BAB II

RELASI, FUNGSI DAN GRUP

2.1. Relasi dan Fungsi

Definisi 2.1.

Jika A dan B adalah himpunan, maka $R \subset A \times B$ adalah relasi dari A ke B bhb untuk setiap $a \in A$ pasti ada $b \in B$ sedemikian sehingga $(a,b) \in R$. Daerah asal (domain) dari R adalah A, daerah kawan (kodomain) dari R adalah B dan daerah hasil (range) dari R adalah $\{b \in B \mid (a,b) \in R, \text{ untuk beberapa } a \in A\}$

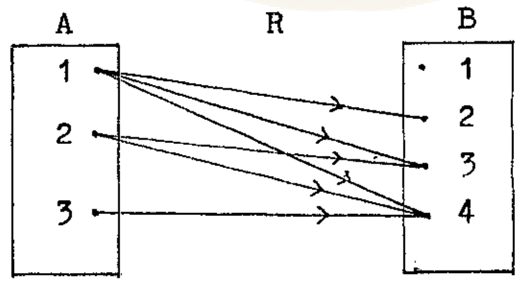
Contoh 2.1.

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(a,b) \mid b > a,\ a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Jadi $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

Maka R adalah suatu relasi dari A ke dalam B. Gambar di bawah ini memperlihatkan relasi R tersebut.



Definisi 2.2.

Suatu relasi ekwivalensi R pada suatu himpunan $S \neq \emptyset$ adalah suatu relasi dari S ke S yang memenuhi sifat-sifat :

1. Refleksif : $(x,x) \in R$, untuk setiap $x \in S$.
2. Simetris : jika $(x,y) \in R$ maka $(y,x) \in R$, untuk setiap $x,y \in S$.
3. Transitif : jika $(x,y),(y,z) \in R$ maka $(x,z) \in R$, untuk setiap $x,y,z \in S$.

Relasi ekwivalensi pada S ini mengakibatkan adanya penggolongan dari S ke dalam klas-klas yang disebut klas-klas ekwivalensi. Untuk setiap $x \in S$, himpunan yang berbentuk $\{y \in S \mid (x,y) \in R\}$ adalah klas ekwivalensi dari x dan ditulis dengan $[x]$.

Contoh 2.2.

S adalah himpunan bilangan bulat. Buat relasi R dengan $(a,b) \in R$ bhb $b = k \cdot 5 + a$, untuk $a,b,k \in S$.

Maka R adalah relasi ekwivalensi pada S dan disebut de - ngan relasi kongruensi modulo 5. S dibagi menjadi lima kelas ekwivalensi, yaitu :

$[0] = \{x \in S \mid x = k \cdot 5 + 0\}$

$[1] = \{x \in S \mid x = k \cdot 5 + 1\}$

$[2] = \{x \in S \mid x = k \cdot 5 + 2\}$

$[3] = \{x \in S \mid x = k \cdot 5 + 3\}$

$[4] = \{x \in S \mid x = k \cdot 5 + 4\}$

Definisi 2.3.

1. $f: A \longrightarrow B$ adalah fungsi dari A ke dalam B bhb f adalah relasi dari A ke dalam B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ ada dengan tunggal $b \in B$ dengan $(a,b) \in f$ atau biasa ditulis dengan $f(a) = b$.
2. $f: A \longrightarrow B$ adalah fungsi dari A pada (onto) B bhb f adalah fungsi dan daerah hasil dari f adalah B.
3. $f: A \longrightarrow B$ adalah fungsi satu-satu (injektif) bhb untuk setiap $a,b \in A$, jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$.
4. $f: A \longrightarrow B$ adalah fungsi bijektif bhb f pada dan satu-satu.
5. Jika $f: A \longrightarrow B$ adalah fungsi dan $C \subset B$, maka $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ disebut bayangan invers dari C oleh f.

Definisi 2.4.

1. $\mathcal{I}_A : A \longrightarrow A$ adalah fungsi identitas bhb $\mathcal{I}_A(x) = x$, untuk setiap $x \in A$.
2. $f : A \longrightarrow B$ adalah fungsi konstan bhb untuk setiap $x \in A$, $f(x) = b$, untuk suatu $b \in B$.

Definisi 2.5.

Jika $f : A \longrightarrow B$ dan $g : B \longrightarrow C$ adalah fungsi, maka fungsi komposisi $g \circ f : A \longrightarrow C$ adalah fungsi dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, untuk setiap $x \in A$.

Contoh 2.3.

B adalah himpunan bilangan bulat. Kita buat fungsi-fungsi $f : B \longrightarrow B$ dengan $f(x) = 2x$, untuk setiap $x \in B$ dan $g : B \longrightarrow B$ dengan $g(x) = 3x$, untuk setiap $x \in B$.

Maka dapat kita buat fungsi komposisi $g \circ f : B \longrightarrow B$ dengan

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(2x) \\
&= 6x, \text{ untuk setiap } x \in B.
\end{aligned}
$$

Definisi 2.6.

Jika A dan B adalah himpunan, $C \subset A$ dan $D \subset B$.

1. Fungsi inklusi $i : C \longrightarrow A$ didefinisikan dengan $i(x) = x$, untuk setiap $x \in C$.
2. Jika $f : A \longrightarrow B$ adalah fungsi, maka fungsi pembatasan f pada C ditulis $f|C : C \longrightarrow B$ didefinisikan dengan $(f|C)(x) = (f \circ i)(x)$, untuk setiap $x \in C$ dengan i adalah fungsi inklusi dari C ke A.
3. Jika $f : A \longrightarrow B$ dan $g : C \longrightarrow D$ adalah fungsi, maka f merupakan fungsi perluasan dari g bhb $f|C = g$.

Contoh 2.4.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{2,3,4,5,6\}$. Maka $C \subset A$ dan $D \subset B$. Kita buat fungsi $f : A \longrightarrow B$ dengan $f(x) = x + 1$, untuk setiap $x \in A$ dan

Maka $(f|C)(x) = (f\circ i)(x) = g(x)$, untuk setiap $x \in C$. Jadi $f|C = g$ adalah fungsi pembatasan f pada C. Sedangkan f adalah fungsi perluasan dari g.

Teorema 2.1.

Jika $f:A \longrightarrow B$ dan $g:B \longrightarrow C$ adalah fungsi serta $D \subset C$ maka $(g\circ f)^{-1}(D) = (f^{-1}\circ g^{-1})(D)$.

Bukti :

i) Ambil $x \in (g\circ f)^{-1}(D)$, maka $(g\circ f)(x) \in D$. Jadi $g(f(x)) \in D$ sehingga $f(x) \in g^{-1}(D)$. Jadi $x \in f^{-1}(g^{-1}(D))$, maka $x \in (f^{-1}\circ g^{-1})(D)$. Sehingga $(g\circ f)^{-1}(D) \subset (f^{-1}\circ g^{-1})(D)$.

ii) Ambil $x \in (f^{-1}\circ g^{-1})(D)$, maka $x \in f^{-1}(g^{-1}(D))$. Jadi $f(x) \in g^{-1}(D)$, sehingga $g(f(x)) \in D$, maka $(g\circ f)(x) \in D$. Sehingga $x \in (g\circ f)^{-1}(D)$. Jadi $(f^{-1}\circ g^{-1})(D) \subset (g\circ f)^{-1}(D)$.

Dari i) dan ii) maka $(g\circ f)^{-1}(D) = (f^{-1}\circ g^{-1})(D)$.

Teorema 2.2.

Jika $\mathcal{A}$ adalah suatu himpunan indeks yang tidak kosong, S adalah suatu himpunan dan $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ adalah suatu keluarga himpunan bagian dari S sedemikian sehingga $\bigcup_\alpha A_\alpha = S$. Jika untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$ ada fungsi-fungsi $f_\alpha : A_\alpha \longrightarrow T$ dengan $f_\alpha | A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta | A_\alpha \cap A_\beta$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Maka ada dengan tunggal $f:S \longrightarrow T$ yang merupakan fungsi perluasan dari setiap f_α, yang artinya untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, maka $f|A_\alpha = f_\alpha$.

Bukti :

Definisikan $f(x) = f_\alpha(x)$, untuk setiap $x \in S$ dimana α adalah suatu indeks sedemikian sehingga $x \in A_\alpha$. Definisi dari f ini adalah tunggal, karena jika $x \in A_\alpha \cap A_\beta$ untuk suatu $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, maka $x \in A_\alpha$ dan $x \in A_\beta$. Karena diketahui $f_\alpha | A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta | A_\alpha \cap A_\beta$, maka $f(x) = f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. f pasti terdefinisi di S, karena untuk setiap $x \in S$ pasti ada α dimana $x \in A_\alpha$.

Karena untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, f_α merupakan fungsi, maka f juga merupakan fungsi dari S ke dalam T. Karena untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha = f|A_\alpha$, maka f merupakan fungsi perluasan dari setiap f_α. Misal ada fungsi $g:S \longrightarrow T$ yang merupakan perluasan dari setiap f_α. Maka $g|A_\alpha = f_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Padahal $f|A_\alpha = f_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in \mathcal{A}$. Maka $f|A_\alpha = g|A_\alpha$ untuk setiap A_α. Jadi f=g. Sehingga terbukti bahwa fungsi perluasan dari setiap f_α adalah tunggal.

Contoh 2. 5.

Jika R = himpunan bilangan Real. S adalah interval tertutup $[-2,2] = \{x \in R \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$. $A_1 = [-2,-1]$, $A_2 = [-1,0]$, $A_3 = [0,1]$, $A_4 = [1,2]$. Buat fungsi-fungsi :

$f_1:A_1 \longrightarrow R$ didefinisikan dengan $f_1(x) = x + 2$, untuk setiap $x \in A_1$. $f_2:A_2 \longrightarrow R$ didefinisikan dengan $f_2(x) = -x$, untuk setiap $x \in A_2$. $f_3:A_3 \longrightarrow R$ didefinisikan dengan $f_3(x) = x$, untuk setiap $x \in A_3$. $f_4:A_4 \longrightarrow R$ didefinisikan dengan $f_4(x) = -x + 2$, untuk setiap $x \in A_4$.

$A_1 \cap A_2 = \{-1\}$ dan $f_1(-1) = f_2(-1) = 1$.

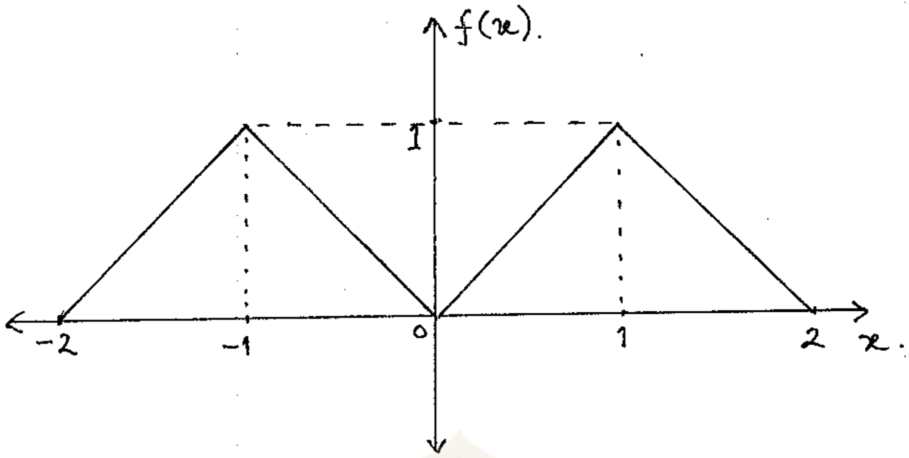
$A_2 \cap A_3 = \{0\}$ dan $f_2(0) = f_3(0) = 0$.

$A_3 \cap A_4 = \{1\}$ dan $f_3(1) = f_4(1) = 1$.

Maka dapat kita buat fungsi f yang merupakan perluasan dari f_1, f_2, f_3 dan f_4, yaitu $f:S \longrightarrow R$, dengan :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{jika } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{jika } x \in A_2 \\ f_3(x), & \text{jika } x \in A_3 \\ f_4(x), & \text{jika } x \in A_4 \end{cases}$$

Gambar berikut ini adalah grafik fungsi f dari S ke dalam R yang merupakan perluasan dari fungsi f_1, f_2, f_3 dan f_4.



2.2. Grup, homomorfisma dan isomorfisma

Definisi 2.7.

$(G,\circ)$ adalah sebuah grup bhb G adalah himpunan yang tidak kosong dan $\circ : G \times G \longrightarrow G$ adalah fungsi sedemikian sehingga :

1. $\circ$ asosiatif, yaitu $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, untuk setiap a, b, $c \in G$.
2. G memuat elemen identitas, yaitu ada $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$, untuk setiap $a \in G$.
3. Setiap $a \in G$ memiliki elemen invers di G, yaitu untuk setiap $a \in G$, ada $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Fungsi $\circ : G \times G \longrightarrow G$ biasa disebut sebagai operasi biner.

Contoh 2.6.

Jika B = himpunan bilangan bulat dan $\circ = +$ (operasi penjumlahan), maka (B,+) adalah suatu grup, karena :

1. Operasi penjumlahan adalah asosiatif.
2. Elemen identitas adalah 0 (bilangan nol), karena $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in B$.
3. Untuk setiap elemen $a \in B$ memiliki elemen invers yaitu $-a$, karena $a + (-a) = (-a) + a = 0$, untuk setiap $a \in B$.

Definisi 2.8.

Jika $(G,\circ)$ adalah grup, $H \subset G$ dan $H \neq \phi$ serta fungsi $* = \circ|H \times H$, maka $(H,*)$ adalah subgrup dari $(G,\circ)$ bhb $(H,*)$ adalah grup.

Contoh 2.7.

B = himpunan bilangan bulat. Dari contoh 2.6. $(B,+)$ adalah grup. Kita ambil $H \subset B$ dengan $H = \{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$. Karena $(H,+)$ juga merupakan grup, maka $(H,+)$ merupakan subgrup dari $(B,+)$.

Definisi 2.9.

1. Jika $(G,\circ)$ dan $(H,*)$ adalah grup dan $f:G \longrightarrow H$ adalah fungsi, maka f adalah homomorfisma grup bhb $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$, untuk setiap $a, b \in G$.
2. Jika $(G,\circ)$ dan $(H,*)$ adalah grup dan $f:G \longrightarrow H$ adalah homomorfisma, maka f adalah epimorfisma bhb f pada (onto).
3. Jika $(G,\circ)$ dan $(H,*)$ adalah grup dan $f:G \longrightarrow H$ adalah homomorfisma, maka f adalah monomorfisma bhb f satu-satu (injektif).
4. Jika $(G,\circ)$ dan $(H,*)$ adalah grup dan $f:G \longrightarrow H$ adalah homomorfisma, maka f adalah isomorfisma bhb f satu-satu dan pada (onto). Maka $(G,\circ)$ dikatakan isomorfis dengan $(H,*)$ dan ditulis $(G,\circ) \cong (H,*)$.

Contoh 2.8.

Ambil B = himpunan bilangan bulat, dari contoh 2.6. maka $(B,+)$ adalah grup. Ambil G = himpunan bilangan bulat modulo 5. Jadi $G = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ dengan :

$[0] = \{x \in B | x = k \cdot 5 + 0, \text{ untuk setiap } k \in B\}$

$[1] = \{x \in B | x = k \cdot 5 + 1, \text{ untuk setiap } k \in B\}$

$[2] = \{x \in B | x = k \cdot 5 + 2, \text{ untuk setiap } k \in B\}$

$[3] = \{x \in B \mid x = k \cdot 5 + 3$, untuk setiap $k \in B\}$

$[4] = \{x \in B \mid x = k \cdot 5 + 4$, untuk setiap $k \in B\}$

Definisikan aturan komposisi pada G, yaitu $[a] \oplus [b] = [a + b]$ untuk setiap a, $b \in B$. Mudah dibuktikan bahwa $(G, \oplus)$ adalah grup.

Definisikan fungsi $f: B \longrightarrow G$ dengan $f(x) = [x]$, untuk setiap $x \in B$.

- f adalah homomorfisma grup, karena :

  $$\begin{aligned} f(x + y) &= [x + y] \\ &= [x] \oplus [y] \\ &= f(x) \oplus f(y), \text{ untuk setiap } x, y \in B. \end{aligned}$$

- f adalah epimorfisma, karena untuk setiap $[x] \in G$, pasti ada $x \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = [x]$.