1 + n) - (U + r)^2 + 2(U + r)Y - Y^2 = 0$$

$$(r - Y)^2 (U^2S_2 + 2US_1 + n) - U^2 - 2Ur - r^2 + 2UY + 2rY - Y^2 = 0$$

$$(r - Y)^2 (U^2S_2 + 2US_1 + n) - U^2 - 2Ur + 2UY - r^2 + 2rY - Y^2 = 0$$

$$(r - Y)^2 (U^2S_2 + 2US_1 + n) - U^2 - 2U (r - Y) - (r - Y)^2 = 0$$

Andaikan $\eta = r - Y$ maka didapat :

$$\eta^2(U^2S_2 + 2US_1 + n) - U^2 - 2U\eta - \eta^2 = 0$$

$$\eta^2U^2S_2 + 2U\eta^2S_1 + \eta^2 n - U^2 - 2U\eta - \eta^2 = 0$$

$$U^2(\eta^2S_2 - 1) + 2U\eta(\eta S_1 - 1) + (n - 1)\eta^2 = 0 \qquad (3.5.8)$$

Dari persamaan (3.5.8) kita lihat, penyelesaian persamaan untuk harga akar-akar dari $\emptyset(Y) = 0$.

Persamaan (3.5.8) juga merupakan persamaan kuadrat dalam U, yang akar-akarnya adalah fungsi dari parameter η .

Nilai $U = \lambda - r$ hanya menyebabkan nilai riil dalam pembicaraan ini, tujuan kita adalah mendapatkan nilai maksimum dari $|\eta|$, untuk itu U adalah riil.

Dengan menunjukkan bahwa nilai $|\eta|$ lebih besar hasilnya dari nilai kompleks untuk U, itu adalah merupakan akar-akar kompleks dari (3.5.8), untuk mendapatkan nilai $|\eta|$ adalah dengan diskriminan (D) dari persamaan kuadrat dalam U (persamaan 3.5.8) adalah $D \geq 0$.

Cara ini hanya perlu untuk mendapatkan nilai η dimana dengan membuat harga D = 0.

Dari (3.5.8) kita mendapatkan :

$$D = (2\eta(\eta S_1 - 1))^2 - 4(\eta^2S_2 - 1)\eta^2(n - 1)$$

$$= 4\eta^2(\eta^2 S_1^{\,2} - 2\eta S_1 + 1) - 4\eta^2(\eta^2 S_2 n - \eta^2 S_2 - n + 1)$$

$$= 4\eta^2(\eta^2 S_1^{\,2} - 2\eta S_1 + 1 - \eta^2 S_2 n + \eta^2 S_2 + n - 1)$$

$$= 4\eta^2\left\{(S_1^{\,2} - S_2 n + S_2)\eta^2 - 2\eta S_1 + n\right\}$$

Sehingga :

$$D = 4\eta^2 \left\{\left[S_1^{\,2} - (n-1)S_2\right]\eta^2 - 2\eta S_1 + n\right\} \qquad (3.5.9)$$

Jika D = 0 maka diperoleh,

$$D = 4\eta^2\left\{\left[S_1^{\,2} - (n-1)S_2\right]\eta^2 - 2\eta S_1 + n\right\} = 0$$

Karena $\eta^2 \neq 0$ maka,

$$\left[S_1^{\,2} - (n-1)S_2\right]\eta^2 - 2\eta S_1 + n = 0$$

$$\eta_{1,2} = \frac{2S_1 \pm \sqrt{4S_1^{\,2} - 4n\left[S_1^{\,2} - (n-1)S_2\right]}}{2\left\{S_1^{\,2} - (n-1)S_2\right\}}$$

$$= \frac{2S_1 \pm 2\sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})}}{2\left\{S_1^{\,2} - (n-1)\,S_2\right\}} \times \frac{n}{n}$$

$$= \frac{n(S_1 \pm \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})})}{nS_1^{\,2} - (n-1)nS_2 - S_1^{\,2} + S_1^{\,2}}$$

$$= \frac{n(S_1 \pm \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})})}{S_1^{\,2} + (n-1)S_1^{\,2} - (n-1)nS_2}$$

$$= \frac{n(S_1 \pm \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})})}{S_1^{\,2} + (n-1)(S_1^{\,2} - nS_2)}$$

$$= \frac{n(S_1 \pm \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})})}{S_1^{\,2} - (n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})}$$

$$= \frac{n(S_1 \pm \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})})}{\left\{S_1 - \sqrt{(n-1)(nS_2 - S_1^{\,2})}\right\}\left\{S_1 + \sqrt{(n-1)(nS_2 - S_1^{\,2})}\right\}}$$

$$\eta_1 = \frac{n}{S_1 + \sqrt{(n-1)\,(nS_2 - S_1^{\,2})}}$$

$$\eta_2 = \frac{n}{S_1 - \sqrt{(n-1)\ (nS_2 - S_1^{\,2})}}$$

Sehingga dapat ditulis menjadi :

$$\eta = \frac{n}{S_1 \pm \sqrt{(n-1)\ (nS_2 - S_1^{\,2})}} \qquad (3.5.10)$$

Karena $\eta = X - Y$ maka $Y = X - \eta$

$$Y = X - \frac{n}{S_1 \pm \sqrt{(n-1)\ (nS_2 - S_1^{\,2})}}$$

$$= X - \frac{n}{\frac{f'(X)}{f(X)} \pm \sqrt{(n-1)\left\{n\ \frac{(f'(X))^2 - f(X)f''(X)}{(f(X))^2} - \frac{(f'(X))^2}{(f(X))^2}\right\}}}$$

$$= X - \frac{n}{\frac{f'(X)}{f(X)} \pm \frac{1}{f(X)}\sqrt{(n-1)\left\{n(f'(X))^2 - nf(X)f''(X) - (f'(X))^2\right\}}}$$

$$= X - \frac{n\ f(X)}{f'(X) \pm \sqrt{(n-1)\left[\left\{(n-1)(f'(X))^2\right\} - n\ f(X)\ f''(X)\right]}}$$

Sehingga dapat ditulis menjadi :

$$Y = X - \frac{n\ f(X)}{f'(X) \pm \sqrt{H(X)}} \qquad (3.5.11)$$

dimana :

$$H(X) = (n-1)\left\{(n-1)\ (f'(X))^2 - nf(X)f''(X)\right\} \qquad (3.5.12)$$

Persamaan (3.5.11) memberikan harga-harga pendekatan :

$$X_{i+1} = X_i - \frac{n\ f(X_i)}{f'(X_i) \pm \sqrt{H(X)}} \qquad (3.5.13)$$

Persamaan (3.5.13) inilah yang digunakan untuk menghitung pendekatan-pendekatan harga akarnya. Sehingga dengan persamaan tersebut kita dapat menghasilkan harga akar yang sesuai untuk f(X).

3.5.1. Program BASIC Metode Laguerre.

Metode Laguerre dalam program ini digunakan untuk menghitung dua akar riil dari persamaan polinomial (3.5.1). Data untuk program ini adalah :

KD = bilangan positip yang dekat dengan nol, yang digunakan untuk menguji persamaan polinomial setelah akarnya dimasukkan.

PM = bilangan positip sebagai harga pengulangan dalam perhitungan mencari akar.

X(1) = harga akar pendekatan yang besarnya tidak ditentukan.

Dalam program terlebih dahulu didefinisikan fungsi persamaan polinomial yang akan dicari harga akar-akarnya. Demikian pula dengan turunan pertama dan kedua dari persamaan polinomial tersebut juga didefinisikan dalam program.

Pendekatan awal X(1) yang diberikan dapat berupa bilangan positip atau negatip.

Karena metode ini hanya dapat menghasilkan dua buah akar riil, maka tahap pertama dihitung dahulu harga akar pertama tersebut.

Harga X(1) diatas digunakan untuk menghitung harga X(2), dengan menggunakan persamaan (3.5.13), yaitu :

$$X_{i+1} = X_i - \frac{n\ f(X_i)}{f'(X_i) + \sqrt{H(X)}}$$

$$H(X) = (n-1)\left\{ (N-1)(f'(X))^2 - n\ f(X)\ f''(X)\right\}$$

Harga X(2) digunakan untuk menghitung X(3), begitu seterusnya sampai diperoleh harga X(N) yang memenuhi syarat sebagai akar persamaan polinomial.

Setelah diperoleh harga X(N) yang memenuhi syarat perhitungan dilanjutkan dengan menghitung harga akar yang lain menggunakan persamaan (3.5.13), yaitu :

$$X_{i+1} = X_i - \frac{n\ f(X_i)}{f'(X_i) - \sqrt{H(X)}}$$

Proses perhitungan akan berhenti jika sudah melewati harga PM yang diberikan atau harga X(N) merupakan harga akar yang dicari, sudah memenuhi syarat:

$$|f(X(N))| < KD$$

Jika syarat diatas sudah terpenuhi maka proses perhitungan akan berhenti dengan menghasilkan dua buah harga akar.

Program BASIC nya :

```
5     DIM X(50),H(50)
10    REM METODE MENCARI AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL
15    REM DENGAN METODE LAGUERRE
20    A$="X^4-10*X^3+35*X^2-50*X+24=0"
30    B$="4*X^3-30*X^2+70*X-50=0"
40    C$="12*X^2-60*X+70=0"
45    INPUT "MASUKKAN HARGA PERSAMAAN POLINOMIAL          = ";KD
50    INPUT "MASUKKAN PENGULANGAN MAKSIMUM                = ";PM
60    INPUT "MASUKKAN DERAJAD POLINOMIAL                  = ";N
70    INPUT "MASUKKAN PENDEKATAN PERTAMA    X(1)          = ";X(1)
80    BRS=10
120   DEF FNF(X)=X^4-10*X^3+35*X^2-50*X+24
130   DEF FNF1(X)=4*X^3-30*X^2+70*X-50
140   DEF FNF2(X)=12*X^2-60*X+70
150   PRINT,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL"
155   PRINT,TAB(5);"DENGAN METODE LAGUERRE"
160   PRINT,TAB(5);STRING$(42,"=")
170   PRINT,"             "
180   PRINT,TAB(5);"PERSAMAAN POLINOMIAL  : "
190   PRINT,TAB(5);A$
200   PRINT,TAB(5);"TURUNAN PERTAMA       : "
210   PRINT,TAB(5);B$
220   PRINT,TAB(5);"TURUNAN KEDUA         : "
230   PRINT,TAB(5);C$
240   PRINT,TAB(5);"HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = ";PM
250   PRINT,TAB(5);"HARGA PENDEKATAN AWAL      = ";X(1)
260   PRINT,TAB(5);"HARGA PERSAMAAN            = ";KD
270   PRINT "               "
274   IF ABS(FNF(X(1)))<KD GOTO 440
275   M=N-1
276   GOSUB 1000
280   FOR I= 2 TO PM
290   R=I-1
300   AA=FNF(X(R))
310   BB=FNF1(X(R))
320   CC=FNF2(X(R))
325   CA=AA*CC
327   B=BB^2*M
```

```
340  H(R)=M*(B-NA)
350  AB=SQR(H(R))
360  AC=BB-AB
370  X(I)=X(R)-((N*AA)/AC)
390  PRINT#3,USING "    ##      ####.#####       #######.#######";R;X(R);A
400  NEXT I
405  PRINT#3,TAB(5);STRING$(60,"-")
410  R=I-1
415  PRINT#3,"                   "
420  PRINT#3,SPC(3);"HARGA AKAR YANG DICARI = ";X(R)
425  PRINT#3,"           "
430  GOTO 460
440  PRINT#3,SPC(3);"HARGA AKAR YANG DICARI = ";X(1)
450  GOTO 660
460  GOSUB 1000
480  FOR I= 2 TO PM
490  R=I-1
500  AA=FNF(X(R))
510  BB=FNF1(X(R))
520  CC=FNF2(X(R))
530  CA=AA*CC
540  B=BB^2*M
550  NA=N*CA
560  IF ABS(AA)<KD GOTO 640
570  H(R)=M*(B-NA)
580  AB=SQR(H(R))
590  AC=BB+AB
600  X(I)=X(R)-((N*AA)/AC)
610  PRINT#3,USING "    ##      ####.#####        ######.#######";R;X(R);
620  NEXT I
630  R=I-1
640  PRINT#3,TAB(5);STRING$(60,"-")
650  PRINT#3,SPC(3);"HARGA AKAR YANG DICARI = ";X(R)
660  END
1000 PRINT#3,TAB(5);STRING$(60,"=")
1010 PRINT#3,TAB(5);" NO ";TAB(15);" X(R) ";TAB(35);" F(X) "
1020 PRINT#3,TAB(5);STRING$(60,"=")
1030 RETURN
```

```
HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL
DENGAN METODE LAGUERRE
==========================================

PERSAMAAN POLINOMIAL :
X^4-10*X^3+35*X^2-50*X+24=0
TURUNAN PERTAMA        :
4*X^3-30*X^2+70*X-50=0
TURUNAN KEDUA          :
12*X^2-60*X+70=0
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM =  20
HARGA PENDEKATAN AWAL      = -8
HARGA PERSAMAAN            =  9E-10
```

NO	X(R)	F(X)
1	-8.00000	11880.0000000
2	0.74876	2.3008730
3	0.99884	0.0070038

NO	X(R)	F(X)
1	-8.00000	11880.0000000
2	4.75919	13.8527700
3	4.01443	0.0888214
4	4.00001	0.0000610
5	4.00000	0.0000458

HARGA AKAR YANG DICARI = 3.999995

HASIL PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL
DENGAN METODE LAGUERRE

PERSAMAAN POLINOMIAL :
X^4-10*X^3+35*X^2-50*X+24=0
TURUNAN PERTAMA :
4*X^3-30*X^2+70*X-50=0
TURUNAN KEDUA :
12*X^2-60*X+70=0
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = 20
HARGA PENDEKATAN AWAL = 8
HARGA PERSAMAAN = 9E-10

NO	X(R)	F(X)
1	8.00000	840.0000000
2	-0.31683	43.6830800
3	0.96172	0.2461701
4	0.99999	0.0000381
5	1.00000	0.0000038
6	1.00000	-0.0000057
7	1.00000	0.0000038

HARGA AKAR YANG DICARI = 1

NO	X(R)	F(X)
1	8.00000	840.0000000
2	4.14679	1.1372070
3	4.00028	0.0016937

HARGA AKAR YANG DICARI = 3.999998

Dari hasil perhitungan diatas maka, persamaan

$$X^4 - 10\,X^3 + 35\,X^2 - 50\,X + 24 = 0$$

mempunyai akar-akar antara lain :

$$X_1 = 1,000001$$

$$X_2 = 3,999998$$