BAB III

RUANG TOPOLOGI

3.1. Topologi

Definisi 3.1.

S adalah suatu himpunan yang tidak kosong dan 2^S adalah kumpulan dari semua himpunan bagian dari S. Jika $\tau \subset 2^S$ sedemikian sehingga :

1. $\phi \in \tau$ dan $S \in \tau$.
2. Jika $G_\alpha \in \tau$ untuk setiap $\alpha \in A$, maka $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$.
3. Jika $G_i \in \tau$ $(i = 1,2,3,\ldots,n)$, maka $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$.

Maka τ adalah topologi pada S. Selanjutnya untuk setiap $G \in \tau$, maka G disebut himpunan terbuka. Sedangkan (S,τ) disebut ruang topologi.

Contoh 3.1.

Kita ambil R = himpunan bilangan Real. Buat $\mathcal{T} \subset 2^R$ didefinisikan dengan : $G \in \mathcal{T}$ bhb $G = \phi$ atau G = gabungan(union) dari interval-interval terbuka dari R. Yang dimaksud interval terbuka adalah interval berbentuk $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b,\ a < b\}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{T}$ adalah topologi untuk R.

1. $\phi \in \mathcal{T}$ (jelas).
2. Dibuktikan R = union semua interval terbuka dari R.

   Misal $\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ adalah kumpulan dari semua interval terbuka dari R. Andaikan $x \in R$, maka dimana saja dipilih x, pasti ada suatu interval terbuka yang memuat x, yaitu (a,b) dengan $a < x$ dan $b > x$. Maka $x \in I_\alpha$ untuk suatu $\alpha \in A$. Jadi $x \in \bigcup_\alpha I_\alpha$. Sehingga $R \subset \bigcup_\alpha I_\alpha$.

   Ambil $x \in \bigcup_\alpha I_\alpha$, maka x pasti termuat dalam salah satu interval terbuka dari R. Jadi $x \in I_\alpha$ untuk suatu $\alpha \in A$. Karena $I_\alpha \subset R$ maka $x \in R$, sehingga $\bigcup_\alpha I_\alpha \subset R$.

   Jadi $R = \bigcup_\alpha I_\alpha$. Sehingga $R \in \mathcal{T}$.

3. Ambil $G_\alpha \in \mathcal{T}$, untuk setiap $\alpha \in A$. Maka

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma \cup \ldots$$
$$= (I'_\alpha \cup I''_\alpha \cup I'''_\alpha \cup \ldots) \cup (I'_\beta \cup I''_\beta \cup I'''_\beta \cup \ldots) \cup (I'_\gamma \cup I''_\gamma \cup I'''_\gamma \cup \ldots) \cup \ldots$$
$$= (I'_\alpha \cup I''_\alpha \cup I'''_\alpha \cup \ldots \cup I'_\beta \cup I''_\beta \cup I'''_\beta \cup \ldots \cup I'_\gamma \cup I''_\gamma \cup I'''_\gamma \cup \ldots \cup \ldots)$$

Karena hasilnya berbentuk sebagai union interval-interval terbuka, maka $\bigcup_\alpha I_\alpha \in \mathcal{T}$.

4. Ambil $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$. Maka

$$G_1 \cap G_2 = (I'_1 \cup I''_1 \cup I'''_1 \cup \ldots) \cap (I'_2 \cup I''_2 \cup I'''_2 \cup \ldots)$$
$$= (I'_1 \cap I'_2) \cup (I'_1 \cap I''_2) \cup (I'_1 \cap I'''_2) \cup \ldots \cup (I''_1 \cap I'_2) \cup (I''_1 \cap I''_2) \cup (I''_1 \cap I'''_2) \cup \ldots \cup (I'''_1 \cap I'_2) \cup (I'''_1 \cap I''_2) \cup (I'''_1 \cap I'''_2) \cup \ldots$$

Padahal irisan dari dua interval terbuka adalah ϕ atau berbentuk interval terbuka lagi. Maka $G_1 \cap G_2$ berbentuk sebagai union interval-interval terbuka atau ϕ. Jadi $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$. Sehingga dengan menggunakan induksi matematika didapat $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{T}$, jika $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$. Karena $\mathcal{T}$ memenuhi syarat-syarat topologi, maka $(R, \mathcal{T})$ merupakan ruang topologi. Topologi $\mathcal{T}$ disebut usual topologi atau Euclidean topologi dari R.

Definisi 3.2.

Jika $S \neq \phi$. Maka topologi terkecil di S adalah $\{\phi, S\}$ dan disebut indiscrete topologi. Topologi terbesar di S adalah 2^S dan disebut discrete topologi.

Contoh 3.2.

$S = \{a, b, c\}$.

$\mathcal{T}_1 = \{\phi, S\}$.

$\tau_3 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, S\} = 2^S$.

Maka τ_1, τ_2 dan τ_3 adalah topologi pada S.

τ_1 adalah indiscrete topologi dan τ_3 adalah discrete topologi.

Definisi 3.3.

(S,τ) adalah ruang topologi dan $A \subset S$. Maka A tertutup bhb $S - A \in \tau$.

Teorema 3.1.

Jika (S,τ) adalah suatu ruang topologi, maka :

1. ϕ dan S tertutup.
2. Jika $A_\alpha \subset S$ adalah tertutup untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, maka $\bigcap_\alpha A_\alpha$ juga tertutup.
3. Jika $A_i \subset S$ adalah tertutup untuk setiap $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ juga tertutup.

Bukti :

1. Karena $S \in \tau$, maka $S - S = \phi$ tertutup.

   Karena $\phi \in \tau$, maka $S - \phi = S$ tertutup.
2. Jika A_α tertutup untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, maka $S - A_\alpha = A_\alpha^c \in \tau$

   Sehingga $\bigcup_\alpha A_\alpha^c \in \tau$. Dari teorema himpunan, maka

   $\bigcup_\alpha A_\alpha^c = (\bigcap_\alpha A_\alpha)^c$. Jadi $(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c \in \tau$ atau $S - (\bigcap_\alpha A_\alpha) \in \tau$.

   Jadi $\bigcap_\alpha A_\alpha$ tertutup.
3. Jika A_i tertutup untuk setiap $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ maka

   $S - A_i = A_i^c \in \tau$ untuk setiap i. Sehingga $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \tau$.

   Dari teorema himpunan maka $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

   Jadi $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \in \tau$ atau $S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \tau$. Sehingga

   $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tertutup.

Definisi 3.4.

Jika (S,τ) suatu ruang topologi dan $A \subset S$. Maka tutupan (closure) dari A (ditulis $\bar{A}$) adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A.

Teorema 3.2.

(S,τ) suatu ruang topologi dan $A \subset S$. Maka $x \in \bar{A}$ bhb jika $x \in G \in \tau$ maka $G \cap A \neq \phi$.

Bukti :

i. Dibuktikan jika $x \in \bar{A}$ dan $x \in G \in \tau$ maka $G \cap A \neq \phi$.
Ambil $x \in \bar{A}$ dan $x \in G$. Andaikan $G \cap A = \phi$. Maka $A \subset S - G$. Karena G terbuka, maka $S - G$ tertutup dan memuat A. Karena $\bar{A}$ adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A, maka $\bar{A} \subset S - G$. Jadi $x \in S - G$. Padahal dike tahui $x \in G$. Terjadi Kontradiksi, pengandaian harus diingkari. Jadi yang benar $G \cap A \neq \phi$.

ii. Diketahui $x \in G \in \tau \Rightarrow G \cap A \neq \phi$ dibuktikan $x \in \bar{A}$.
Andai $x \notin \bar{A}$, maka ada himpunan tertutup F sedemikian sehingga $A \subset F$ dan $x \notin F$. Jadi $x \in S - F$ dengan $S - F$ adalah himpunan terbuka. Didapat $(S - F) \cap A = \phi$. Padahal diketahui $(S - F) \cap A \neq \phi$. Terjadi konteradik si, pengandaian harus diingkari. Jadi yang benar $x \in \bar{A}$.

Teorema 3.3.

(S,τ) suatu ruang topologi dan A serta B merupakan himpunan bagian dari S, maka :

1. $\bar{A}$ = himpunan tertutup terkecil yang memuat A.
2. Jika $A \subset B$ maka $\bar{A} \subset \bar{B}$.
3. $A = \bar{A}$ bhb A tertutup.
4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Bukti :

1. Misal himpunan tertutup terkecil yang memuat A adalah F_A.

i. Karena $\bar{A}$ = irisan semua himpunan tertutup yang memuat A, maka F_A adalah salah satu himpunan tertutup itu, sehingga $\bar{A} \subset F_A$.

ii. $\bar{A}$ pasti tertutup karena irisan semua himpunan tertutup adalah tertutup juga. $\bar{A}$ juga memuat A. Karena F_A adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A, maka $F_A \subset \bar{A}$.

Dari i. dan ii. maka $\bar{A} = F_A$.

2. Jika $A \subset B$, Maka karena $\bar{B}$ juga memuat B, sehingga $B \subset \bar{B}$. Jadi $A \subset \bar{B}$ dengan $\bar{B}$ tertutup. Karena $\bar{A}$ = himpunan tertutup terkecil yang memuat A, maka $\bar{A} \subset \bar{B}$.

3.i. Jika $A = \bar{A}$, maka karena $\bar{A}$ tertutup, sehingga A juga tertutup.

ii. Jika A tertutup, maka himpunan tertutup terkecil yang memuat A adalah A sendiri. Jadi $A = \bar{A}$.

4.i. Karena $A \subset A \cup B$, maka $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$, demikian juga karena $B \subset A \cup B$, maka $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Jadi $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

ii. $\bar{A}$ memuat A dan $\bar{B}$ memuat B. Jadi $\bar{A} \cup \bar{B}$ memuat $A \cup B$. Karena $\bar{A}$ tertutup dan $\bar{B}$ tertutup, maka $\bar{A} \cup \bar{B}$ juga tertutup memuat $A \cup B$. Karena himpunan tertutup terkecil yang memuat $A \cup B$ adalah $\overline{A \cup B}$, maka $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Dari i. dan ii. maka $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

Contoh 3.3.

Jika (S,τ) ruang topologi dengan $S = \{a,b,c\}$ dan topologi $\tau = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},S\}$. Dapat kita buat keluarga himpunan tertutup $= \{S,\{b,c\},\{a,c\},\{c\},\emptyset\}$.

Ambil $A = \{a\}$ dan $B = \{b\}$. Maka $A \cup B = \{a,b\}$.

$\bar{A} = \{a,c\}$, $\bar{B} = \{b,c\}$, jadi $\bar{A} \cup \bar{B} = \{a,b,c\} = S$. Sedangkan $\overline{A \cup B} = S$. Jadi $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

3.2. Basis Dan Subbasis

Definisi 3.5.

(S,τ) suatu ruang topologi dan $\beta \subset 2^S$. Maka β adalah basis untuk τ bhb setiap elemen dari τ yang tidak kosong berbentuk sebagai union sejumlah elemen dari β.

Contoh 3.4.

$S = \{a,b,c,d\}$ dan $\tau = \{\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\},S\}$.

Maka (S,τ) adalah ruang topologi. Sedangkan basis untuk τ adalah $\beta = \{\{b\},\{c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$.

Contoh 3.5.

Ambil $E = (R,\mathcal{U})$ yaitu ruang topologi pada R dengan usual (Euclidean) topologi. Maka dapat kita cari basis dari $\mathcal{U}$ yaitu $\beta = \{(a,b) \mid a,b \in R$ dengan $a < b\}$, dimana $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$. Jadi basis untuk usual topologi adalah kumpulan dari semua interval terbuka di R.

Definisi 3.6.

(S,τ) suatu ruang topologi dan $\gamma \subset 2^S$.

Jika $\beta \subset 2^S$ merupakan basis dari τ, maka γ merupakan subbasis dari τ bhb setiap elemen dari β berbentuk sebagai irisan dari berhingga elemen dari γ.

Contoh 3.6.

Buat $E = (R,\mathcal{U})$ yaitu ruang topologi pada R dengan usual topologi. Buat $\gamma \subset 2^S$ dengan $\gamma = \{(-\infty,b) \mid b \in R\} \cup \{(a,\infty) \mid a \in R\}$. Karena setiap interval terbuka (a,b) dalam β, dapat diambil $(-\infty,b), (a,\infty) \in \gamma$ sedemikian sehingga $(a,b) = (-\infty,b) \cap (a,\infty)$ maka γ merupakan subbasis untuk topologi $\mathcal{U}$.

3.3. Ruang produk dan Subruang Topologi

Definisi 3.7.

Jika (S,τ_1) dan (T,τ_2) adalah ruang topologi. Maka $(S \times T, \tau_1 \times \tau_2)$ adalah ruang produk dari (S,τ_1) dan (T,τ_2). Dengan $S \times T$ adalah hasil ganda kartesian dari S dan T, dan produk topologi $\tau_1 \times \tau_2$ dengan basisnya adalah keluarga $\{G_1 \times G_2 \mid G_1 \in \tau_1$ dan $G_2 \in \tau_2\}$.

Contoh 3.7.

Jika R adalah himpunan bilangan real dan $\mathcal{T}$ adalah usual/ Euclidean topologi. Maka dapat dibuat ruang produk topologi $(R \times R, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Maka $N \subset R \times R$ adalah terbuka di produk topologi $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ bhb untuk setiap elemen $(x,y) \in N$ maka ada sepasang himpunan terbuka $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ dengan $x \in G_1$ dan $y \in G_2$ serta $G_1 \times G_2 \subset N$.

Definisi 3.8.

(S,τ) adalah ruang topologi dan $\phi \neq A \subset S$. Maka $\tau_A = \{A \cap G \mid G \in \tau\}$ adalah topologi pada A.

(A,τ_A) disebut ruang bagian (subruang) topologi dari (S,τ).

Contoh 3.8.

Jika $E = (R,\mathcal{T})$ adalah ruang Euclidean topologi. Kita ambil $A = [0,1] = \{x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, maka $I = (A,\mathcal{T}_A)$ merupakan ruang topologi di A dengan topologi $\mathcal{T}_A$ yang mempunyai basis berupa kumpulan interval berbentuk $\{[0,c) \mid 0 < c \leqslant 1\} \cup \{(d,1] \mid 0 \leqslant d < 1\} \cup \{(a,b) \mid 0 \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b \leqslant 1,\ a < b\}$.

Maka I merupakan subruang topologi dari ruang Euclidean topologi.

Teorema 3.4.

Jika $B \subset A \subset S$, (S,τ) adalah ruang topologi, (A,τ_A) adalah subruang dari (S,τ) dan (B,τ_{AB}) adalah subruang dari (A,τ_A). Maka (B,τ_{AB}) adalah subruang dari (S,τ) atau $(B,\tau_{AB}) = (B,\tau_B)$.

Bukti :

i) Ambil sembarang $W \in \tau_{AB}$, jadi $W = B \cap V$ untuk suatu $V \in \tau_A$. Karena $V = A \cap U$ untuk suatu $U \in \tau$, maka

$W = B \cap V$, untuk suatu $V \in \tau_A$,

$W = B \cap (A \cap U)$, untuk suatu $U \in \tau$,

Jadi $W = (B \cap A) \cap U = B \cap U$, untuk suatu $U \in \tau$.

Jadi $W \in \tau_B$, sehingga $\tau_{AB} \subset \tau_B$.

ii) Ambil sembarang $W \in \tau_B$, jadi $W = B \cap U$ untuk suatu $U \in \tau$.

$W = B \cap U$, untuk suatu $U \in \tau$,

$W = (B \cap A) \cap U$, untuk suatu $U \in \tau$,

$W = B \cap (A \cap U)$, untuk suatu $U \in \tau$,

Karena $A \cap U \in \tau_A$, maka $W \in \tau_{AB}$. Jadi $\tau_B \subset \tau_{AB}$.

Dari i) dan ii) maka $\tau_B = \tau_{AB}$. Jadi $(B, \tau_{AB}) = (B, \tau_B)$.

Teorema 3.5.

Jika (A, τ_A) adalah subruang topologi dari (S, τ) maka

1. Jika B tertutup di (A, τ_A) dan A tertutup di (S, τ) maka B tertutup di (S, τ).
2. Jika B terbuka di (A, τ_A) dan A terbuka di (S, τ) maka B terbuka di (S, τ).

Bukti :

1. Jika B tertutup di (A, τ_A), maka $B = A - V$ dimana V terbuka di (A, τ_A). Karena $V = A \cap W$ dengan $W \in \tau$, maka

   $B = A - (A \cap W)$, untuk suatu $W \in \tau$,

   $B = A \cap (A \cap W)^c$, untuk suatu $W \in \tau$,

   $B = A \cap (A^c \cup W^c)$, untuk suatu $W \in \tau$,

   $B = (A \cap A^c) \cup (A \cap W^c)$, untuk suatu $W \in \tau$,

   $B = A \cap W^c$, untuk suatu $W \in \tau$.

   Karena A tertutup di (S, τ) dan W^c tertutup di (S, τ), maka B juga tertutup di (S, τ).

2. Jika B terbuka di (A, τ_A), maka $B = A \cap G$ dengan $G \in \tau$. Karena A terbuka di (S, τ) dan G terbuka di (S, τ), maka B juga terbuka di (S, τ).

Teorema 3.6.

$\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ adalah keluarga himpunan bagian dari S di mana $S = \cup_\alpha A_\alpha$ dengan $\mathcal{A}$ suatu himpunan indeks yang tidak kosong. Semua $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$ adalah subruang dari

1. Semua A_α adalah himpunan tertutup di (S,τ), atau
2. Semua A_α adalah himpunan terbuka di (S,τ).

Jika $B \subset S$ dan setiap $B \cap A_\alpha$ adalah terbuka di subruang $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$, maka B terbuka di (S,τ).

Bukti :

1. Diketahui setiap $B \cap A_\alpha$ adalah terbuka di subruang $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$. Maka $A_\alpha - (B \cap A_\alpha)$ tertutup di $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$ untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Jadi
$$\begin{aligned} A_\alpha - (B \cap A_\alpha) &= A_\alpha \cap (B \cap A_\alpha)^c \\ &= A_\alpha \cap (B^c \cup A_\alpha^c) \\ &= (A_\alpha \cap B^c) \cup (A_\alpha \cap A_\alpha^c) \\ &= A_\alpha \cap B^c \end{aligned}$$
Jadi $A_\alpha \cap B^c$ tertutup di $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$.

   Karena A_α tertutup di (S,τ) maka dari teorema 3.5., $A_\alpha \cap B^c$ juga tertutup di (S,τ). Jadi B^c juga tertutup di (S,τ). Sehingga B terbuka di (S,τ).
2. Setiap $B \cap A_\alpha$ terbuka di $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$ dan A_α terbuka di (S,τ). Jadi dari teorema 3.5., $B \cap A_\alpha$ terbuka di (S,τ). Jadi
$$\begin{aligned} B &= B \cap S \\ &= B \cap (\cup_\alpha A_\alpha) \\ &= \cup_\alpha (B \cap A_\alpha) \end{aligned}$$
Karena $B \cap A_\alpha$ terbuka di (S,τ) untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, maka $\cup_\alpha (B \cap A_\alpha)$ juga terbuka di (S,τ). Jadi B terbuka di (S,τ).

3.4. Fungsi Kontinu

Definisi 3.9.

1. Suatu fungsi $f:(S,\tau_1) \longrightarrow (T,\tau_2)$ adalah kontinu di $x \in S$ bhb $f(x) \in U \in \tau_2$, maka ada $G \in \tau_1$ sedemikian sehingga $x \in G$ dan $f(G) \subset U$.
2. Fungsi $f:(S,\tau_1) \longrightarrow (T,\tau_2)$ kontinu bhb f kontinu di setiap titik $x \in S$.

Contoh 3.9.

Jika $E = (R,\mathcal{V})$ adalah ruang Euclidean topologi pada R. Buat fungsi $f:E \longrightarrow E$ dengan $f(x) = 2x$ untuk setiap $x \in R$. Ambil sembarang $a \in R$, maka $f(a) = 2a$. Buat interval terbuka yang memuat 2a, yaitu $A = (2a - \alpha, 2a + \alpha)$ untuk $\alpha > 0$. Dapat dibuat interval terbuka $B = (a - \alpha/2, a + \alpha/2)$ yang memuat a. Karena $f(B) = A$, maka fungsi f kontinu di setiap titik $x \in R$. Jadi f merupakan fungsi kontinu.

Contoh 3.10.

Jika $E = (R,\mathcal{V})$ adalah ruang Euclidean topologi pada R. $E \times E$ adalah ruang produk dari ruang Euclidean topologi. Buat fungsi $h:E \times E \longrightarrow E$ yang didefinisikan dengan $h(x,y) = ax + by + c$ untuk setiap $(x,y) \in R \times R$, untuk suatu $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0, b \neq 0$. Ambil sembarang titik (x_o,y_o) di dalam $R \times R$. Maka $h(x_o,y_o) = ax_o + by_o + c$. Buat interval terbuka yang memuat $ax_o + by_o + c$ di dalam R, yaitu $A = (ax_o + by_o + c - \alpha, ax_o + by_o + c + \alpha)$ untuk suatu $\alpha > 0$.
Maka dapat kita buat dua interval terbuka, yaitu :

$B = (x_o - \left|\frac{\alpha}{2a}\right|, x_o + \left|\frac{\alpha}{2a}\right|)$ yang memuat elemen $x_o \in R$ dan

$C = (y_o - \left|\frac{\alpha}{2b}\right|, y_o + \left|\frac{\alpha}{2b}\right|)$ yang memuat elemen $y_o \in R$.

Sedangkan $h(B \times C) = A$. Maka h merupakan fungsi kontinu dari ruang produk $E \times E$ ke ruang topologi E.

Teorema 3.7.

1. $(S,\tau_1),(T,\tau_2)$ dan (U,τ_3) adalah ruang topologi. Jika $f:(S,\tau_1) \longrightarrow (T,\tau_2)$ dan $g:(T,\tau_2) \longrightarrow (U,\tau_3)$ keduanya kontinu, maka fungsi komposisi $g \circ f:(S,\tau_1) \longrightarrow (U,\tau_3)$ juga kontinu.
2. Jika fungsi $f:(S,\tau_1) \longrightarrow (T,\tau_2)$ kontinu dan $A \subset S$ maka $f|A:(A,\tau_{1A}) \longrightarrow (T,\tau_2)$ juga kontinu.

Bukti:

1. Ambil sembarang himpunan terbuka $G \in \tau_3$. Karena g kontinu maka $g^{-1}(G)$ juga terbuka di τ_2. Karena f kontinu maka $f^{-1}(g^{-1}(G))$ juga terbuka di τ_1. Sedangkan

   $$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(G)) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(G) \\ &= (g \circ f)^{-1}(G) \end{aligned}$$

   Maka $(g \circ f)^{-1}(G)$ juga terbuka di (S, τ_1). Jadi $g \circ f$ juga kontinu.

2. Karena $f|A = f \circ i$ dimana i adalah fungsi inklusi, maka dari bukti 1. $f|A$ juga kontinu.

Teorema 3.8.

Jika $f:(S,\tau_1) \longrightarrow (T,\tau_2)$ suatu fungsi, maka pernyataan berikut ini adalah ekwivalen.

(1) Jika C tertutup di (T,τ_2) maka $f^{-1}(C)$ tertutup di (S,τ_1).

(2) $f^{-1}(U) \in \tau_1$ untuk setiap $U \in \tau_2$.

(3) f kontinu.

(4) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ untuk setiap $A \subset S$.

Bukti :

$(1) \Rightarrow (2)$

Ambil $U \in \tau_2$, maka $T - U$ tertutup. Dari (1) diketahui $f^{-1}(T - U)$ tertutup di (S,τ_1).

$$\begin{aligned} \text{Karena } f^{-1}(T - U) &= f^{-1}(T) - f^{-1}(U) \\ &= S - f^{-1}(U) \end{aligned}$$

Maka $S - f^{-1}(U)$ tertutup, jadi $f^{-1}(U)$ terbuka di (S,τ_1).

$(2) \Rightarrow (3)$

Ambil $x \in S$ dan $f(x) \in U \in \tau_2$, maka $x \in f^{-1}(U) \in \tau_1$. Karena $f(f^{-1}(U)) \subset U$ maka f kontinu.

$(3) \Rightarrow (4)$

Ambil $y \in f(\overline{A})$ dan $y \in U \in \tau_2$, maka $y = f(x)$ untuk beberapa

$x \in \overline{A}$. Karena f kontinu, maka ada $V \in \mathcal{T}_1$ sedemikian sehingga $x \in V$ dan $f(V) \subset U$. Karena $x \in \overline{A}$, maka dari teorema 3.2. ada $p \in V \cap A$. Maka $f(p) \in f(V) \cap f(A) \subset U \cap f(A)$. Karena $y \in U$ dan $U \cap f(A) \neq \phi$, maka dari teorema 3.2. $y \in \overline{f(A)}$. Jadi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$(4) \Rightarrow (1)$

Ambil C tertutup di $(T,\mathcal{T}_2)$. Maka $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C}$. Karena C tertutup, maka $\overline{C} = C$. Jadi $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset C$. Sehingga $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$. Padahal $f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)}$. Jadi $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$. Sehingga $f^{-1}(C)$ tertutup di $(S,\mathcal{T}_1)$.

Teorema 3.9.

$(S,\mathcal{T})$ suatu ruang topologi dan $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ adalah keluarga himpunan bagian dari S dimana $S = \bigcup_\alpha A_\alpha$ dengan : (1) Semua A_α tertutup di $(S,\mathcal{T})$, atau

(2) Semua A_α terbuka di $(S,\mathcal{T})$.

Untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow T$ kontinu dan $f_\alpha | A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta | A_\alpha \cap A_\beta$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

Maka ada dengan tunggal fungsi kontinu $f : S \longrightarrow T$ yang merupakan perluasan dari setiap f_α, yaitu $f | A_\alpha = f_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$.

Bukti :

Keberadaan fungsi f dijamin oleh teorema 2.2. Jadi tinggal membuktikan f kontinu. Ambil sembarang himpunan terbuka $B \subset T$, maka $f^{-1}(B) \cap A_\alpha = f_\alpha^{-1}(B)$ untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Karena f_α kontinu untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, maka $f_\alpha^{-1}(B)$ terbuka di A_α untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Jadi $f^{-1}(B) \cap A_\alpha$ terbuka di A_α untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Menurut teorema 3.6. maka $f^{-1}(B)$ terbuka di $(S,\mathcal{T})$. Jadi terbukti f kontinu.

Definisi 3.10.

Fungsi $h : (S,\mathcal{T}_1) \longrightarrow (T,\mathcal{T}_2)$ adalah suatu homeomorfisma bhb h dan h^{-1} adalah kontinu. Maka dapat kita katakan ruang topologi (S,τ_1) homeomorfis dengan ruang topologi (T,τ_2).

Contoh 3.11.

Jika E adalah ruang Euclidean topologi. Buat fungsi $h:E \longrightarrow E$ dengan $h(x) = 2x$ untuk setiap $x \in R$. Maka dapat kita buat fungsi $h^{-1}:E \longrightarrow E$ dengan $h^{-1}(x) = x/2$ untuk setiap $x \in R$. Karena fungsi h dan h^{-1} kontinu, maka h merupakan homeomorfisma.

3.5. Terhubung (Connected)

Definisi 3.11.

Ruang topologi (S,τ) terhubung bhb $S \neq G_1 \cup G_2$, dimana $G_1, G_2 \in \tau - \{\phi\}$ dan $G_1 \cap G_2 = \phi$.

Contoh 3.12.

Ruang Euclidean topologi adalah terhubung karena untuk setiap $G_1, G_2 \in \tau - \{\phi\}$ dan $G_1 \cap G_2 = \phi$ maka paling sedikit ada satu elemen $x \in R$ yang tidak termuat dalam $G_1 \cup G_2$.

Definisi 3.12.

Jika (S,τ) adalah ruang topologi dan $p, q \in S$, maka yang dinamakan path di (S,τ) dari p ke q adalah fungsi kontinu $f:I \longrightarrow (S,\tau)$ sedemikian sehingga $f(0)=p$ dan $f(1) = q$ dengan I adalah ruang topologi pada interval tertutup $[0,1] = \{x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ dengan topologi yang mempunyai basis berupa keluarga $\{[0,c) \mid 0 < c \leqslant 1\} \cup \{(d,1] \mid 0 \leqslant d < 1\} \cup \{(a,b) \mid 0 \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b \leqslant 1, a < b\}$.

Definisi 3.13.

Ruang topologi (S,τ) adalah path terhubung (path connected) bhb setiap dua elemen dari S dapat dihubungkan oleh sebuah path di dalam (S,τ).

Contoh 3.13.

$S = \{0,1\}$ dan $\tau = \{\phi, \{0\}, S\}$. Definisikan fungsi $f:I \longrightarrow (S,\tau)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{jika } t \in [0,1) = \{x \in R \mid 0 \leqslant x < 1\}. \\ 1 & \text{jika } t = 1. \end{cases}$$

$f^{-1}(\phi) = \phi$ dan $f^{-1}(\ 0\ ) = [0,1)$ adalah terbuka di I.

$f^{-1}(S) = [0,1]$ juga terbuka di I. Maka f adalah fungsi kontinu dengan $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$. Jadi f merupakan path dari 0 ke 1. Jadi (S,τ) adalah path terhubung.

Contoh 3. 14.

E adalah Ruang Euclidean topologi pada R. Untuk setiap dua titik a dan b di dalam R dapat dibuat fungsi $f:I \rightarrow E$ dengan $f(t) = (b - a)t + a$ untuk setiap $t \in [0,1]$.

f kontinu dengan $f(0) = a$ dan $f(1) = b$. Maka ruang Euclidean topologi adalah path terhubung.