BAB II

PENGERTIAN-PENGERTIAN

Akar-akar persamaan polinomial dapat berupa bilangan riil atau kompleks. Untuk menentukan jenis akar dalam suatu polinomial riil atau kompleks dapat digunakan aturan Descartes, yaitu :

Andaikan $f(X)$ berderajad n dan

u adalah banyaknya perubahan tanda dalam koefisien $f(X)$

u' adalah banyaknya perubahan tanda dalam koefisien $f(-X)$

maka :

1. jika $u + u' < n$, persamaan $f(X)=0$ mempunyai paling sedikit $n - (u + u')$ akar kompleks.
2. jika $u + u' = n$ maka persamaan $f(X)=0$ mempunyai akar nyata, yaitu u akar positip dari $f(X)=0$ dan u' akar negatip dari $f(X)=0$.

Aturan Descartes hanya memberitahukan jenis akar-akar $f(X)$ tetapi tidak menunjukkan daerah isolasi akar.

Contoh :

1. $f(X) = X^3 - 11\,X^2 + 32\,X - 22$

   terdapat $u=3$ yaitu, 1 ke -11, -11 ke +32 dan +32 ke -22.

   $f(-X) = -X^3 - 11\,X^2 - 32\,X - 22$

   terdapat $u'=0$ atau tidak ada perubahan tanda.

   Karena $u+u'=n$ maka tidak terdapat akar kompleks dan terdapat 3 harga akar positip.

2. $f(X) = X^8-16X^7+105X^6-364X^5+715X^4-792X^3+492X^2-X+9$

   terdapat $u=8$ yaitu, 1 ke -16, -16 ke 105, 105 ke -364, -364 ke 715, 715 ke -792, -792 ke 492, 492 ke -1 dan -1 ke 9.

   $f(-X) = X^8+16X^7+105X^6+364X^5+715X^4+792X^3+492X^2+X+9$

   terdapat $u'=0$ atau tidak ada perubahan tanda.

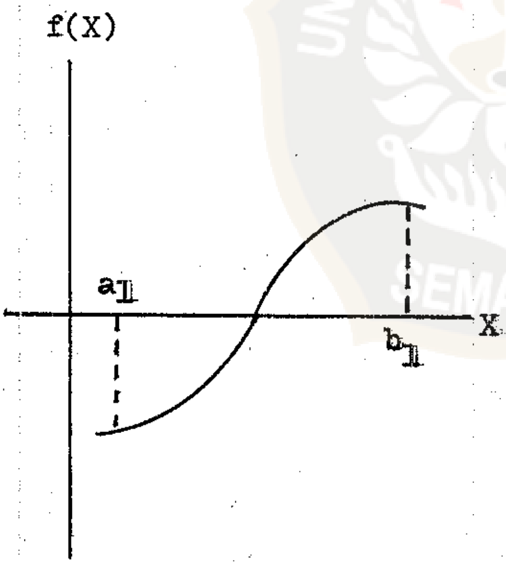
karena u+u'=n maka tidak terdapat akar kompleks dan yang ada hanya 8 akar positip.

2.1. METODE MEMBAGI DUA INTERVAL.

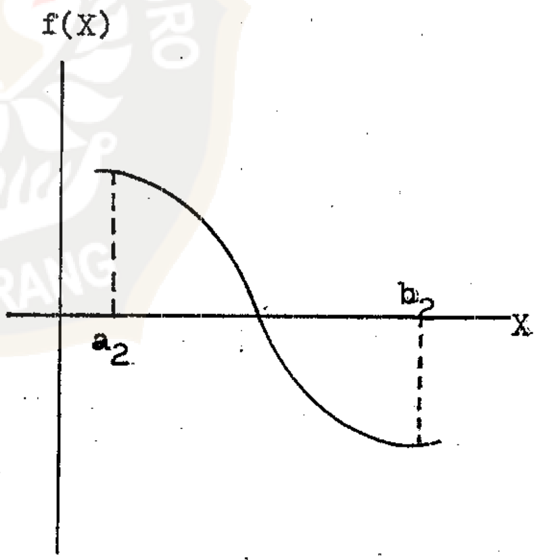
Metode membagi dua interval atau lebih dikenal dengan Bisection Method atau Method Of Halving The Interval.

Harga sebuah fungsi yang berbeda tandanya pada 2 buah titik yang berdekatan, maka fungsi tersebut akan berharga nol atau f(X) = 0 pada titik diantara kedua buah titik yang berdekatan tadi.

Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan gambar grafik:



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Dari grafik (2.1) dan (2.2) diatas terlihat dengan jelas :

1. Grafik (2.1) : $f(a_1) < 0$ dan $f(b_1) > 0$
2. Grafik (2.2) : $f(a_1) > 0$ dan $f(b_1) < 0$

Jadi benar bahwa akar-akar yang memenuhi kemudian dapat ditentukan, yaitu terletak diantara interval dimana perubahan tanda terjadi.

Berarti diantara dua buah titik ini terdapat harga akar yang kita cari.

2.1.1. Langkah Penyelesaian :

Proses ini kemudian dapat diulangi untuk memperoleh taksiran-taksiran akar yang sempurna.

Sehingga langkah-langkah tersebut dapat ditulis :

Langkah 1 :

Dipilih 2 buah titik sebagai interval dimana diperkirakan sebuah harga akar terletak pada titik itu. Diberi nama titik tersebut X_l (batas bawah interval) dan X_u (batas atas interval).

Sehingga kalau harga X_l dan X_u yang dipilih ini benar sebagai interval maka harus memenuhi syarat :

$$f(X_l).f(X_u) < 0$$

Ini dapat terjadi jika $f(X_l) < 0$ dan $f(X_u) > 0$ atau $f(X_l) > 0$ dan $f(X_u) < 0$.

Langkah 2 :

Jika langkah 1 diatas benar dapat dipenuhi, maka harga taksiran (pendekatan pertama) untuk akar dapat ditentukan :

$$X_r = \frac{X_l + X_u}{2}$$

Langkah 3 :

Langkah berikut ini adalah menentukan interval baru (batas bawah baru atau batas atas baru) dari akar:

a. Jika $f(X_l).f(X_r) < 0$, akar terletak dalam interval X_l dan X_r, karena itu $X_u^{baru} = X_r$ (batas atas interval baru sama denga X_r), kemudian proses dilanjutkan ke langkah 4.

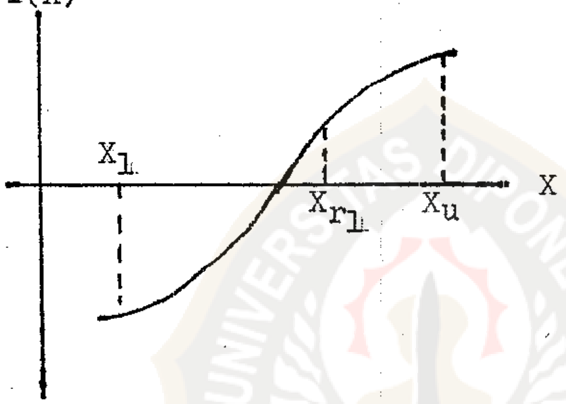
b. Jika $f(X_l).f(X_r) > 0$, berarti $f(X_l) > 0$ dan $f(X_r) > 0$ sehingga akar tidak terletak dalam interval X_l dan X_r, tetapi dalam interval X_r dan X_u.

Sehingga $X_l^{baru} = X_r$, kemudian proses dilanjutkan ke langkah 4.

c. Jika $f(X_l).f(X_r) = 0$, maka akar yang dicari adalah sama dengan X_r, karena $f(X_r) = 0$, dan perhitungan berakhir.

Langkah 3a, 3b dan 3c dapat dibuktikan dengan grafik sebagai berikut:

Misalkan ada fungsi $f(X)$



Gambar 2.3

Andaikan dari langkah 2 didapat :

$$X_r = \frac{X_l + X_u}{2} = X_{r_1}$$

Jika $f(X_l).f(X_{r_1}) < 0$ maka $f(X_l)$ dan $f(X_{r_1})$ berlawanan tanda sehingga tanda dari $f(X_u)$ akan sama dengan tanda dari $f(X_{r_1})$ sehingga X_u dapat diganti dengan X_{r_1} ($X_u = X_u^{baru} = X_{r_1}$).

Tetapi jika $f(X_l).f(X_{r_1}) > 0$ maka $f(X_l)$ dan $f(X_{r_1})$ bertanda sama, sehingga antara X_l dan X_{r_1} tidak ada harga akar, yang ada adalah antara X_{r_1} dan X_u maka $X_l^{baru} = X_{r_1}$.

Jika $f(X_l).f(X_{r_1}) = 0$, maka $f(X_{r_1}) = 0$ karena dari langkah 1 harga $f(X_l) \neq 0$, sehingga harga akar untuk persamaan ini sama dengan X_{r_1}.

Langkah 4 :

Menghitung harga interval yang baru untuk pendekatan :

$$X_r = \frac{X_1^{baru} + X_u}{2} \quad \text{atau} \quad X_r = \frac{X_1 + X_u^{baru}}{2}$$

Langkah 5 :

Jika taksiran yang diperoleh benar memenuhi persamaan tersebut maka ini merupakan perhitungan terakhir, jika tidak maka harus kembali pada langkah 3.

Misalkan diambil polinomial sembarang :

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots + a_n \quad (2.1.1)$$

maka diandaikan polinomial ini punya harga $f(X)=0$, salah satunya terletak diantara X_1 dan X_u.

Sehingga berlaku :

$$f(X_1) = (X_1)^n + a_1 (X_1)^{n-1} + a_2 (X_1)^{n-2} + \ldots \ldots + a_n \quad (2.1.2)$$

$$f(X_u) = (X_u)^n + a_1 (X_u)^{n-1} + a_2 (X_u)^{n-2} + \ldots \ldots + a_n \quad (2.1.3)$$

Sehingga hasil perkalian $f(X_1).f(X_u) < 0$ jika

1. $f(X_1) > 0$ dan $f(X_u) < 0$
2. $f(X_1) < 0$ dan $f(X_u) > 0$

Jika hasil perkalian $f(X_1).f(X_u) < 0$ maka berlaku :

$$X_r = \frac{X_1 + X_u}{2}$$

Sehingga didapat :

$$f(X_r) = (X_r)^n + a_1(X_r)^{n-1} + a_2 (X_r)^{n-2} + \ldots \ldots + a_n \quad (2.1.4)$$

Hasil perkalian $f(X_1).f(X_r)$ akan menghasilkan tiga kemungkinan yaitu :

1. $f(X_1).f(X_r) < 0$, sehingga harga akar terletak antara X_1 dan X_r sehingga berlaku $X_u^{baru} = X_r$.
2. $f(X_1).f(X_r) > 0$, sehingga harga akar terletak antara X_r dan X_u sehingga berlaku $X_1^{baru} = X_r$.

3. $f(X_l).f(X_r) = 0$, sehingga harga akar adalah pada titik X_r karena $f(X_r) = 0$.

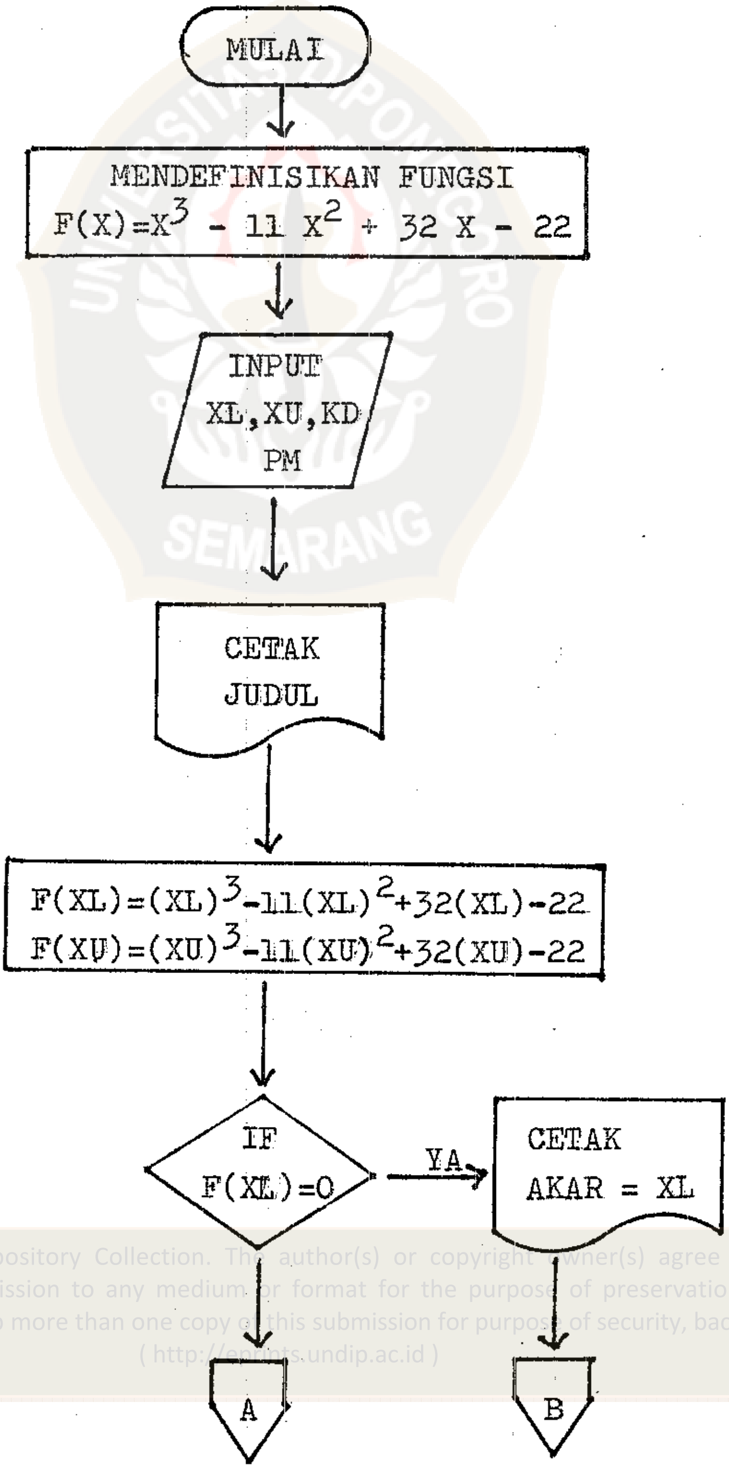
Contoh :

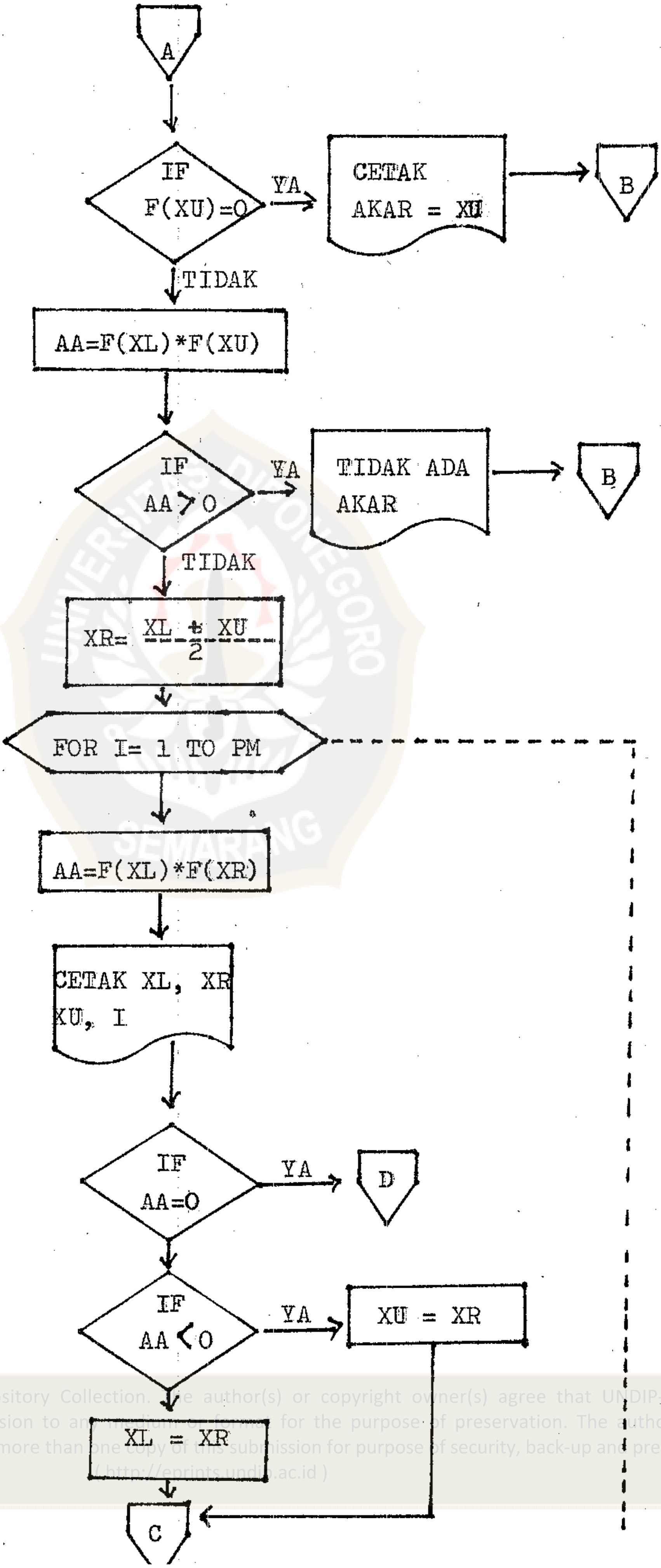
$f(X) = X^3 - 11 X^2 + 32 X - 22$

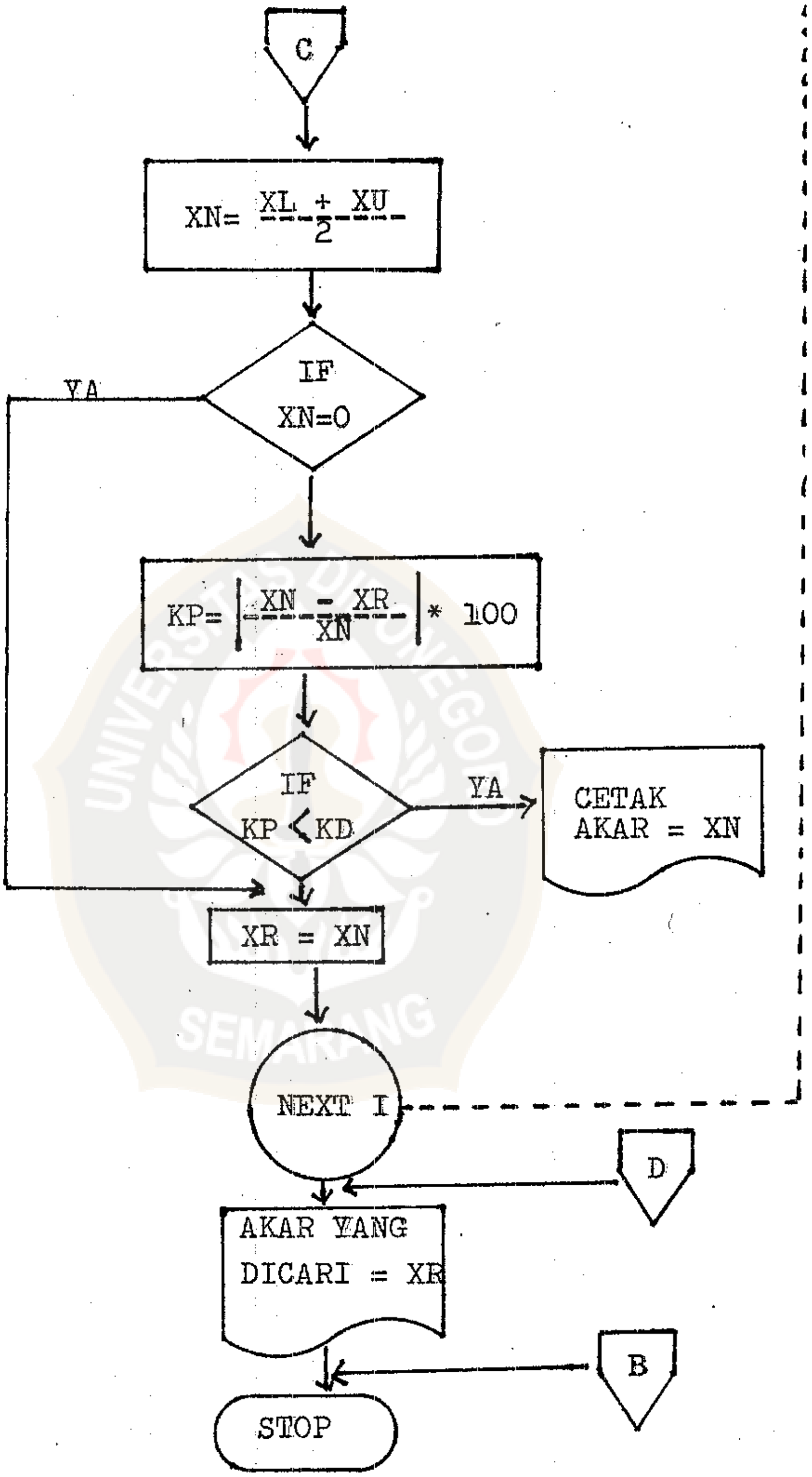
Tentukan akar persamaan diatas dengan membuat PROGRAM BASIC dengan menggunakan metode diatas .

Penyelesaian :

Diagram alir :




A
IF
F(XU)=0
YA
CETAK
AKAR = XU
B
TIDAK
AA=F(XL)*F(XU)
IF
AA>0
YA
TIDAK ADA
AKAR
B
TIDAK
XR= XL + XU
2
FOR I= 1 TO PM
AA=F(XL)*F(XR)
CETAK XL, XR
XU, I
IF
AA=0
YA
D
IF
AA<0
YA
XU = XR
XL = XR
C



XL = **Batas bawah interval.**

XU = **Batas atas interval.**

PM = Pengulangan Maksimum.

KD = Batas Kesalahan Yang Diijinkan.

KP = Batas Kesalahan Dalam Proses Perhitungan.

Sehingga Program BASIC nya adalah sebagai berikut :

```
10  REM program untuk mencari akar persamaan polynomial
15  REM dengan metode membagi dua interval
20  REM oleh ariawan d rachmanto
25  DEF FNF(X)=X^3-11*X^2+32*X-22
30  OPEN"o",#2,"lpt1"
40  INPUT "MASUKKAN HARGA INTERVAL AWAL   =";XL
50  INPUT "MASUKKAN HARGA INTERVAL AKHIR  =";XU
60  INPUT "MASUKKAN HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA =";KD
70  INPUT "MASUKKAN HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM =";PM
80 PRINT#2,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN"
82 PRINT#2,TAB(5);"METODE MEMBAGI DUA"
85 PRINT#2,TAB(5);"=================================================================="
90 PRINT#2,TAB(15);"INTERVAL AWAL  =";XL
92 PRINT#2,TAB(15);"INTERVAL AKHIR =";XU
93 PRINT#2,TAB(15);"KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA =";KD
95 PRINT#2,TAB(15);"PENGULANGAN MAKSIMUM          =";PM
100 IF FNF(XL)=0 GOTO 290
110 IF FNF(XU)=0 GOTO 310
120 IF FNF(XL)*FNF(XU)<0 GOTO 150
130 PRINT#2,TAB(15);"TAK ADA HARGA AKAR ANTARA INTERVAL ";XL;"DAN";XU
140 GOTO 370
150 PRINT#2,TAB(15);"NO";TAB(30);"XL";TAB(40);"XR";TAB(50);"XU"
160 XR=(XL+XU)/2
170 FOR I=1 TO PM
180 AA=FNF(XL)*FNF(XR)
190 PRINT#2,TAB(15);I;TAB(30);XL;TAB(40);XR;TAB(50);XU
200 IF AA=0 THEN 330
210 IF AA<0 THEN XU=XR
220 IF AA>0 THEN XL=XR
230 XN=(XL+XU)/2
240 IF XN=0 GOTO 270
250 KP=ABS((XN-XR)/XN)*100
260 IF KP<KD GOTO 350
270 XR=XN
280 NEXT I
285 GOTO 330
290 PRINT#2,TAB(15);"AKAR YANG DICARI =";XL
300 GOTO 370
310 PRINT#2,TAB(15);"AKAR YANG DICARI =";XU
320 GOTO 370
330 PRINT#2,TAB(15);"AKAR YANG DICARI =";XR
340 GOTO 370
350 PRINT#2,TAB(15);"AKAR YANG DICARI =";XN
360 GOTO 370
370 END
```

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MEMBAGI DUA

INTERVAL AWAL = 1
INTERVAL AKHIR = 2
KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 5E-10
PENGULANGAN MAKSIMUM = 30
AKAR YANG DICARI = 1

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MEMBAGI DUA

INTERVAL AWAL = 3
INTERVAL AKHIR = 4
KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 5E-11
PENGULANGAN MAKSIMUM = 25

NO	XL	XR	XU
1	3	3.5	4
2	3	3.25	3.5
3	3.25	3.375	3.5
4	3.25	3.3125	3.375
5	3.25	3.28125	3.3125
6	3.25	3.265625	3.28125
7	3.265625	3.273438	3.28125
8	3.265625	3.269531	3.273438
9	3.265625	3.267578	3.269531
10	3.267578	3.268555	3.269531
11	3.267578	3.268067	3.268555
12	3.267578	3.267822	3.268067
13	3.267822	3.267944	3.268067
14	3.267944	3.268005	3.268067
15	3.267944	3.267975	3.268005
16	3.267944	3.26796	3.267975
17	3.267944	3.267952	3.26796
18	3.267944	3.267948	3.267952
19	3.267948	3.26795	3.267952

AKAR YANG DICARI = 3.26795

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MEMBAGI DUA

INTERVAL AWAL = 6
INTERVAL AKHIR = 7
KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 9E-08
PENGULANGAN MAKSIMUM = 20

NO	XL	XR	XU
1	6	6.5	7
2	6.5	6.75	7
3	6.5	6.625	6.75
4	6.625	6.6875	6.75
5	6.6875	6.71875	6.75
6	6.71875	6.734375	6.75
7	6.71875	6.726563	6.734375
8	6.726563	6.730469	6.734375
9	6.730469	6.732422	6.734375

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MEMBAGI DUA

INTERVAL AWAL = 6
INTERVAL AKHIR = 7
KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 9E-09
PENGULANGAN MAKSIMUM = 30

NO	XL	XR	XU
1	6	6.5	7
2	6.5	6.75	7
3	6.5	6.625	6.75
4	6.625	6.6875	6.75
5	6.6875	6.71875	6.75
6	6.71875	6.734375	6.75
7	6.71875	6.726563	6.734375
8	6.726563	6.730469	6.734375
9	6.730469	6.732422	6.734375
10	6.730469	6.731446	6.732422
11	6.731446	6.731934	6.732422
12	6.731934	6.732178	6.732422
13	6.731934	6.732056	6.732178
14	6.731934	6.731995	6.732056
15	6.731995	6.732025	6.732056
16	6.732025	6.732041	6.732056
17	6.732041	6.732048	6.732056
18	6.732048	6.732052	6.732056

AKAR YANG DICARI = 6.732052

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MEMBAGI DUA

INTERVAL AWAL = 3
INTERVAL AKHIR = 4
KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 9E-09
PENGULANGAN MAKSIMUM = 30

NO	XL	XR	XU
1	3	3.5	4
2	3	3.25	3.5
3	3.25	3.375	3.5
4	3.25	3.3125	3.375
5	3.25	3.28125	3.3125
6	3.25	3.265625	3.28125
7	3.265625	3.273438	3.28125
8	3.265625	3.269531	3.273438
9	3.265625	3.267578	3.269531
10	3.267578	3.268555	3.269531
11	3.267578	3.268067	3.268555
12	3.267578	3.267822	3.268067
13	3.267822	3.267944	3.268067
14	3.267944	3.268005	3.268067
15	3.267944	3.267975	3.268005
16	3.267944	3.26796	3.267975
17	3.267944	3.267952	3.26796
18	3.267944	3.267948	3.267952
19	3.267948	3.26795	3.267952

AKAR YANG DICARI = 3.26795

2.2. METODE PENDEKATAN BERTURUTAN.

Misalkan terdapat suatu polinomial :

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots\ldots + a_n \qquad (2.2.1)$$

Bila f(X) = 0 maka f(X) dapat ditulis :

$$f(X) = 0 \qquad (2.2.2)$$

$$X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

$$X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + a_3 X^{n-3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + a_{n-2} X^2 + a_n = - a_{n-1} X$$

$$X = - \frac{1}{a_{n-1}} (X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-2} X^2 + a_n)$$

Sehingga dapat ditulis :

$$X = F(X) \qquad (2.2.3)$$

Jika α merupakan salah satu akar dari f(X) = 0, maka f(α) = 0, kemudian $\alpha = F(\alpha)$.

Jika pendekatan yang pertama X_1 pada sebuah akar dipenuhi maka berlaku pendekatan kedua :

$$X_2 = F(X_1)$$

Selanjutnya : $X_3 = F(X_2)$

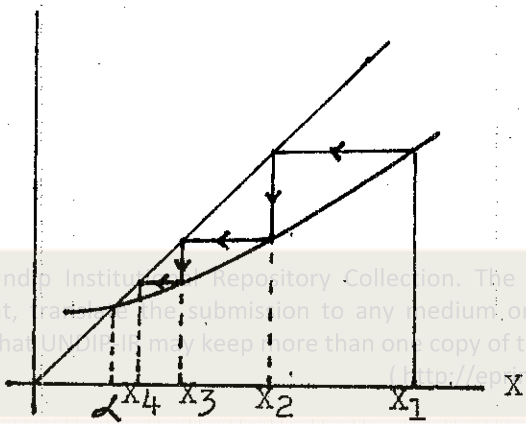
$X_4 = F(X_3)$

Maka berlaku hubungan :

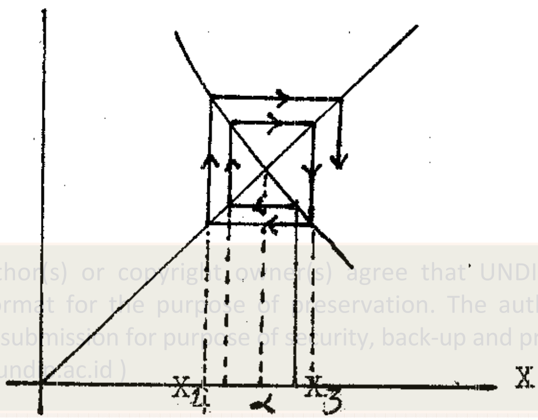
$$X_{j+1} = F(X_j) \qquad (2.2.4)$$

dengan harapan bahwa deret-deret tersebut akan bertemu pada titik α.

Pengulangan ini digambarkan dalam grafik dibawah ini:



Grafik 2.4a



Grafik 2.4b

Nilai α yang akan dicari merupakan salah satu penyelesaian dari persamaan (2.2.2).

Arah panah menunjukkan iterasi, dan terlihat bahwa konvergen di $X = \alpha$.

Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata yaitu :

Teorema harga rata-rata menyatakan, jika fungsi $Y = f(X)$ dalam selang $a \leq X \leq b$ adalah kontinu dan dalam selang $a < X < b$ dapat diturunkan, maka ada Z dengan $a < Z < b$ sehingga :

$$f(b) - f(a) = (b - a).f'(Z)$$

Sehingga : $f'(Z) = \dfrac{f(b) - f(a)}{(b - a)}$

Sehingga diandaikan : $F(X_{n-1}) = X_n$

$$F(\alpha) = \alpha. \qquad (2.2.5)$$

$F(X)$ kontinu pada selang $\alpha \leq X \leq X_{n-1}$ maka terdapat suatu X^* dimana $\alpha < X^* < X_{n-1}$, maka :

$$F(X_{n-1}) - F(\alpha) \leq (X_{n-1} - \alpha).F'(X_1^*) \qquad (2.2.6)$$

Sehingga dari (2.2.5) dan (2.2.6) didapat :

$$|X_n - \alpha| \leq F'(X_1^*)\ |X_{n-1} - \alpha| \qquad (2.2.7)$$

Kalau pada (2.2.5) diganti dengan $F(X_{n-2}) = X_{n-1}$

$$F(\alpha) = \alpha.$$

Maka $F(X)$ kontinu pada selang $\alpha \leq X \leq X_{n-2}$ sehingga terdapat suatu X^* dimana $\alpha < X^* < X_{n-2}$.

$$|F(X_{n-2}) - F(\alpha)| \leq |X_{n-2} - \alpha| . F'(X_2^*)$$

$$|X_{n-1} - \alpha| \leq F'(X_2^*)\ |X_{n-2} - \alpha|$$

Dan seterusnya, sehingga untuk $\rho = \max\limits_{1 \leq i \leq n} F'(X_i^*)$ dimana $0 < \rho < 1$.

Didapat pertidaksamaan :

$$|F(X_{n-1}) - \alpha| \leq |X_{n-1} - \alpha|\rho \qquad (2.2.8)$$

Sehingga : $|X_n - \alpha| \leq \rho|X_{n-1} - \alpha| \qquad (2.2.9)$

Untuk n=2 didapat :

$$|X_2 - \alpha| = |F(X_1) - \alpha| \leq \rho \; |X_1 - \alpha|$$

Untuk n = 3

$$|X_3 - \alpha| \quad |F(X_2) - \alpha| \leq \rho \; |X_2 - \alpha| \leq \rho\rho |X_1 - \alpha|$$

Sehingga $|X_3 - \alpha| \leq \rho^2 |X_1 - \alpha|$

Dapat disimpulkan bahwa :

$$|X_j - \alpha| \leq \rho^{j-1} |X_1 - \alpha|$$

Dari (2.2.6) ditunjukkan jika F' adalah turunan dari F maka $|F'(X)| \leq \rho < 1$ untuk $|X - \alpha| < |X_1 - \alpha|$.

Dalam grafik 2.4b ditunjukkan bagaimana metode pendekatan berturutan gagal bertemu karena $|F'(X)| > 1$ dalam bagian daerah ini.

Bila X_j adalah mendekati α , maka hubungan pendekatannya adalah :

$$X_{j+1} - \alpha = F'(\alpha)\,(X_j - \alpha) \qquad (2.2.10)$$

Sehingga bila $F'(\alpha) < 1$ tidak melihat berapa harga X_0 akan membuat X_j menjadi menjadi makin mendekati α .

Tetapi bila $F'(\alpha) > 1$ maka akan membuat X_j menjadi semakin besar dengan bertambahnya j maka akan menjauhi harga α .

Dapat disimpulkan bahwa :

1. Bila $|F'(\alpha)| < 1$ proses akan konvergen.
2. Bila $|F'(\alpha)| > 1$ proses akan divergen.

Sehingga untuk merubah bentuk (2.2.2) ke bentuk (2.2.3) atau f(X) ke F(X) harus dicari bentuk F(X) sedemikian sehingga syarat konvergensi dapat dipenuhi.

Harga X_0 untuk pendekatan awal adalah dipilih dari salah satu bilangan yang menjadikan F'(X) dapat konvergen.

Untuk mencari bentuk F(X) dan harga X_0 dapat dilakukan dengan menggunakan coba-coba.

Contoh :

$f(X) = X^4 - 3X^3 - 2X^2 + 7X + 3$

Dipilih harga F(X) yaitu :

$$7\,X = -\,X^4 + 3\,X^3 + 2\,X^2 - 3$$

$$X = -\,\frac{1}{7}\,X^4 + \frac{3}{7}\,X^3 + \frac{2}{7}\,X^2 - \frac{3}{7}$$

Sehingga untuk F(X) diambil :

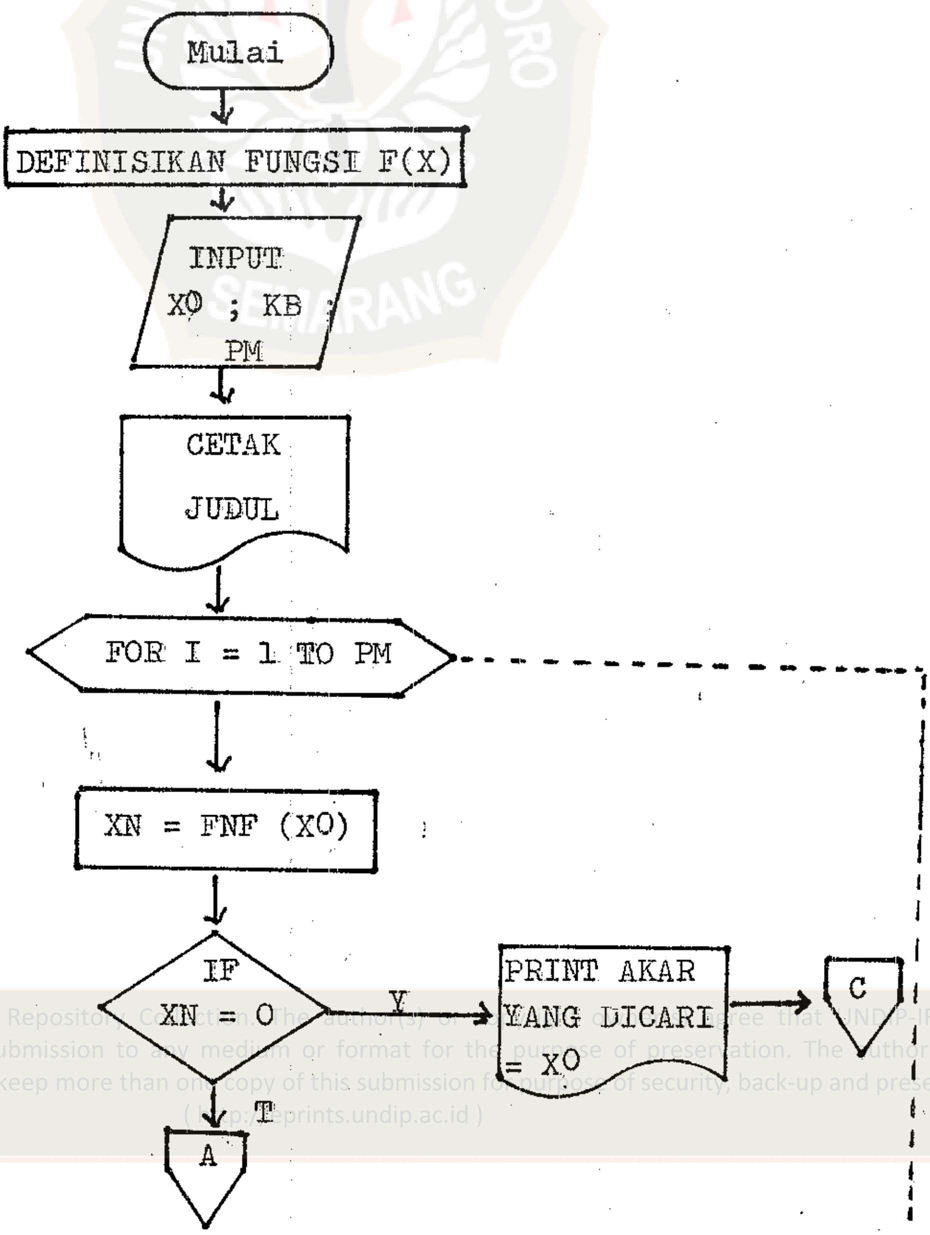
$$F(X) = -\,\frac{1}{7}X^4 + \frac{3}{7}\,X^3 + \frac{2}{7}\,X^2 - \frac{3}{7}$$

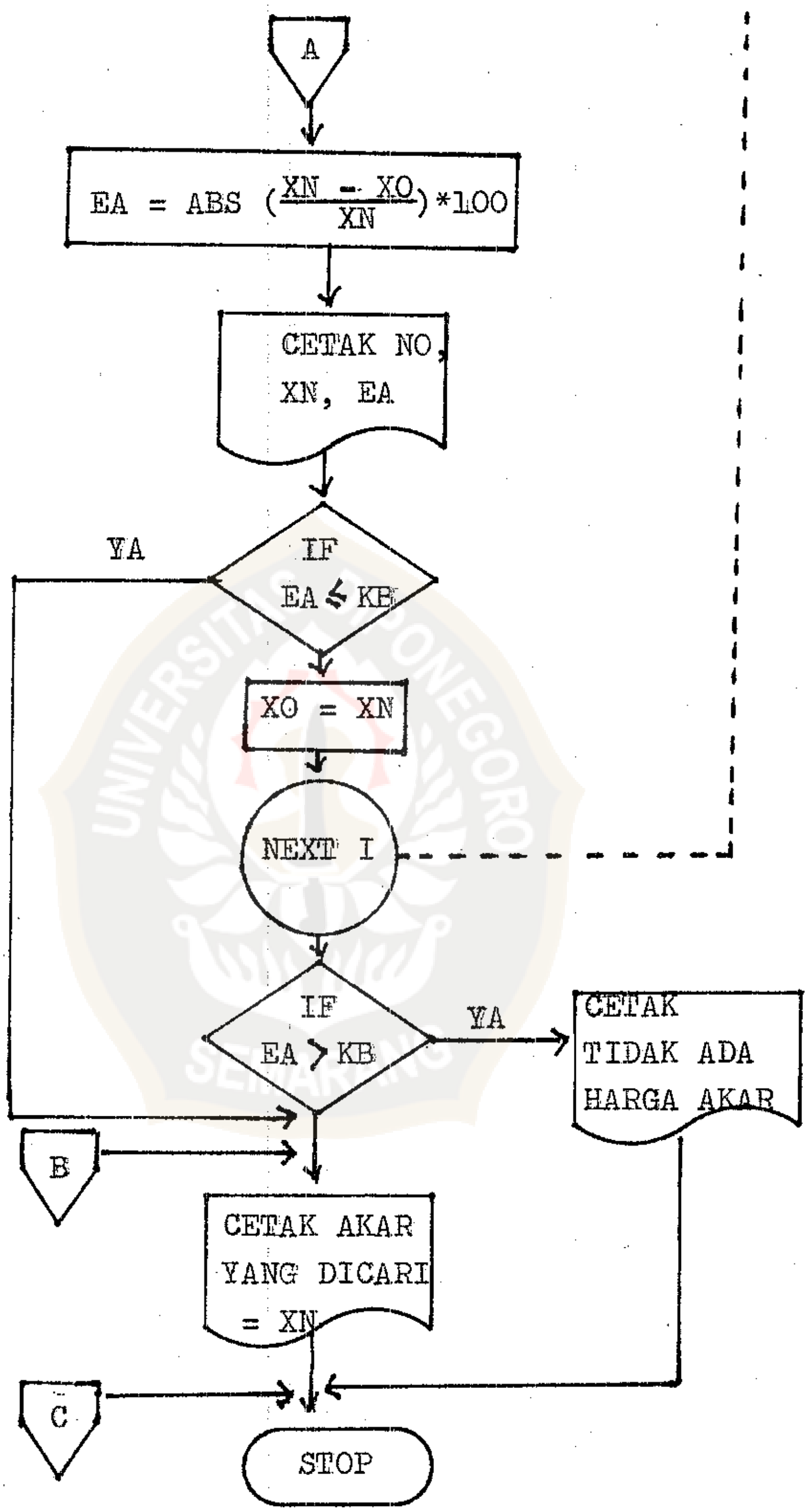
$$F'(X) = -\,\frac{4}{7}\,X^3 + \frac{9}{7}\,X^2 + \frac{4}{7}\,X$$

$F'(X) < 1$ untuk $-1 < X < 1$

Sehingga $F'(X)$ konvergen untuk $-1 < X < 1$

Flow - Chart (diagram alirnya adalah) :





XO = Harga Pendekatan Awal.

KB = Kesalahan Yang Dapat Diterima.

PM = Pengulangan Maksimum.

EA = Harga Kesalahan dalam Proses.

Sehingga Program BASIC dari metode Pendekatan Berturutan adalah sebagai berikut :

```
5   DIM X(50)
10  REM PROGRAM UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
15  REM DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
20  REM OLEH ARIAWAN D RACHMANTO
25  DEF FNG(X)=X^4-3*X^3-2*X^2+7*X+3
30  DEF FNF(X)=(X^4-3*X^3-2*X^2+3)/(-7)
40  INPUT "MASUKKAN HARGA PENDEKATAN AWAL                    =";X(1)
50  INPUT "MASUKKAN KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA            =";KB
60  INPUT "MASUKKAN PENGULANGAN MAKSIMUM                     =";PM
65  OPEN "o",#3,"lpt1"
80  PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL "
90  PRINT#3,TAB(5);"DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN"
100 PRINT#3,TAB(5);"========================================"
110 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENDEKATAN AWAL                  =";X(1)
120 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM             =";PM
130 PRINT#3,TAB(15);"HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA =";KB
131 PRINT#3,"           "
132 IF ABS (FNG(X(1)))<KB GOTO 260
135 PRINT#3,TAB(15);"NO";TAB(30);"XN";TAB(45);"F(X)"
136 PRINT#3,TAB(15);STRING$(40,"-")
140 FOR I=2 TO PM
145 R=I-1
150 X(I)=FNF(X(R))
170 EA=ABS((X(I)-X(R))/X(I))*100
180 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(25);X(I);TAB(40);FNG(X(I))
190 IF ABS(FNG(X(I)))<=KB GOTO 240
210 NEXT I
220 IF ABS(FNG(X(I)))>KB GOTO 280
230 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(30);XN
240 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                        = ";X(I)
250 GOTO 290
260 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                        = ";X(1)
270 GOTO 290
280 PRINT#3,TAB(15);"HARGA AKAR UNTUK PENDEKATAN INI KURANG TEPAT"
290 END
```

```
HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL
DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
========================================
          HARGA PENDEKATAN AWAL                = 2
          HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM           = 20
          HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = .0000009

          NO          XN              F(X)
          ----------------------------------------
           2       1.857143        1.781757
           3       1.602606        3.32981
           4       1.126919        5.667925
           5       .3172154        4.933622
           6      -.3875878        .1836798
           7      -.4138277        2.635002E-03
           8      -.4142042        6.41346E-05
           9      -.4142133        1.66893E-06
           10     -.4142136        2.384186E-07
          AKAR YANG DICARI                     = -.4142136
```

```
5   DIM X(50)
10  REM PROGRAM UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
15  REM DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
20  REM OLEH ARIAWAN D RACHMANTO
25  DEF FNG(X)=X^4-3*X^3-2*X^2+7*X+3
30  DEF FNF(X)=(X^4-3*X^3+7*X+3)/(2*X)
40  INPUT "MASUKKAN HARGA PENDEKATAN AWAL                    =";X(1)
50  INPUT "MASUKKAN KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA            =";KB
60  INPUT "MASUKKAN PENGULANGAN MAKSIMUM                     =";PM
65  OPEN "O",#3,"LPT1"
80  PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL "
90  PRINT#3,TAB(5);"DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN"
100 PRINT#3,TAB(5);"=================================="
110 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENDEKATAN AWAL                 =";X(1)
120 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM            =";PM
130 PRINT#3,TAB(15);"HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA =";KB
131 PRINT#3,"                    "
132 IF ABS(FNG(X(1)))<KB GOTO 260
135 PRINT#3,TAB(15);"NO";TAB(30);"XN";TAB(45);"F(X)"
136 PRINT#3,TAB(15);STRING$(40,"-")
140 FOR I=2 TO PM
145 R=I-1
150 X(I)=FNF(X(R))
170 EA=ABS((X(I)-X(R))/X(I))*100
180 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(25);X(I);TAB(40);FNG(X(I))
190 IF ABS(FNG(X(I)))<=KB GOTO 240
210 NEXT I
220 IF ABS(FNG(X(I)))>KB GOTO 280
230 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(30);XN
240 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                    = ";X(I)
250 GOTO 290
260 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                    = ";X(1)
270 GOTO 290
280 PRINT#3,TAB(15);"HARGA AKAR UNTUK PENDEKATAN INI KURANG TEPAT"
290 END
```

```
HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL
DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
==================================
          HARGA PENDEKATAN AWAL                 = 2
          HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM            = 20
          HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = .0009

          NO          XN              F(X)
          ----------------------------------------
           2          2.25            8.203125E-02
           3          2.268229        4.830837E-02
           4          2.278878        3.119373E-02
           5          2.285722        .0212307
           6          2.290367        1.493454E-02
           7          2.293627        .0107441
           8          2.29597         7.850647E-03
           9          2.297679        5.800247E-03
          10          2.298941        4.320145E-03
          11          2.299881        3.236771E-03
          12          2.300585        2.433777E-03
          13          2.301114        1.838684E-03
          14          2.301513        1.390457E-03
          15          2.301815        1.058579E-03
          16          2.302045        8.010865E-04
          AKAR YANG DICARI                      =  2.302045
```

```
5   DIM X(100)
10  REM PROGRAM UNTUK MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL
15  REM DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
20  REM OLEH ARIAWAN D RACHMANTO
25  DEF FNG(X)=X^4-3*X^3-2*X^2+7*X+3
30  DEF FNF(X)=(X^4-2*X^2+7*X+3)/(3*X^2)
40  INPUT "MASUKKAN HARGA PENDEKATAN AWAL                    =";X(1)
50  INPUT "MASUKKAN KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA            =";KB
60  INPUT "MASUKKAN PENGULANGAN MAKSIMUM                     =";PM
65  OPEN "o",#3,"lpt1"
80  PRINT#3,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL "
90  PRINT#3,TAB(5);"DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN"
100 PRINT#3,TAB(5);"=================================="
110 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENDEKATAN AWAL                   =";X(1)
120 PRINT#3,TAB(15);"HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM              =";PM
130 PRINT#3,TAB(15);"HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA =";KB
131 PRINT#3,"          "
132 IF ABS(FNG(X(1)))<KB GOTO 260
135 PRINT#3,TAB(15);"NO";TAB(30);"XN";TAB(45);"F(X)"
136 PRINT#3,TAB(15);STRING$(40,"-")
140 FOR I=2 TO PM
145 R=I-1
150 X(I)=FNF(X(R))
170 EA=ABS((X(I)-X(R))/X(I))*100
180 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(25);X(I);TAB(40);FNG(X(I))
190 IF ABS(FNG(X(I)))<=KB GOTO 240
210 NEXT I
220 IF ABS(FNG(X(I)))>KB GOTO 280
230 PRINT#3,TAB(15);I;TAB(30);XN
240 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                      = ";X(I)
250 GOTO 290
260 PRINT#3,TAB(15);"AKAR YANG DICARI                      = ";X(1)
270 GOTO 290
280 PRINT#3,TAB(15);"HARGA AKAR UNTUK PENDEKATAN INI KURANG TEPAT"
290 END
```

HASIL PERHITUNGAN AKAR POLYNOMIAL
DENGAN METODE PENDEKATAN BERURUTAN
==================================

HARGA PENDEKATAN AWAL = 2
HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM = 40
HARGA KESALAHAN YANG DAPAT DITERIMA = 8.999999E-03

NO	XN	F(X)
2	2.083333	.6140528
3	2.130493	.4270506
4	2.161854	.3174038
5	2.184492	.2462483
6	2.201693	.1969376
7	2.215235	.1611271
8	2.22618	.1342001
9	2.235206	.1133766
10	2.242771	9.691143E-02
11	2.249193	8.365059E-02
12	2.254705	7.280255E-02
13	2.259478	6.380653E-02
14	2.263645	5.627156E-02
15	2.267305	4.988861E-02

16	2.27054	4.443264E-02
17	2.273413	.0397377
18	2.275975	3.567028E-02
19	2.27827	3.211975E-02
20	2.280333	2.900887E-02
21	2.282193	2.626801E-02
22	2.283874	2.384281E-02
23	2.285397	2.168274E-02
24	2.286781	1.976013E-02
25	2.288041	1.804161E-02
26	2.289189	1.649475E-02
27	2.290238	1.510429E-02
28	2.291198	1.384735E-02
29	2.292077	1.271248E-02
30	2.292884	.0116806
31	2.293625	.010746
32	2.294305	9.897232E-03
33	2.294932	9.117126E-03
34	2.295509	8.407592E-03

AKAR YANG DICARI = 2.295509

Dari 3 program diatas, dengan menganti pernyataan nomer 30 kita dapatkan 3 harga akar yang berbeda yairu :

$X_1 = - 0,4142136$

$X_2 = 2,302045$

$X_3 = 2,295509$

Sedangkan X_4 dapat kita hitung dengan menganti lagi pernyataan nomer 30 dalam program.

Syarat yang ditentukan untuk mengganti fungsi dari pernyataan 30 ialah bahwa fungsi tersebut mempunyai harga yang lebih kecil 1 dan lebih besar dari -1 untuk harga turunan pertamanya ($F'(X) < 1$, untuk suatu harga X).

Jika syarat diatas tidak dapat dipenuhi, untuk suatu fungsi F(X) maka fungsi tersebut tidak dapat dipakai.

Harga pendekatan awal yang digunakan adalah sebuah bilangan yang dapat membuat fungsi tersebut konvergen.

2.3. METODE GRAEFFE'S

Dua metode penyelesaian yang terdahulu kita dapat menentukan harga pendekatan dari akar persamaan polinomial.

Jika ada fungsi :

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_{n-1}X + a_n \qquad (2.3.1)$$

$$= (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) \ldots (X-\alpha_n)$$

dan juga terdapat :

$$f(-X) = (-X)^n + a_1(-X)^{n-1} + a_2(-X)^{n-2} + \ldots \ldots$$

$$- a_{n-1}X + a_n \qquad (2.3.2)$$

$$= (-X-\alpha_1)(-X-\alpha_2)(-X-\alpha_3) \ldots \ldots (-X-\alpha_n)$$

Dari (2.3.1) dan (2.3.2) dapat dihasilkan fungsi $\varphi(X)$ dimana didefinisikan oleh :

$$\varphi(X) = (-1)^n f(X) f(-X)$$

$$= (-1)^n (X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \ldots \ldots (X-\alpha_n)(-X-\alpha_1)$$

$$(-X-\alpha_2) \ldots \ldots (-X-\alpha_n)$$

$$= (-1)^n (-1)^n (X-\alpha_1) \ldots \ldots (X-\alpha_n)(X+\alpha_1) \ldots$$

$$\ldots \ldots (X+\alpha_n)$$

$$= (-1)^{2n} (X-\alpha_1) \ldots \ldots (X-\alpha_n)(X+\alpha_1) \ldots$$

$$\ldots (X+\alpha_n)$$

$$= (X^2-\alpha_1^2)(X^2-\alpha_2^2) \ldots \ldots (X^2-\alpha_n^2)$$

Sehingga :

$$\varphi(X) = (X^2-\alpha_1^2)(X^2-\alpha_2^2) \ldots \ldots (X^2-\alpha_n^2) \qquad (2.3.3)$$

Pada mulanya $\varphi(X)$ adalah sebuah polinomial yang berisi besaran yang sama, kita batasi untuk polinomial

$$f_2(X) = \varphi(\sqrt{X}) = (X-\alpha_1^2)(X-\alpha_2^2) \ldots (X^2-\alpha_n^2) \qquad (2.3.4)$$

dimana akar-akar dari $f_2(X) = 0$ adalah akar pangkat dua dari persamaan (2.3.1).

Akibat dari pengulangan ini didapatkan sebuah deret polinomial $f_2(X)$; $f_4(X)$; $f_8(X)$; . . . . dari :

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$$

Andaikan n=3 maka

$$f(X) = a_0X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 = 0$$

$$a_0X^3 + a_2X = - a_1X^2 - a_3 = -(a_1X^2 + a_3)$$

$$(a_0X^3 + a_2X)^2 = (a_1X^2 + a_3)^2$$

$$a_0{}^2X^6 + 2a_0a_2X^4 + a_2{}^2X^2 = a_1{}^2X^4 + 2a_1a_3X^2 + a_3{}^3$$

$$a_0{}^2X^6 + (2a_0a_2 - a_1{}^2)X^4 + (a_2{}^2 - 2a_1a_3)X^2 - a_3{}^2 = 0$$

$X_1 = X^2$ maka

$$a_0{}^2X_1^3 + (2a_0a_2 - a_1{}^2)X_1{}^2 + (a_2{}^2 - 2a_1a_3)X_1 - a_3{}^2 = 0$$

Sehingga $f_2(X) = a_0{}^2X_1{}^3 + (2a_0a_2 - a_1{}^2)X_1{}^2 + (a_2{}^2 - 2a_1a_3)X_1 - a_3{}^2 = 0$

begitu seterusnya dengan jalan yang sama didapat $f_4(X)$; $f_8(X)$; $f_{16}(X)$, maka persamaannya menjadi

$$f_m(X) = (X - \alpha_1{}^m)(X - \alpha_2{}^m) \ldots (X - \alpha_n{}^m) = 0 \qquad (2.3.5)$$

dimana m adalah bilangan bulat kelipatan 2, sehingga persamaan tersebut mempunyai akar-akar $\alpha_1{}^m$, $\alpha_2{}^m$, ..., $\alpha_n{}^m$.

Koefisien dari $f_m(X)$ adalah ditentukan dari koefisien polinomial yang terdahulu. Dengan cara ini akan menghasilkan sebuah persamaan yang mempunyai akar yang berbeda, karena persamaan akar-akar yang demikian dapat didekati oleh fungsi-fungsi yang sederhana dari koefisiennya.

Jika akar-akar dari (2.3.1) adalah riil/nyata dan $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_n|$ dengan pertimbangan :

$$\left|\frac{\alpha_2{}^m}{\alpha_1{}^m}\right|, \left|\frac{\alpha_3{}^m}{\alpha_2{}^m}\right|, \ldots\ldots, \left|\frac{\alpha_n{}^m}{\alpha_{n-1}{}^m}\right|$$

Semua dapat dibuat sekecil mungkin oleh m yang cukup besar.

Dari (2.3.5) diperoleh :

$$f_m(X) = X^n - (\alpha_1{}^m + \ldots)X^{n-1} + (\alpha_1{}^m \alpha_2{}^m + \ldots)X^{n-2} -$$

$$(\alpha_1^m \alpha_2^m \alpha_3^m + \ldots\ldots)X^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$(-1)^n \alpha_1^m \alpha_2^m \ldots\ldots\ldots \alpha_n^m \qquad (2.3.6)$$

Persamaan (2.3.6) dapat ditulis dalam bentuk :

$$X^n - A_1X^{n-1} + A_2X^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n A_n \qquad (2.3.7)$$

dimana :

$$A_1 = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots\ldots + \alpha_n^m$$
$$A_2 = \alpha_1^m \alpha_2^m + \alpha_1^m \alpha_3^m + \ldots + \alpha_1^m \alpha_n^m + \alpha_2^m \alpha_3^m + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}^m \alpha_n^m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \alpha_1^m \alpha_2^m \alpha_3^m \ldots\ldots \alpha_n^m$$

Sehingga dapat diperoleh pendekatan-pendekatan :

$$\alpha_1^m = A_1 \; ; \; \alpha_2^m = \frac{A_2}{A_1} \; ; \ldots\ldots ; \alpha_n^m = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

Dengan demikian kita dapatkan harga akar ke n, mungkin mendekati harga-harga dari akar-akar : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$ dari (2.3.1).

Karena tanda dari akar itu belum ditentukan, maka dapat ditentukan dengan substitusi. Yaitu jika α_1 adalah salah satu akar persamaan tersebut, jika $f(\alpha_1) > f(-\alpha_1)$ maka $\alpha_1 = -\alpha_1$ tetapi jika tidak maka $\alpha_1 = \alpha_1$.

Atau dapat juga dengan jalan memecah dahulu polinomial tersebut menjadi 2 yaitu :

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

dengan harga n adalah genap.

Sehingga :

$$a_1 X^{n-1} + a_3X^{n-3} + \ldots + a_{n-1}X = -X^n - a_2X^{n-2} - \ldots\ldots - a_{n-2}X^2 - a_n$$

Misalkan :

$$g(X) = -X^n - a_2 X^{n-2} - \ldots\ldots - a_n$$
$$h(X) = a_1X^{n-1} + a_3X^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1}X$$

Akar dari polinomial f(X) adalah :

$$\alpha_1 \; ; \; \alpha_2 \; ; \; \alpha_3 ; \ldots\ldots\ldots ; \alpha_n$$

Jika akar polinomial f(X) diatas disubstitusikan kedalam g(X) dan h(X) akan didapat :

	g(X)	h(X)	Tanda Akar
$\lvert\alpha_1\rvert$	+	+	+
$\lvert\alpha_2\rvert$	-	-	+
$\lvert\alpha_3\rvert$	+	-	-
$\lvert\alpha_4\rvert$	-	+	-
....	......	......	......
$\lvert\alpha_n\rvert$	......	.....	......

Jadi jika terjadi persamaan tanda dari harga g(X) dan h(X) maka tanda dari akar persamaan tersebut adalah positip, tetapi jika terjadi perbedaan tanda dari harga g(X) dan h(X) maka akar persamaan tersebut adalah negatip. Sehingga sampai semua tanda-tanda dari akar dapat diketahui semuanya.

Dengan 2 cara diatas maka tanda dari akar-akar persamaan dapat kita tentukan. Jika akar yang kita dapatkan adalah akar kompleks, maka keadaan ini lebih sukar karena dalam komputer tidak dikenal adanya akar imaginer.

Jika $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, sementara akar-akar yang lainnya lebih kecil artinya, kebenaran pada bagian pertama dari (2.3.6) adalah pendekatan oleh :

$$X^n - (\alpha_1^m + \alpha_2^m)\, X^{n-1} + (\alpha_1^m \alpha_2^m)\, X^{n-2} = 0$$

Dari persamaan diatas dapat dilihat bahwa α_1^m dan α_2^m adalah akar pendekatan dari persamaan kwadrat :

$$X^2 - A_1 X + A_2 = 0,$$

sementara itu jika α_r dan α_{r+1} adalah akar-akar yang sama besarnya maka didapat persamaan :

$$A_{r-1} X^2 - A_r X + A_{r+1} = 0 \qquad (2.3.8)$$

menghasilkan pendekatan α_r^m dan α_{r+1}^m

Dengan diberikan harga m yang mungkin yang mana α_r ditunjukkan dari perhitungan persamaan asal.

Setelah langkah yang diperlukan cukup, hal ini benar dalam (2.3.6) jika akar-akar ini real dan berlainan, koeffisien A_1, A_2, ... A_n akan didekati dengan pendekatan berulang-ulang.

Akan tetapi jika $|\alpha_r| = |\alpha_{r+1}|$ maka tidak benar untuk koeffisien A_r diatas.

Keuntungannya disini didapatkan harga pendekatan dari semua harga akar, metode Graeffe's rupanya kurang mengembirakan bagi pemakai peralatan otomatis.

Kekeliruan memasukkan pada tingkat awal, punya pengaruh dalam membuat masalah baru.

Koeffisien dalam (2.3.7) dapat dihitung dari pergandaan $(-1)^n$ f(X).f(-X) dan kemudian memindahkan bagian dari persamaan sehingga bagian yang dipindahkan sama dengan nol.

Sebagai contoh diambil :

$$f(X) = a_0 X^6 + a_1 X^5 + a_2 X^4 + a_3 X^3 + a_4 X^2 + a_5 X + a_6$$

$$(-1)^6 f(X) = a_0 X^6 - a_1 X^5 + a_2 X^4 - a_3 X^3 + a_4 X^2 - a_5 X + a_6$$

$$(-1)^6 f(X) f(-X) = a_0^2 X^{12} - (a_1^2 - 2 a_0 a_2) X^{10} + (a_2^2 - 2 a_1 a_3 + 2 a_0 a_4) X^8 - (a_3^2 - 2 a_2 a_4 + 2 a_1 a_5 - 2 a_0 a_6) X^6 + (a_4^2 - 2 a_3 a_5 + 2 a_2 a_6) X^4 - (a_5^2 - 2 a_4 a_6) X^2 + a_6^2 = 0$$

atau dengan jalan :

$$a_0 X^6 + a_1 X^5 + a_2 X^4 + a_3 X^3 + a_4 X^2 + a_5 X + a_6 = 0$$

$$a_0 X^6 + a_2 X^4 + a_4 X^2 + a_6 = -a_1 X^5 - a_3 X^3 - a_5 X$$

$$a_0 X^6 + a_2 X^4 + a_4 X^2 + a_6 = (-1)(a_1 X^5 + a_3 X^3 + a_5 X)$$

$$(a_0 X^6 + a_2 X^4 + a_4 X^2 + a_6)^2 = (-1)^2 (a_1 X^5 + a_3 X^3 + a_5 X)^2$$

$a_0^2X^{12} + a_2^2X^8 + a_4^2X^4 + a_6^2 + 2a_0a_2X^{10} + 2a_0a_4X^8 + 2a_0a_6X^6$

$2a_2a_4X^6 + 2a_2a_6X^4 + 2a_4a_6X^2 = a_1^2X^{10} + a_3^2X^6 + a_5^2X^2 +$

$2a_1a_3X^8 + 2a_1a_5X^6 + 2a_3a_5X^4$

$a_0^2X^{12} - (a_1^2 - 2a_0a_2)X^{10} + (a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3)X^8 - (a_3^2 +$

$2a_1a_5 - 2a_2a_4 - 2a_0a_6)X^6 + (a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6)X^4 - (a_5^2 -$

$2a_4a_6)X^2 + a_6^2 = 0$

Sehingga jika dimisalkan $X = X^2$ maka dari persamaan diatas didapat :

$a_0^2X^6 - (a_1^2 - 2a_0a_2)X^5 + (a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3)X^4 - (a_3^2 +$

$2a_1a_5 - 2a_2a_4 - 2a_0a_6)X^3 + (a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6)X^2 - (a_5^2 -$

$2a_4a_6)X + a_6^2 = 0$

Sehingga :

$$f_2(X) = a_0^2X^6 - (a_1^2 - 2a_0a_2)X^5 + (a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3)X^4$$
$$- (a_3^2 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6)X^3 + (a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6)X^2$$
$$- (a_5^2 - 2a_4a_6)X + a_6^2 + 2a_2a_4\, X^3$$

Demikian seterusnya sehingga dapat kita temukan $f_2(X)$; $f_4(X)$; $f_8(X)$; . . . .

Dapat disimpulkan untuk harga-harga koefisien adalah

$$_{j+1}A_i = (-1)^i \left[{}_jA_i^2 + 2 \sum_{l=1}^{i} (-1)^l \, {}_jA_{i+l} \cdot {}_jA_{i-l} \right] \quad (2.3.9)$$

dengan $0 \leq i \leq n$ dan $0 \leq j \leq m$.

Sehingga ${}_0A_i = a_i$. Dimana j+1 adalah menyatakan koefisien untuk pendekatan ke j+1. Dengan demikian didapat bentuk :

$$f_2^k(X) = \sum_{i=0}^{n} {}_kA_i X^{n-i} \text{ dimana } 1 \leq k \leq m \quad (2.3.10)$$

${}_kA_i$ untuk persamaan diatas artinya ialah nilai dari A_i yang didapat setelah melewati pengulangan sebanyak k; ${}_0A_i$ adalah nilai pertama dari A_i.

2.3.1. Metode Penyelesaian Dengan Komputer :

Metode Graeffe's dalam program yang berikut adalah untuk persamaan (2.3.3) dan (2.3.4). Data untuk program adalah :

N = derajad dari poli nomial.

PMAX = pengulangan maksimum yang kita inginkan.

BAK = batas maksimum koeffisien B(I) yang diijinkan.

EPS = bilangan positif yang sangat kecil yang digunakan untuk menguji harga persamaan polinomial setelah akarnya dimasukkan.

A(I) = besarnya **koeffisien** untuk ke I.

Program (langkah) pertama adalah membagi koeffisien A(I), I = 0,1,...,n oleh A(0) yaitu :

$$A(I) = \frac{A(I)}{A(0)} \qquad (2.3.11)$$

dimana I = 1,2,....,n

A(0) = 1

Karena metode Graeffe's hanya menghasilkan akar yang mungkin, untuk menetapkan tanda akar yang mungkin ada 2 cara yaitu :

1. Dengan harga polinomial asal.
2. Dengan perubahan tanda pada polinomial tersebut.

Tetapi untuk proses perhitungan komputer cara yang digunakan adalah cara pertama.

Harga-harga dari A(I) tidak akan hilang selama proses pencarian akar.

Koeffisien $_kA_i$ dan $_{k+1}A_i$ digambarkan dalam bagian (2.3.11), jika ditulis kembali maka :

$$C(I) = {}_kA(I) \qquad .(2.3.12)$$

$$B(I) = {}_{j+1}A(I)$$

Kemudian, salah satu nilai-nilai yang pertama untuk C(I), dimana :

$$C(I) = {}_0A(I) = A(I) \qquad (2.3.13)$$

B(I) untuk satu pengulangan mungkin diievaluasi dari :

B(0) = 1

$$B(0) = 1$$

$$B(I) = (-1)^{i}\left[C(I)^{2} + 2\sum_{L=1}^{I} (-1)^{L}\, C_{I+L}\, C_{I-L}\right] \qquad (2.3.14)$$

$$I = 1,2,3,\ldots,N.$$

Setelah menghitung B(I), I = 1,2,3,....,N, masing-masing B(I) dicoba untuk menjamin bahwa nilai B(I) adalah berada diantara bilangan $[-BAK , -1/BAK]$; 0 ; $[1/BAK , BAK]$

Testnya adalah dengan :

$$|B(I)| < BAK \;,\quad B(I) \neq 0$$
$$|B(I)| > 1/BAK \qquad (2.3.15)$$
$$I = 1,2,3,\ldots,N.$$

Sebaiknya semua B(I) melewati kedua percobaan-percobaan test kemudian proses pencarian akar dilanjutkan.

C(I) adalah menunjukkan perhitungan dari nilai-nilai baru B(I), adalah :

$$C(I) = B(I) \qquad (2.3.16)$$
$$I = 1,2,3,\ldots,N$$

Kemudian untuk pengulangan B(I) yang selanjutnya dihitung dengan menggunakan cara (2.3.14). Persamaan (2.3.14) ; (2.3.15) dan (2.3.16) diulang sampai tidak ada harga B(I) seperti pada pengujian (2.3.15) dimana akar-akarnya nyata dan berbeda α_i, dari persamaan :

$$f_n(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^{n-i}$$

Kemudian untuk menentukan pengujian $+\bar{\alpha}_i$ dan $-\bar{\alpha}_i$ yang menghasilkan besaran yang lebih kecil dan tanda akar akan ditunjukkan oleh α_i.

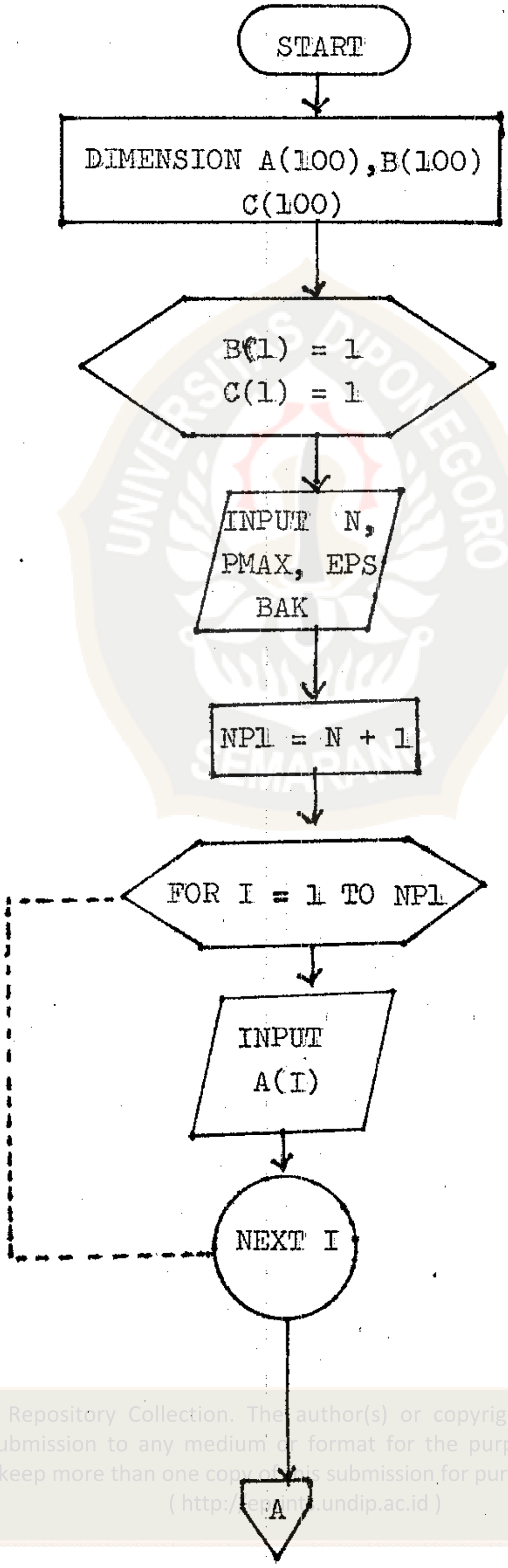
Jika $|f_n(\bar{\alpha}_i)| > |f_n(-\bar{\alpha}_i)|$ maka $\alpha_i = -\bar{\alpha}_i$, tetapi jika tidak maka $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$.

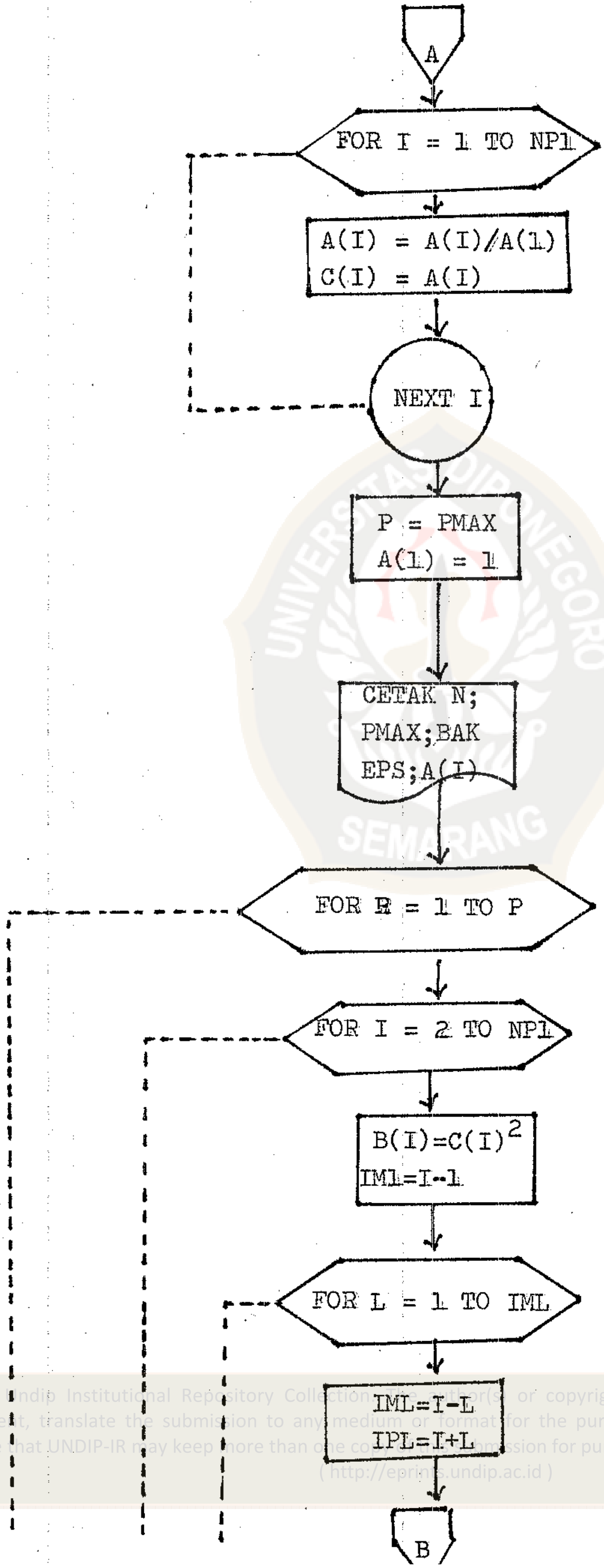
Sebagai pengujian terakhir adalah jika telah didapat harga harga akar yang memenuhi :

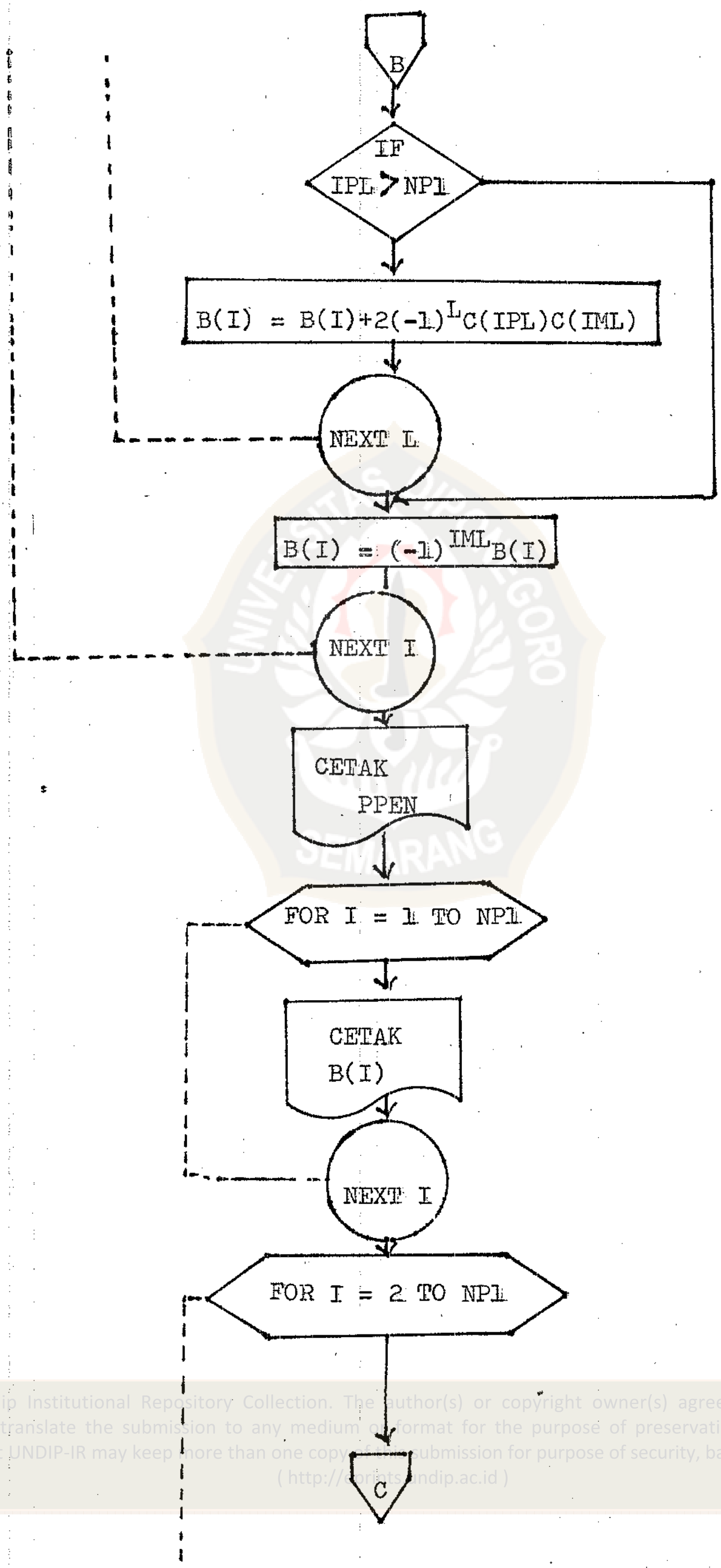
$$|f_n(\alpha_i)| < \varepsilon \qquad (2.3.17)$$

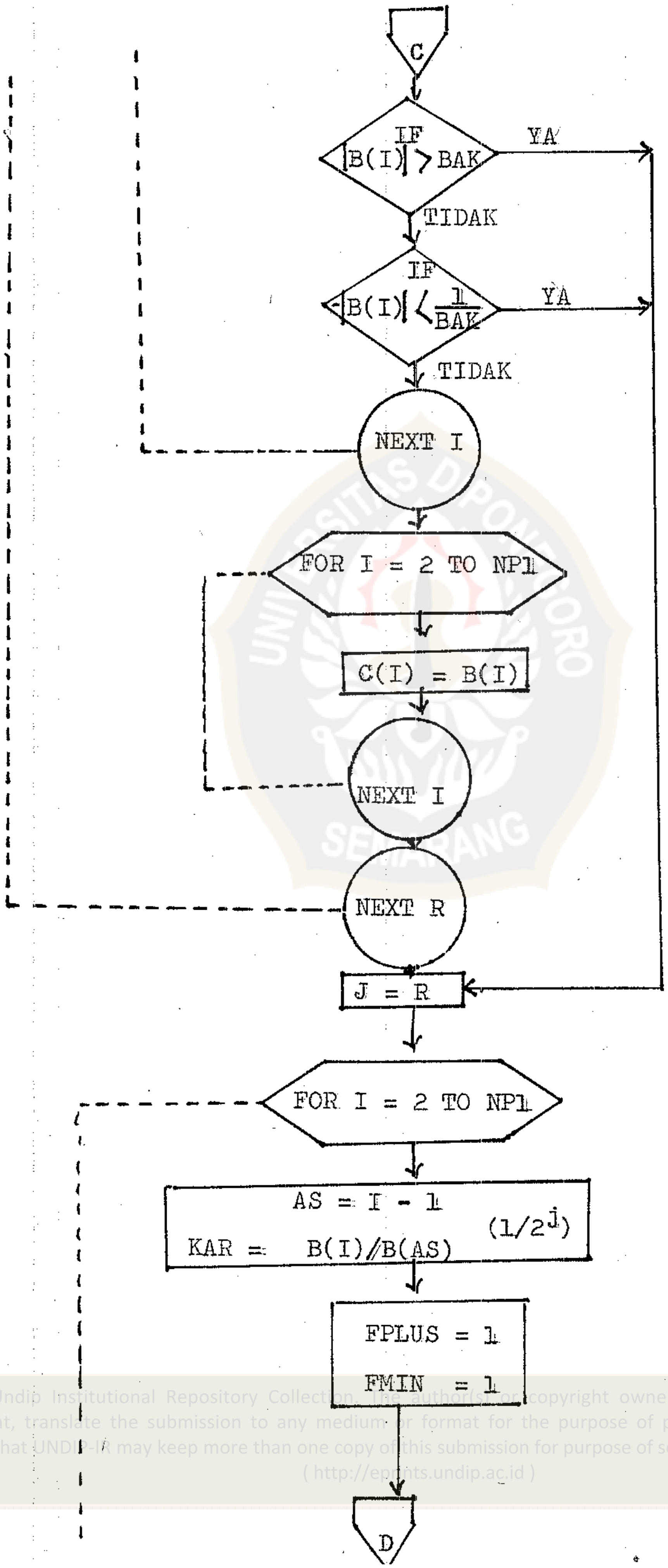
Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka tidak ada harga akar yang memenuhi.

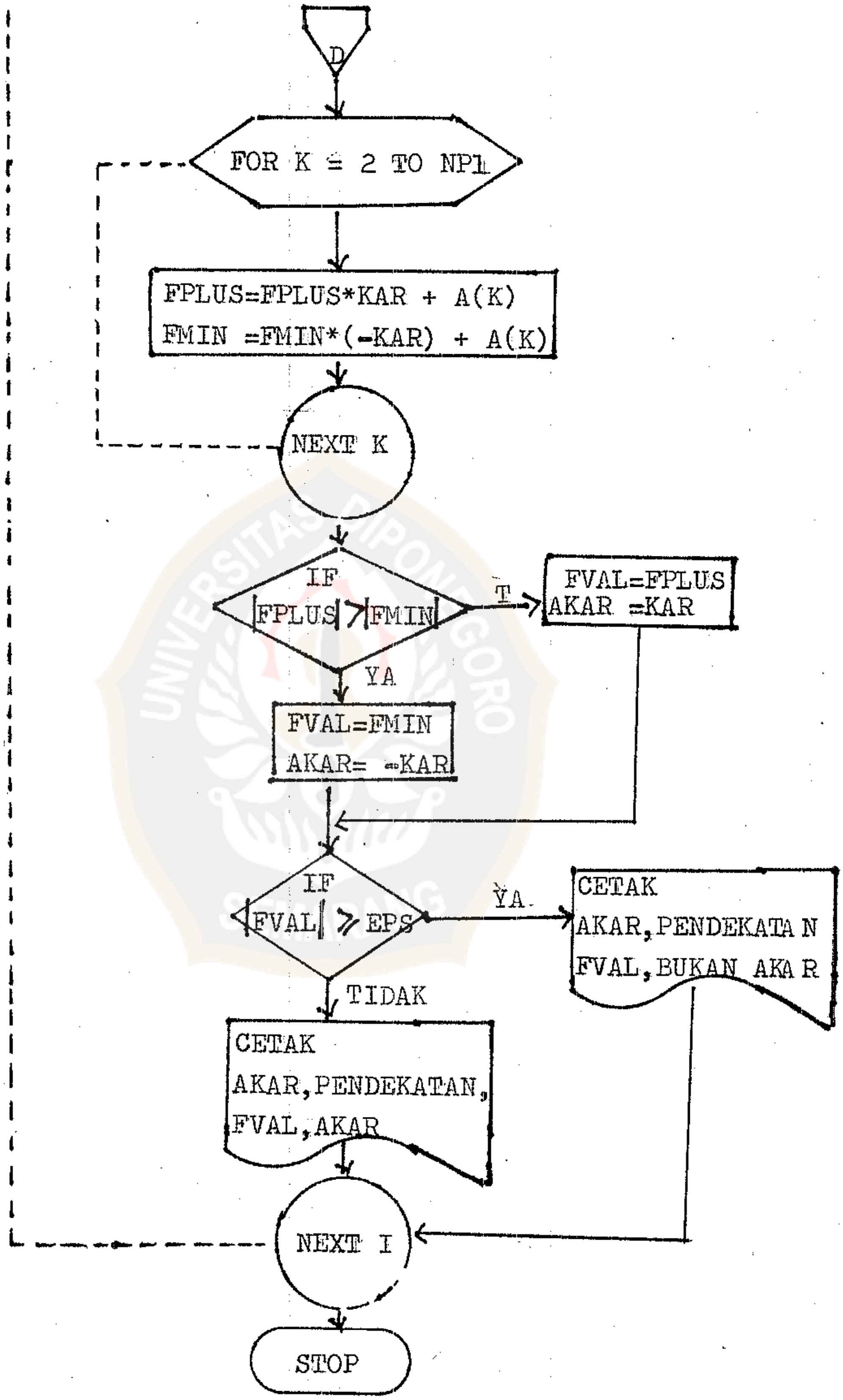
2.3.2. Program Flowchart Metode Graeffe.




A
FOR I = 1 TO NP1
A(I) = A(I)/A(1)
C(I) = A(I)
NEXT I
P = PMAX
A(1) = 1
CETAK N;
PMAX;BAK
EPS;A(I)
FOR R = 1 TO P
FOR I = 2 TO NP1
B(I)=C(I)^2
IM1=I-1
FOR L = 1 TO IM1
IML=I-L
IPL=I+L
B


B
IF
IPL > NP1
B(I) = B(I)+2(-1)^L C(IPL)C(IML)
NEXT L
B(I) = (-1)^IML B(I)
NEXT I
CETAK
PPEN
FOR I = 1 TO NP1
CETAK
B(I)
NEXT I
FOR I = 2 TO NP1
C


C
IF
|B(I)| > BAK
YA
TIDAK
IF
|B(I)| < 1/BAK
YA
TIDAK
NEXT I
FOR I = 2 TO NP1
C(I) = B(I)
NEXT I
NEXT R
J = R
FOR I = 2 TO NP1
AS = I - 1
KAR = B(I)/B(AS) (1/2^j)
FPLUS = 1
FMIN = 1
D



Program BASIC nya adalah :


```
5 REM METODE MENCARI AKAR PERSAMAAN POLYNOMIAL DENGAN METODE GRAEFFE'S
10 REM OLEH ARIAWAN D RACHMANTO
20 DIM A(100),B(100),C(100)
30 B(1)=1
```

```
40 C(1)=1
50 INPUT "MASUKKAN HARGA DERAJAD POLYNOMIAL                 =";N
60 INPUT "MASUKKAN HARGA PENGULANGAN MAKSIMUM               =";PMAX
70 INPUT "MASUKKAN HARGA PERSAMAAN YANG DIJINKAN            =";EPS
80 INPUT "MASUKKAN BATAS ATAS KOEFISIEN B(I)                =";BAK
85 NP1=N+1
90 FOR I= 1 TO NP1
100 INPUT "MASUKKAN HARGA KOEFISIEN PERSAMAAN A(I)          =";A(I)
110 NEXT I
115 OPEN "o",#2,"lpt1"
120 FOR I=2 TO NP1
130 A(I)=A(I)/A(1)
140 C(I)=A(I)
150 NEXT I
160 P=PMAX
170 A(1)=1
172 PRINT#2,TAB(5);"HASIL PERHITUNGAN AKAR DENGAN METODE GRAEFFES"
175 PRINT#2,TAB(5);"=============================================================="
180 PRINT#2,TAB(10);"POLYNOMIAL DERAJAD                           =";N
190 PRINT#2,TAB(10);"PENGULANGAN MAKSIMUM                         =";PMAX
200 PRINT#2,TAB(10);"BATAS ATAS KOEFISIEN B(I)                    =";BAK
210 PRINT#2,TAB(10);"HARGA F(X) YANG DIIJINKAN                    =";EPS
220 FOR I= 1 TO NP1
230 PRINT#2,SPC(5);A(I);
240 NEXT I
250 FOR R= 1 TO P
260 FOR I= 2 TO NP1
265 IM1=I-1
270 B(I)=C(I)^2
280 FOR L= 1 TO IM1
290 IPL=I+L
300 IML=I-L
310 IF IPL>NP1 GOTO 340
320 B(I)=B(I)+2*(-1)^L*C(IPL)*C(IML)
330 NEXT L
340 B(I)=(-1)^(IM1)*B(I)
350 NEXT I
360 FOR I= 2 TO NP1
370 IF ABS (B(I))>BAK GOTO 480
380 IF ABS (B(I))<(1/BAK) GOTO 480
390 NEXT I
400 PRINT#2,TAB(10);"PENDEKATAN KE      =";R
410 FOR I= 1 TO NP1
420 PRINT#2,SPC(5);B(I);
430 NEXT I
440 FOR I= 2 TO NP1
450 C(I)=B(I)
460 NEXT I
470 NEXT R
475 J=PMAX
476 GOTO 486
480 J=R-1
481 FOR I= 2 TO NP1
482 B(I)=C(I)
483 NEXT I
486 PRINT#2,TAB(5);"HARGA AKAR";TAB(20);"HARGA POLYNOMIAL";TAB(40);"KETER
487 D=2^J
488 T=1/D
490 FOR I= 2 TO NP1
492 IM1=I-1
500 KAR=ABS(B(I)/B(IM1))^(T)
```

```
510 FPLUS=1
520 FMIN=1
530 FOR K= 2 TO NP1
540 FPLUS=FPLUS*KAR+A(K)
550 FMIN=FMIN*(-KAR)+A(K)
560 NEXT K
570 IF ABS(FPLUS)>ABS(FMIN) GOTO 610
580 FVAL=FPLUS
590 AKAR=KAR
600 GOTO 630
610 FVAL=FMIN
620 AKAR=(-KAR)
630 IF ABS(FVAL)>=EPS GOTO 660
640 PRINT#2,TAB(5);AKAR;TAB(20);FVAL;TAB(40);"AKAR YANG DICARI"
650 GOTO 670
660 PRINT#2,TAB(5);AKAR;TAB(20);FVAL;TAB(40);"BUKAN HARGA AKAR"
670 NEXT I
700 END
```

```
    HASIL PERHITUNGAN AKAR DENGAN METODE GRAEFFES
    =============================================
         POLYNOMIAL DERAJAD                        = 8
         PENGULANGAN MAKSIMUM                      = 25
         BATAS ATAS KOEFISIEN B(I)                 = 9.9E+37
         HARGA F(X) YANG DIIJINKAN                 = .1
     1       -16       105      -364      715      -792      462      -
 9
         PENDEKATAN KE      = 1
     1       -46       807      -6766      27847      -52074      3623
6084      81
         PENDEKATAN KE      = 2
     1       -502       84471      -5552040      1.287122E+08      -7.7
8      6.837776E+08      -3.114515E+07      6561
         PENDEKATAN KE      = 3
     1      -83062      1.818526E+09      -9.857872E+12      8.066848E
 -4.263194E+17      4.192235E+17      -9.610478E+14      4.304672E+07
         PENDEKATAN KE      = 4
     1      -3.262243E+09      1.685542E+18      -6.790893E+25      5
+31      -1.749846E+35      1.749289E+35      -9.235766E+29      1.853
    HARGA AKAR      HARGA POLYNOMIAL      KETERANGAN
     3.931831        2.739104             BUKAN HARGA AKAR
     3.504099        .2916155             BUKAN HARGA AKAR
     2.987612       -.0736599             AKAR YANG DICARI
     2.344711        1.274109E-02         AKAR YANG DICARI
     1.652353       -1.699448E-03         AKAR YANG DICARI
     .9999801        1.029968E-04         AKAR YANG DICARI
     .467911        -2.861023E-06         AKAR YANG DICARI
     .1206148        0                    AKAR YANG DICARI
```