BAB II

TREE DAN BINARY TREE

2.1 TREE

Definisi 1 :

Suatu tree T adalah himpunan berhingga, tidak kosong dari anggauta-anggauta dimana sebuah anggauta disebut root dan sisanya dipisahkan dalam $m \geq 0$ himpunan bagian -himpunan bagian yang dis-joint yang masing-masing merupakan tree sendiri dan dinamakan subtree.

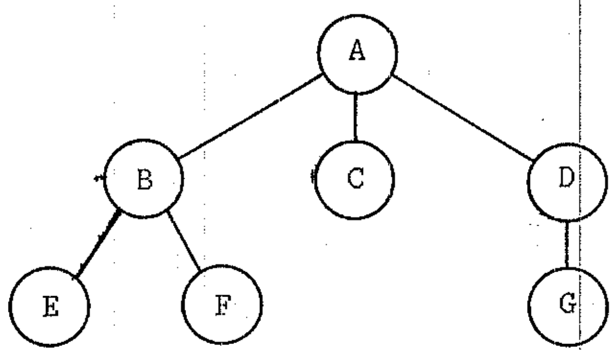
Definisi lain dari suatu tree adalah :

Definisi 2 :

Tree adalah suatu Graph yang :

1. ACYCLIC (Tidak mempunyai cycle)
2. CONNECTED/TERHUBUNG (Antara dua vertex sekurang-kurangnya ada satu lintasan).

Contoh suatu Tree :



Gambar 1

Masing-masing anggota dalam suatu Tree disebut vertex tree. Sebuah Tree dapat juga mempunyai banyak sekali subtree. Masing-masing vertex dapat sebagai root dari Tree dengan 0 atau lebih subtree.

Tree pada gambar 1, mempunyai A sebagai root dengan 3 (tiga) subtree. Masing-masing subtree tersebut mempunyai:

- Root B dengan 2 subtree berakar pada E dan F
- Root C dengan 0 subtree (tanpa subtree)
- Root D dengan 1 subtree berakar pada C

Contoh Suatu Tree dalam kehidupan sehari-hari

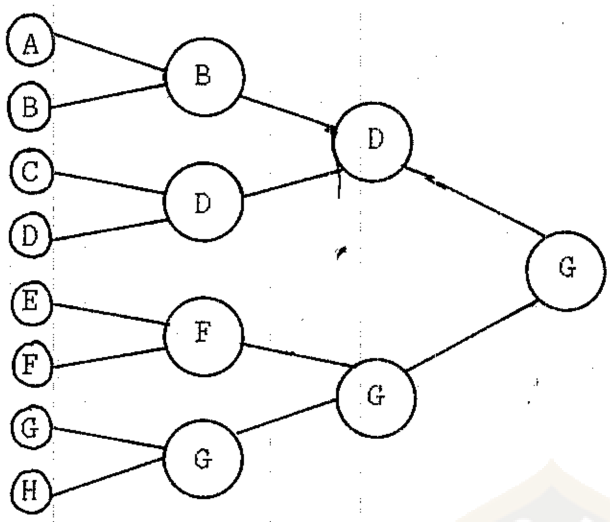
Contoh suatu kejadian sehari-hari yang disajikan dalam Tree adalah sebagai berikut :

Dalam suatu pertandingan sepak bola antar RT diikuti oleh 8 kesebelasan A,B,C,D,E,F,G dan H. Ketentuan pertandingan adalah dengan menggunakan sistim gugur. Apabila disajikan dengan tree, kesebelasan-kesebelasan digambarkan dengan vertex, sedangkan edge menyajikan kesebelasan yang satu bertanding dengan kesebelasan yang lain. Setelah pertandingan berakhir, maka didapat hasil seperti ini:

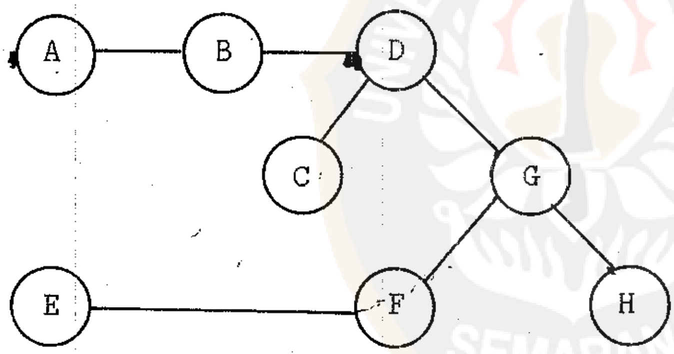
1. A melawan B dimenangkan B
2. C melawan D dimenangkan D
3. E melawan F dimenangkan F
4. G melawan H dimenangkan G
5. B melawan D dimenangkan G
6. F melawan D dimenangkan G

Apabila disajikan dalam diagram kehidupan sehari-hari adalah sebagai Gambar 2.

Gambar 2 tersebut merupakan sistim pertandingan sepak bola antar RT yang telah disebut di atas. Dan apabila disajikan sebagai Tree, menjadi Gambar 3.



Gambar 2



Gambar 3

Definisi 3 :

Leaf suatu Tree adalah sebuah vertex tanpa subtree atau sebuah vertex yang mempunyai degree satu.

Definisi 4 :

Father vertex dari suatu tree adalah root dari suatu subtree. Sedangkan akar-akar dari subtree dinamakan son dari suatu tree.

Definisi 5 :

Degree dari vertex dalam suatu tree merupakan jumlah dari son-nya.

Teorema 1 :

Dalam suatu tree T untuk setiap pasang vertex pasti ada lintasan tunggal yang menghubungkannya.

Bukti :

Karena T merupakan tree, maka T memenuhi persyaratan dari tree yaitu terhubung dan acyclic. Karena T terhubung maka setiap pasang vertex pasti ada lintasan yang menghubungkannya. Tinggal membuktikan tunggalnya lintasan itu. Andaikan lintasan itu tidak tunggal pasti terdapat cycle. Kontradiksi,maka lintasan itu tunggal.

Teorema 2 :

Jika dalam suatu Graph G, setiap dua vertex hanya mempunyai satu lintasan , maka lintasan itu pasti tunggal.

Bukti :

Jika setiap dua vertex hanya mempunyai satu lintasan, maka G terhubung . Jika G mempunyai cycle maka terdapat dua lintasan atau lebih yang menghubungkan setiap dua vertex. Kontradiksi, maka G pasti acyclic. Karena G terhubung dan acyclic, dengan demikian G merupakan tree.

Teorema 3 :

Dalam suatu tree dengan n vertex dan q edge, berlaku : $n = q + 1$.

Bukti :

Dibuktikan dengan induksi matematika.

Untuk $n = 1$ maka T terdiri atas satu vertex tanpa edge. Jadi trbukti untuk $n = 1$.

Diandaikan terbukti untuk n = k maka akan dibuktikan berlaku untuk n = k + 1.

Jika terbukti untuk n = k maka banyaknya edge = k - 1. Dengan demikian untuk n = k + 1, banyaknya edge = (k + 1) - 1 = k.

Terlihat bahwa banyaknya vertex (n) = k + 1 maka banyaknya edge (q) = k .

Dari k + 1 = k + 1 berarti n = q + 1 . Terbukti.

Teorema 4 :

Tiap graph terhubung dengan n vertex dan n - 1 edge merupakan Tree.

Bukti :

Karena graph G terhubung, untuk membuktikan bahwa graph G merupakan tree, cukup dibuktikan bahwa graph G acyclic. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan reductio ad absordum. Andaikan graph G mempunyai cycle sederhana yang terdiri atas m vertex,maka cycle sederhana tersebut mempunyai n edge dimana m < n . Sehingga masih ada sisa vertex sebanyak (n - m) vertex yang berada diluar cycle sederhana tersebut. Karena graph G harus terhubung, maka sekurang-kurangnya ada penambahan (n - m) edge. Sehingga jumlah edge = m + (n - m) = n. Kontradiksi. Jadi G tidak mempunyai cycle (acyclic). Karena G terhubung dan acyclic maka merupakan tree.

Teorema 5 :

Graph G adalah suatu Tree <===> G terhubung dan minimal.

Bukti :

===>Karena graph G merupakan tree maka pasti terhubung dan acyclic, tinggal membuktikan bahwa graph G terhubung minimal. Andaikan tidak terhubung minimal pasti terdapat edge, misal e sedemikian sehingga jika e dihapus, graph G masih terhubung, ini berarti bahwa graph G mempunyai cycle. Kontradiksi.Jadi graph G terhubung minimal.

<=== Graph terhubung minimal berarti G terhubung. Dilain pihak, jika G terhubung minimal mengakibatkan G tidak mempunyai cycle. Jadi graph G acyclic. G merupakan tree karena terhubung dan acyclic.

Teorema 6 :

Suatu Tree dengan dua vertex atau lebih, paling sedikit mengandung dua leaf.

Bukti:

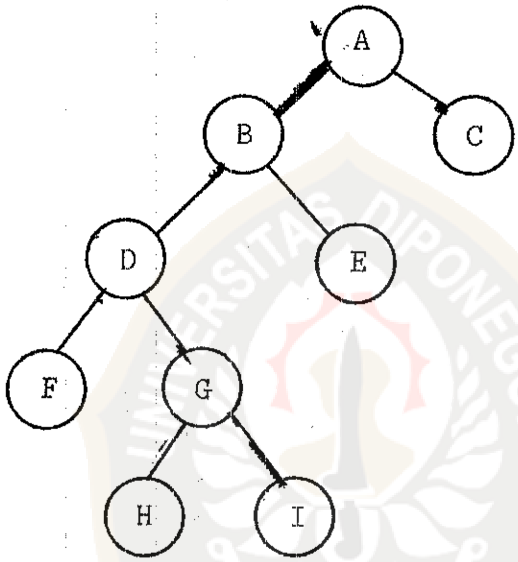
Leaf adalah vertex dari tree yang mempunyai degree 1. Andaikan hanya ada 1 leaf,maka apabila leaf ini dihapus,yang terjadi adalah semua vertex dari sisanya pasti mempunyai degree 2 atau lebih,maka pasti ada cycle.Kontradiksi,yang benar paling sedikit mengandung 2 leaf.

3.2. BINARY TREE

Definisi 6 :

Suatu binary tree adalah tree dengan banyak vertex lebih dari dua dan mempunyai tepat satu vertex dengan degree 2 , sedang yang lain dengan degree 1 atau 3. Vertex dengan degree 2 disebut akar/root dari binary tree tersebut.

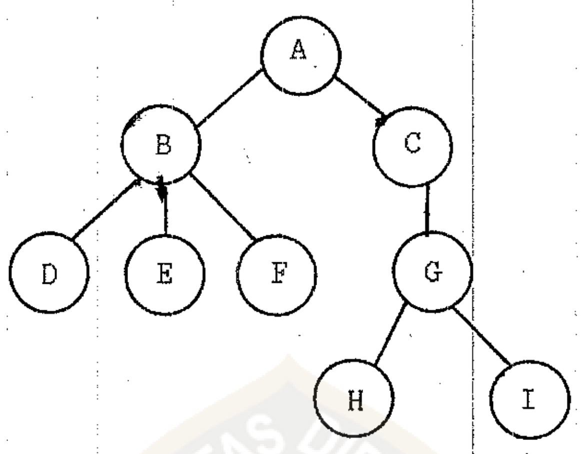
CONTOH BINARY TREE



Gambar 4

Binary tree pada gambar 4 mempunyai 9 vertex dan vertex A merupakan root. Sub tree kiri berakar di B dan sub tree kanan berakar di C. Hal ini ditunjukkan dari branch (cabang) yang berasal dari A ke B di sebelah kiri dan dari A ke C di sebelah kanan. Tidak adanya branch menunjukkan sub tree yang kosong (tidak ada sub tree). Sub tree kanan dari binary tree yang berakar di C adalah kosong.Binary tree berakar di C adalah kosong.

CONTOH BUKAN BINARY TREE



Gambar 5

Gambar 5 bukan merupakan binary tree karena tidak sesuai dengan definisi 6 yaitu :

1. Terdapat 2 vertex dengan degree 2 yaitu A dan C
2. Vertex B mempunyai degree 4.

Definisi 7 :

Jika n_1 adalah root dari binary tree dan n_2 adalah root kiri atau root kanan dari subtree, maka n_1 disebut father dari n_2.

Definisi 8 :

Jika n_1 merupakan father dari n_2 maka n_2 disebut son kiri atau son kanan dari n_1.

Definisi 9 :

Leaf dari binary tree adalah vertex yang tidak mempunyai son kiri ataupun son kanan atau dengan kata lain vertex yang mempunyai degree 1 (pengertian degree pada binary tree sama dengan pengertian degree pada tree).

Definisi 10 :

Vertex n_1 merupakan ancestor dari vertex n_2, jika n_1 adalah father dari beberapa descendant n_2.

Definisi 11 :

Jika n_1 adalah ancestor dari n_2, maka n_2 adalah descendant dari n_1. Vertex n_2 adalah descendant kiri dari vertex n_1, jika n_2 son kiri dari n_1 atau descendant dari son kiri vertex n_1.
Pengertian descendant kanan analog dengan pengertian descendant kiri.

Definisi 12 :

Dua vertex dikatakan bersaudara apabila mereka merupakan son kiri dan son kanan dari father yang sama.

Definisi 13 :

Suatu vertex dalam binary tree (V_i) dikatakan mempunyai level l_i bila V_i mempunyai jarak l_i dari root. Root dari binary tree mempunyai level 0.

Definisi 14 :

Level maksimum (l_{max}) yang ada pada binary tree merupakan tinggi dari binary tree.

Teorema 7 :

Banyaknya vertex dalam suatu binary tree selalu ganjil.

Bukti :

Dalam suatu graph telah diketahui bahwa banyaknya vertex dengan degree ganjil adalah genap, sedangkan dalam binary tree kecuali akar/rootnya yang berdegree 2, setiap vertexnya berdegree ganjil. Maka bila n banyaknya vertex di binary tree T, akan berlaku n-1 genap,perka taan lain n adalah ganjil.

Teorema 8 :

Jika p adalah banyaknya leaf dalam suatu binary tree T dengan n vertex maka p = 1/2 (n + 1)

Bukti :

Banyaknya vertex di T = n

Banyaknya vertex dengan degree 1 di T = p

Banyaknya Vertex dengan degree 2 di T = 1 ,

maka banyaknya vertex dengan degree 3 = n-p-1.

Banyaknya edge dari T = 1/2{1*p+2*1+3*(n-p-1)}

Dari theorema sebelumnya diketahui bahwa banyak nya edge dalam sebuah tree dengan n vertex adalah (n-1), maka diperoleh persamaan berikut:

$$1/2\ [\{\ 1*p+2*1+3*(n-p-1)\}] = n-1$$
$$p+2+3n-3p-3 = 2n-2$$
$$-2p-1 = n-2$$
$$2p = n+1$$
$$p = 1/2\ (\ n+1\ )$$

Teorema 9 :

Jika p adalah banyaknya leaf dalam suatu binary tree T dan q adalah banyaknya branch di T maka berlaku p =q+1

Bukti :

Banyaknya vertex dengan degree 1 = p

Banyaknya vertex dengan degree 2 = 1

Banyaknya vertex dengan degree 3 = q-1

Jadi banyaknya vertex adalah n = p+1+(q-1)

Menurut teorema 8 bahwa p=1/2 (n+1), maka

$$p = 1/2 \{(p+q)+1\}$$

$$2p = p + q + 1$$

$$p = q + 1$$

Teorema 10 :

Jika banyak vertex suatu binary tree berlevel k adalah n, maka berlaku $n \leq 2^0+2^1+2^2+ \ldots +2^k$

Bukti :

Pada suatu binary tree, berlaku :

di level 0, paling banyak ada 1 vertex atau 2^0 vertex,

di level 1, paling banyak ada 2 vertex atau 2^1 vertex,

di level 2, paling banyak ada 4 vertex atau 2^2 vertex,

di level k, paling banyak ada 2^k vertex.

Jadi berlaku :

$$n \leq 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k.$$

Teorema 11 :

Tinggi minimum dari suatu binary tree dengan n vertex adalah sama dengan minimum :

$l_{max} = \{ ^2\log (n+1) - 1 \}$ dimana n merupakan bilangan bulat terdekat dengan n.

Bukti :

Dari rumus $(x-1)(x^0 + x^1 + \dots x^n) = x^{n+1} - 1$, diperoleh :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = (2^{k+1} - 1) / (2-1)$$
$$= (2^{k+1} - 1)$$

berdasarkan teorema 10 ,maka :

$$(2^{k+1} - 1) \geqslant n$$
$$2^{k+1} > n+1$$
$$k + 1 > {}^2\log (n+1)$$
$$k > {}^2\log (n+1) - 1$$

Jadi min $l_{max} = \{ {}^2\log (n+1) - 1 \}$

Teorema 12 :

Tinggi maximum dari binary tree dengan n vertex adalah max $l_{max} = (n-1)/2$

Bukti :

Supaya tinggi binary tree dengan n vertex mencapai maximum, maka banyak vertex di setiap level harus minimum, yaitu 2, maka tinggi Maximum yang dapat dicapai oleh binary tree dengan n vertex adalah max $l_{max} = (n-1)/2$.