BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. GRUP

Definisi 2.1.1.

Suatu Grup (G, *) adalah himpunan G beserta hukum komposisi * yang didefinisikan pada G sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma :

1. Tertutup. Untuk setiap a,b dalam G terdapat dengan tunggal c dalam G sedemikian hingga $a * b = c$
2. Assosiatif. Untuk setiap a,b,c dalam G berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Mempunyai elemen identitas e. Yaitu ada elemen e dalam G sedemikian hingga untuk setiap a dalam G berlaku $e * a = a * e = a$.
4. Setiap elemen dalam G mempunyai invers dalam G juga sedemikian hingga $a * a' = a' * a = e$.

Jika definisi 2.1.1. hukum komposisinya disajikan sebagai pergandaan grupnya disebut grup multiplikatif , komposisi dua elemen a dan b ditulis a . b, invers dari elemen a disajikan dengan a^{-1} dan elemen identitas dinyatakan dengan e. Apabila hukum komposisinya penjumlahan , grupnya disebut grup additif, komposisi antara elemen a dan elemen b dinyatakan dengan a + b, invers dari elemen a disajikan dengan -a, dan elemen identitasnya adalah 0.

Contoh :

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots\ldots \overline{n-1}\}$ dengan n $>$ 1 beserta hukum komposisi penjumlahan. Jumlahan dua elemen $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ dalam Z_n dinyatakan dengan $\overline{a} + \overline{b}$, yang didefinisikan sebagai berikut :

$\overline{a} + \overline{b}$ = df $\overline{r}$, dimana $r = (a + b) - k\,n$,

k = bilangan bulat positip.

Maka Z_n merupakan grup, karena hukum komposisinya penjumlahan maka disebut grup additif dan dinyatakan dengan Grup $(Z_n, +)$.

Contoh 2 :

Himpunan bilangan bulat modulo 5 setelah $\overline{0}$ dikeluarkan, yaitu $Z_5 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ beserta hukum komposisi pergandaan merupakan grup multiplikatif dan dinyatakan dengan Grup $(Z_5, .)$.

Definisi 2.1.2.

Grup (G, *) yang memenuhi sifat untuk setiap a dan b dalam G berlaku a * b = b * a disebut grup komutatif atau grup abelian.

Contoh :

Grup $(Z_n, +)$ merupakan grup abelian. Sebab untuk setiap $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ dalam Z_n dipenuhi $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Theorema 2.1.1.

Jika G adalah suatu grup, maka

1. Hukum konsellasi berlaku. Yaitu jika ax = ay , maka x = y dan jika xa = ya, maka x = y untuk setiap x,y,a dalam G.
2. Elemen identitas adalah tunggal.
3. Invers dari suatu elemen adalah tunggal.
4. Invers dari invers a adalah a.
5. Persamaan ax = b dan ya = b mempunyai penyele-

saian tunggal.

6. Hukum assosiativitas umum berlaku. Yaitu bahwa hasil pergandaan dari n faktor-faktor tidak tergantung pada cara menempatkan tanda kurung.
7. Inversnya suatu hasil ganda adalah hasil ganda dari invers-invers dari faktor-faktor dengan urutan berlawanan. Pada khususnya $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Definisi 2.1.3.

Suatu himpunan bagian sembarang H dari grup (G, *) disebut subgrup dari G jika terhadap hukum komposisi yang sama dengan hukum komposisinya G, H merupakan grup.

Contoh 1 :

Diberikan grup dari himpunan bilangan bulat modulo 6, yaitu $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ terhadap hukum komposisi penjumlahan. $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan subgrup dari grup $(Z_6, +)$. Sebab terhadap hukum komposisinya Z_6, H merupakan grup.

Contoh 2 :

Himpunan-himpunan $S = \{0\}$ dan $B = Z_6$ juga merupakan subgrup dari grup $(Z_6, +)$ dan disebut subgrup tidak sejati.

Theorema 2.1.2.

Misal H adalah himpunan bagian dari grup G dengan elemen identitas e. H merupakan subgrup dari grup G jika dan hanya jika

1. e dalam H.
2. H tertutup dibawah (under) komposisinya G.
3. Untuk setiap x dalam H, inversnya juga dalam H.

Definisi 2.1.4.

Misal a elemen dari grup (G, .), didefinisikan

a^n = df a. a. a. ..... .a sebanyak n faktor.

a^0 = df e (= elemen identitas).

a^{-n} = df a^{-1}. a^{-1}. ..... . a^{-1} sebanyak n faktor.

Dimana n = bilangan bulat positip.

Theorema 2.1.3.

1. $a^{-m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.
2. Jika m dan n bilangan bulat maka $a^m\, a^n = a^{(m+n)}$
3. Jika m dan n bilangan bulat maka $(a^m)^n = a^{mn}$.
4. Jika elemen-elemen a dan b komutatif maka

   $a^n\, b^n = (ab)^n$.

Catatan :

Bila hukum komposisinya disajikan dengan tanda penjumlahan, maka a + a + ... + a sebanyak n suku disajikan dengan n a.

-n a = -a + -a + ... + -a sebanyak n suku.

0 a = 0.

Dan tiga rumus terakhir dari theorema 2.1.3. berturut-turut ditulis

m a + n a = (m + n) a.

n (m a) = (n m) a.

n a + n b = n (a + b).

Theorema 2.1.4.

Jika a elemen dari grup (G, .) dan $\langle a \rangle = \left\{ a^k \mid k \text{ dalam } Z \right\}$ maka $\langle a \rangle$ adalah subgrup dari G dan disebut subgrup siklik yang dihasilkan oleh elemen a.

Bila diberikan grup (G, +), subgrup siklik yang dihasilkan oleh elemen a dinyatakan dengan

$\langle a \rangle = \{ k a \mid k \text{ dalam } Z \}$.

Contoh :

Diberikan grup dari bilangan bulat modulo 24, yaitu $Z_{24} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23} \}$ terhadap hukum komposisi penjumlahan.

Misal diambil elemen $\overline{20}$ maka subgrup siklik yang dihasilkan elemen $\overline{20}$ adalah

$\langle \overline{20} \rangle = \{ \overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20} \}$.

Definisi 2.1.5.

Order dari suatu grup berhingga G, notasi $\theta(G)$ adalah banyaknya anggauta dari G.

Contoh :

Order dari grup $(Z_{24}, +)$ adalah 24.

Definisi 2.1.6.

Order dari suatu elemen a dalam grup G adalah banyaknya anggauta $\langle a \rangle$.

Contoh :

Order dari elemen $\overline{20}$ dalam grup $(Z_{24}, +)$ adalah 6.

Definisi 2.1.7.

Diberikan grup (G, +) dan H adalah subgrup dari G, a dalam G.

$a + H = \{ a + h \mid h \text{ dalam } H \}$ disebut koset kiri dari H.

Jika grupnya multiplikatif koset kiri dari H adalah $a H = \{ a h \mid h \text{ dalam } H \}$ dan koset kanannya $H a = \{ h a \mid h \text{ dalam } H \}$.

Contoh :

Diberikan grup $(Z_{24}, +)$ dan $H = \langle \overline{20} \rangle$ adalah sub grup dari grup $(Z_{24}, +)$, maka koset-koset kiri dari $\langle \overline{20} \rangle$ adalah

$$\overline{0} + \langle \overline{20} \rangle = \left\{ \overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20} \right\},$$
$$\overline{1} + \langle \overline{20} \rangle = \left\{ \overline{1}, \overline{5}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{21} \right\},$$
$$\overline{2} + \langle \overline{20} \rangle = \left\{ \overline{2}, \overline{6}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{18}, \overline{22} \right\}, \text{ dan}$$
$$\overline{3} + \langle \overline{20} \rangle = \left\{ \overline{3}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{19}, \overline{23} \right\}$$

Theorema 2.1.5.

Misal H subgrup dari grup G dan a dalam G maka

1. $a H = H$ jika dan hanya jika a dalam H.
2. $a h = b H$ jika dan hanya jika $b^{-1}a$ dalam H.
3. Koset-koset kiri dari H adalah saling asing.

Definisi 2.1.8.

Misal H subgrup dari grup G. H disebut subgrup normal dari G jika untuk setiap h dalam H dan untuk setiap a dalam G maka $a^{-1}h\, a$ dalam H.

Contoh :

Diberikan grup dari bilangan bulat modulo 5 terhadap hukum komposisi pergandaan. $H = \left\{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \right\}$ adalah subgrup normal dari grup $(Z_5, .)$. Sebab setiap diambil h dalam H dan a dalam Z_5 maka $a^{-1}h\, a$ pasti dalam H.

2.2. HASIL KALI GRUP

Definisi 2.2.1.

Misal $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_k$ masing-masing merupakan suatu grup.

$G_1 \times G_2 \times \ldots\ldots \times G_k = \{(g_1, g_2, \ldots, g_k) | g_i \in G_i\}$

disebut hasil kali grup dari grup-grup $G_1, G_2, \ldots \ldots G_k$.

Selanjutnya didefinisikan suatu operasi

$(g_1, g_2, \ldots g_k) * (h_1, h_2, \ldots h_k) = (g_1 * h_1, g_2 * h_2, \ldots\ldots g_k * h_k)$.

Terhadap operasi tersebut diatas $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ merupakan suatu grup.

Contoh :

Diberikan grup dari bilangan bulat modulo 2 yaitu $Z_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ terhadap hukum komposisi penjumlahan. Maka $Z_2 \times Z_2 = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1})\}$ merupakan grup.

Theorema 2.2.1.

1. Jika untuk setiap G_i mempunyai order yang berhingga maka order dari $G_1 \times G_2 \times \ldots\ldots \times G_k = O(G_1).O(G_2). \ldots . O(G_k)$.
2. $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ abelian jika dan hanya jika G_i abelian.

2.3. HOMOMORFISMA GRUP

Definisi 2.3.1.

Diberikan grup-grup $(G, *)$ dan $(H, *)$. Suatu fungsi $\varnothing : G \longmapsto H$ disebut homomorfisma grup jika untuk setiap x, y dalam G, $\varnothing(x * y) = \varnothing(x) * \varnothing(y)$.

Atau, $G \longmapsto H$

$$x \longmapsto \varnothing(x)$$
$$y \longmapsto \varnothing(y)$$
$$\overline{x*y \longmapsto \varnothing(x*y) = \varnothing(x) * \varnothing(y).}$$

Contoh 1 :

Diberikan grup-grup (G, .) dan (H, +) dimana G = himpunan bilangan riel positip dan H = himpunan bilangan riel. Suatu fungsi $\emptyset$ dari G ke H dengan $\emptyset(x) = \log x$, merupakan suatu homomorfisma grup. Sebab untuk setiap x,y dalam G, $\emptyset(x.y) = \log(x.y) = \log x + \log y = \emptyset(x) + \emptyset(y)$.

Contoh 2 :

Diberikan grup (G, +) dan grup (H, .) dengan G = himpunan bilangan riel dan H = himpunan bilangan kompleks yang tidak sama dengan 0.

Fungsi $\emptyset$ dari G ke H dengan $\emptyset(x) = \cos x + i \sin x$ merupakan homomorfisma grup.

Sebab untuk setiap x,y dalam G, $\emptyset(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \emptyset(x).\emptyset(y)$.

Definisi 2.3.2.

Image dari suatu fungsi $\emptyset : G \longmapsto H$ adalah himpunan elemen dalam H yang merupakan kawan dari elemen dalam G, dinyatakan dengan notasi $Im(\emptyset) = \emptyset(G) = \{\emptyset(g) \mid g \text{ dalam } G\}$.

Contoh :

$$Z_2 x\, Z_2 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\}.$$

$$Z_2 x\, Z_2 x\, Z_2 = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}.$$

Didefinisikan suatu fungsi $\emptyset$ dari $Z_2 x\, Z_2$ ke $Z_2 x\, Z_2 x\, Z_2$ dengan $\emptyset((a_1, a_2)) = (a_1, a_2, a_1+a_2)$.

Maka Image dari $\emptyset$ adalah $\{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0})\}$.

Definisi 2.3.3.

Misal fungsi $\emptyset : G \longmapsto H$ adalah homomorfisma grup. Kernel dari $\emptyset$ yang dinyatakan dengan notasi Ker($\emptyset$) adalah himpunan elemen dalam G yang dibawa ke elemen identitas e oleh $\emptyset$, atau

$$\mathrm{Ker}(\emptyset) = \left\{ x \in G \mid \emptyset(x) = e \right\}.$$

Theorema 2.3.1.

Jika $\emptyset : G \longmapsto H$ homomorfisma grup maka Im($\emptyset$) adalah subgrup dari H.

Theorema 2.3.2.

Jika $\emptyset : G \longmapsto H$ homomorfisma grup maka Ker($\emptyset$) adalah subgrup dari G, dan normal dalam G.

Contoh :

Diberikan grup dari himpunan bilangan bulat modulo 20 setelah 0 dikeluarkan terhadap hukum komposisi pergandaan, yaitu $Z_{20} = \left\{ \overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{19} \right\}$. Suatu fungsi $\emptyset$ dari Z_{20} ke Z_{20} dengan $\emptyset(x) = x^2$ merupakan homomorfisma grup. Maka

$$\emptyset(\overline{1}) = \overline{1}^2 = \overline{1}$$
$$\emptyset(\overline{3}) = \overline{3}^2 = \overline{9}$$
$$\emptyset(\overline{7}) = \overline{7}^2 = \overline{9}$$
$$\emptyset(\overline{9}) = \overline{9}^2 = \overline{1}$$
$$\emptyset(\overline{11}) = \overline{11}^2 = \overline{1}$$
$$\emptyset(\overline{19}) = \overline{19}^2 = \overline{1}$$

Jadi $\mathrm{Ker}(\emptyset) = \left\{ \overline{1}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{19} \right\}$, dengan $\overline{1}$ merupakan elemen identitas dalam Z_{20}.

Sehingga $\mathrm{Ker}(\emptyset) = \left\{ \overline{1}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{19} \right\}$ merupakan subgrup dari Z_{20} dan normal dalam Z_{20}.

2.4 RING

Definisi 2.4.1.

Ring R adalah himpunan R beserta dua hukum komposisi yang disajikan sebagai jumlahan dan pergandaan sedemikian hingga memenuhi aksioma - aksioma :

1. R merupakan grup abelian terhadap hukum komposisi penjumlahan.
2. R terhadap hukum komposisi pergandaan mempunyai sifat :
   - Tertutup. Yaitu untuk setiap a,b dalam R terdapat dengan tunggal c dalam R sedemikian hingga $a \cdot b = c$
   - Assosiatif. Yaitu untuk setiap a,b,c dalam R berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. R terhadap hukum komposisi penjumlahan dan pergandaan memenuhi sifat : untuk setiap a,b dan c dalam R berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a.c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Contoh :

Himpunan bilangan bulat modulo 6 ; $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ terhadap hukum komposisi penjumlahan dan pergandaan merupakan ring.

Definisi 2.4.2.

Suatu elemen a dalam ring R disebut pembagi nol kiri jika dapat ditemukan elemen b dalam R juga yang tidak sama dengan 0 sedemikian hingga ,

$a \cdot b = 0$.

Dan elemen a disebut pembagi nol kanan jika,

$b \cdot a = 0$.

Jika ada elemen $b \neq 0$ sedemikian hingga ,

$a \cdot b = b \cdot a = 0$, maka elemen a disebut pembagi nol.

Definisi 2.4.3.

Suatu pembagi nol a disebut pembagi nol sejati jika a tidak sama dengan 0.

Contoh :

1. Diberikan ring dari bilangan bulat modulo 6 ; $Z_6 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$. Maka $\overline{2}$ adalah pembagi nol sejati sebab $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{0}$.
2. Ring dari himpunan matriks ukuran 2 x 2 .

   Elemen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan pembagi nol sejati

   sebab $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Theorema 2.4.1.

Dalam suatu ring dengan elemen satuan maka suatu elemen yang mempunyai invers kiri (kanan) pasti bukan pembagi nol kiri (kanan) dan suatu pembagi nol kiri (kanan) tidak mempunyai invers kiri (kanan) .

2.5. RING POLYNOMIAL

Pandang suatu ring R. Ambil suatu simbol semba - rang, misalnya x. Simbol ini selanjutnya akan disebut suatu indeterminate. Bentuk - bentuk semacam :

$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$, dimana n berhingga dan a_i dalam R (i = 1,2,3, ... , n) disebut polynomial dalam x dengan koefisien - koefisien dari R

Himpunan polynomial - polynomial seperti ini disajikan dengan simbol $R_{[x]}$.

Simbol - simbol x^0, x^1, x^2, dan seterusnya ditetapkan ko mutatif dengan semua elemen dari R, sedang x^n tidaklah berarti x. x. x. .... x sebanyak n faktor, melainkan merupakan suatu simbol belaka. Selanjutnya $a_i x^i$ bukanlah pergandaan a_i dengan x^i, tetapi hanya simbol a_i diikuti simbol x^i. Demikian juga tanda-tanda " + " bukan tanda penjumlahan , melainkan dapat dipandang sebagai tanda pemisah antara para $a_i x^i$.

Contoh :

$x^6 + x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{4}x^3$ dan $\bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$ merupakan poly - nomial dalam x dengan koefisien-koefisien dari Z_5.

Apabila suatu kuasa dari x (misal x^7) tidak terlihat dalam f(x) maka dipandang kuasa itu mempunyai koefisien 0.

Contoh :

$f(x) = a_n x^n$, maka f(x) dipandang sebagai

$0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Sekarang perhatikan,

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n ,$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$$

masing-masing merupakan anggauta $R[x]$.

Didefinisikan hukum komposisi penjumlahan pada $R[x]$ dengan rumus :

$$f(x) + g(x) = \text{df } (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + \ldots\ldots$$

Contoh :

$$f(x) = \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{4}$$

dengan f(x) dan g(x) anggauta $Z_5[x]$.

Dari sebab $f(x) = \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ dapat dipandang sebagai $\bar{0}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ maka $f(x) + g(x) = (\bar{0}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}) + (\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{4}) = (\bar{0}+\bar{2})x^3 + (\bar{4}+\bar{3})x^2$

$+ (\overline{2} + \overline{1})x + (\overline{2} + \overline{4}) = \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{1}$.

Tanda " + " pada $f(x) + g(x)$ merupakan tanda komposisi penjumlahan dalam himpunan $R[x]$. Sedangkan tanda " + " dalam $a_i + b_i$ merupakan tanda komposisi penjumlahan dalam ring R, dan tanda "+" antara $(a_p + b_p)x^p$ dan $(a_q + b_q)x^q$ merupakan tanda pemisah.

Dengan adanya ketentuan bahwa apabila suatu kuasa dari x tidak ada, dapat dipandang mempunyai koefisien 0 maka

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n ,$$

dapat dipandang sebagai jumlahan monomial-monomial,

$$f_0(x) = a_0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \ldots\ldots\ldots + 0x^n$$

$$f_1(x) = 0x^0 + a_1x^1 + 0x^2 + \ldots\ldots\ldots + 0x^n$$

$$f_2(x) = 0x^0 + 0x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots\ldots + 0x^n$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n,$$

sehingga sekarang tanda " + " pada,

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

dapat dipandang sebagai penjumlahan dalam himpunan $R[x]$.

Jadi polynomial dapat dinyatakan dengan notasi $\sum$.

Selanjutnya perhatikan

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots\ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots\ldots + b_mx^m = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$$

merupakan anggauta $R[x]$.

Didefinisikan hukum komposisi pergandaan dengan rumus :

$$f(x).g(x) = \text{df} \left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{j=0}^{m} b_jx^j = \sum_{k} c_kx^k \right.$$

dimana $c_k = \sum_{i+j=k} a_i . b_j$, $k = 0,1,2,\ldots, m+n$.

Contoh :

Diberikan $\overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$ dan $\overline{2}x + \overline{3}$ yang masing-masing merupakan polynomial dalam $Z_5[x]$.

Maka menurut definisi pergandaan polynomial,

$(\overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{2}).(\overline{2}x + \overline{3}) = (\overline{4}.\overline{2})x^3 + (\overline{4}.\overline{3} + \overline{2}.\overline{2})x^2 +$
$(\overline{2}.\overline{3} + \overline{2}.\overline{2})x + (\overline{2}.\overline{3}) = \overline{3}x^3 + \overline{1}x^2 + \overline{0}x + \overline{1} =$
$\overline{3}x^3 + x^2 + \overline{1}$. Selanjutnya $(\overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{2}).(\overline{2}x + \overline{3})$

dapat juga dihitung dengan cara sebagai berikut :

$$
\begin{array}{lll}
\overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{2} & \ldots\ldots\ (1) & \\
\qquad\ \ \overline{2}x + \overline{3} & \ldots\ldots\ (2) & \\
\hline
\overline{2}x^2 + \overline{1}x + \overline{1} & \longrightarrow \overline{3}.(1) & \ldots\ldots\ (3) \\
\overline{3}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{4}x & \longrightarrow \overline{2}x.(1) & \ldots\ldots\ (4) \\
\hline
\overline{3}x^3 + \overline{1}x^2 + \overline{0}x + \overline{1} = \overline{3}x^3 + x + \overline{1} & \longrightarrow (3) + (4). &
\end{array}
$$

Definisi 2.5.1.

Misal,

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots\ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots\ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

$f(x)$ dan $g(x)$ sama jika $a_i = b_i$ untuk setiap i.

Contoh :

$2x + 4x + 3x + 1$ tidak sama dengan $4x + 3x + 2x + 1$

Definisi 2.5.2.

Polynomial nol adalah polynomial yang semua koe -

fisiennya adalah 0.

Contoh :

$0x^2 + 0x + 0$

Definisi 2.5.3.

Derajat atau degre suatu polynomial adalah bilangan bulat positip terbesar n dengan $a_n \neq 0$.

Contoh :

$x^6 + 2x^5 + 4x^4 + x^2 + 5x + 7$ mempunyai derajat 6.

Theorema 2.5.1.

Himpunan $R[x]$ merupakan ring dan disebut ring polynomial lewat R dengan indeterminate x.

Theorema 2.5.2.

Misal $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$

$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \ldots + b_mx^m$

dimana a_i, b_j adalah elemen dari R dengan elemen satuan e dan $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Misal b_m mempunyai invers b_m^{-1} maka dapat ditemukan dengan tunggal polynomial-polynomial q(x), p(x), r(x), dan s(x) sedemikian hingga,

$f(x) = q(x).\ g(x) + r(x)$

$f(x) = g(x).\ p(x) + s(x)$

dengan r(x) dan s(x) adalah polynomial nol atau derajat dari r(x) dan s(x) lebih rendah dari pada derajat g(x).

Contoh :

Diberikan $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}$

$g(x) = x + \bar{3}$

masing-masing dalam $Z_7[x]$.

Nyatakan f(x) dalam q(x), g(x) dan r(x).

Penyelesaian :

$$
\begin{array}{r|l}
 & \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2} \\
\hline
x + \bar{3} & \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{0}x + \bar{2} \\
 & \underline{\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2} \quad - \\
 & \qquad \bar{4}x^2 + \bar{0}x + \bar{2} \\
 & \qquad \underline{\bar{4}x^2 + \bar{5}x} \quad - \\
 & \qquad\qquad \bar{2}x + \bar{2} \\
 & \qquad\qquad \underline{\bar{2}x + \bar{6}} \quad - \\
 & \qquad\qquad\qquad \bar{3}
\end{array}
$$

didapat $\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2} = (\bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}).(x + \bar{3}) + \bar{3}$

Jadi $q(x) = \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}$

$r(x) = \bar{3}$