BAB III

METHODE PERHITUNGAN RANGKAIAN

3.1 Transformasi Rangkaian

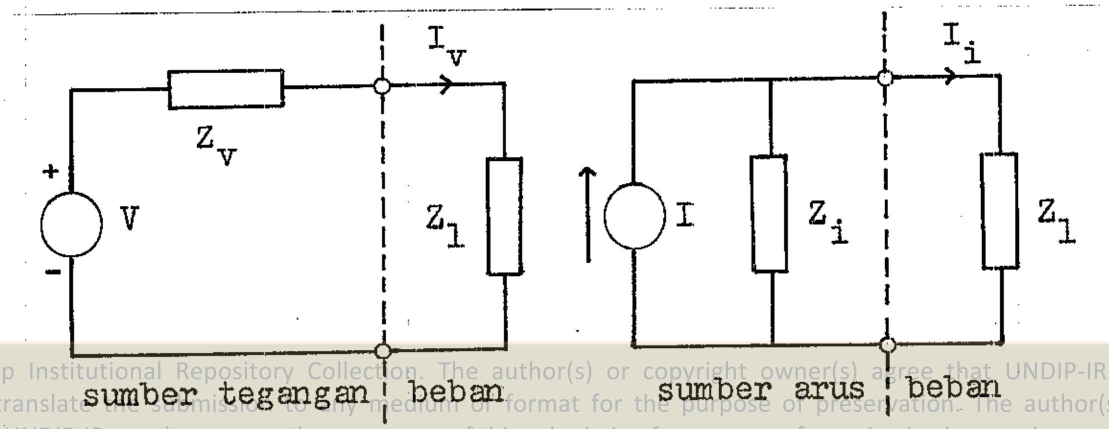
Untuk menganalisis rangkaian, diperlukan transformasi sumber energy (yaitu sumber tegangan diubah menjadi sumber arus atau sebaliknya), dan transformasi admittansi atau impedansi. Dalam buku ini dipergunakan transformasi Laplace untuk menganalisis suatu rangkaian listrik.

3.1.1 Transformasi Sumber Energy

Sebarang sumber energy praktis dapat digambarkan oleh sumber tegangan konstan atau sumber arus konstan. Oleh sebab itu, suatu sumber tegangan praktis dapat ditransformasikan menjadi suatu sumber arus dan sebaliknya. Nampak pada gambar 3.1(a) dan (b), masing-masing memperlihatkan sumber tegangan konstan dan sumber arus konstan, dan didalamnya terdapat masing-masing impedansi Z_v dan Z_i. Sumber-sumber tersebut mengalirkan arus lewat beban Z_l terus-menerus.

Pada gambar 3.1(a), sumber tegangan mempunyai beban Z_l, dan arus I_v mengalir terus-menerus yang besarnya dinyatakan oleh

$$I_v = \frac{V}{Z_v + Z_l} \qquad (3.1)$$



(a) Sumber tegangan. (b) Sumber arus.

Gambar 3.1 Transformasi sumber energy.

Pada gambar 3.1(b), sumber arus mempunyai beban Z_1 dan arus I_i mengalir terus-menerus yang besarnya dinyatakan oleh

$$I_i = \frac{Z_i I}{Z_i + Z_1} \tag{3.2}$$

Jika kedua sumber energy tersebut ekwivalen, maka arus beban I_v dan I_i harus sama ($I_v = I_i$).

Dari persamaan (3.1) dan (3.2), didapatkan

$$\frac{V}{Z_v + Z_1} = \frac{Z_i I}{Z_i + Z_1} \tag{3.3}$$

$$V = Z_i I. \tag{3.4}$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.4), maka

$$Z_v + Z_1 = Z_i + Z_1$$

$$Z_v = Z_i.$$

Jadi suatu sumber tegangan konstan V yang dihubungkan seri dengan impedansi Z, dapat disamakan dengan suatu sumber arus konstan I yang paralel dengan suatu impedansi Z, dengan $I = V/Z$.

3.1.2 Transformasi Laplace

Definisi:

Untuk suatu fungsi waktu f(t), transformasi Laplacenya adalah

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{3.5}$$

dengan s merupakan bilangan kompleks ($= \delta + jw$).

Fungsi f(t) dapat ditransformasikan secara Laplace, asalkan memenuhi

$$\int_0^\infty |f(t)|\; e^{-\delta t}\,dt < \infty. \tag{3.6}$$

Evaluasikan $\mathcal{L}[f(t)]$, yaitu $F(s)$ untuk pemberian fungsi $f(t)$ diselesaikan dengan methode biasa.

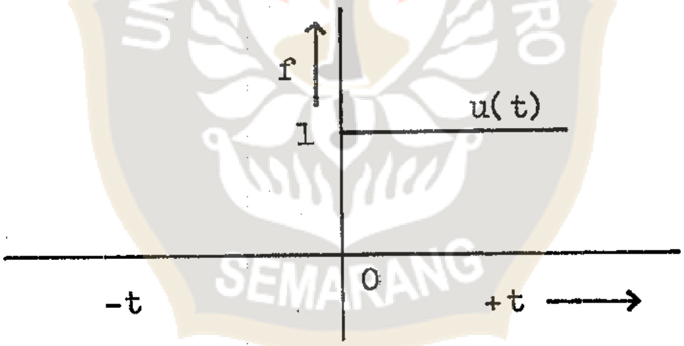
Transformasi Laplace dari beberapa bentuk fungsi waktu, yaitu:

1. Fungsi Tangga Satuan.

Gambar 3.2, memperlihatkan fungsi tangga satuan (Unit Step Function) $f = u(t)$. Fungsi tangga satuan dinyatakan dengan persamaan

$$f(t) = 1, \quad t \geq 0$$
$$= 0, \quad t < 0.$$

Fungsi tangga satuan ini dinyatakan oleh $u(t)$.



Gambar 3.2 Fungsi tangga satuan.

Apabila sebuah baterai V_o dihubungkan dengan suatu rangkaian pada saat $t = 0$, maka tegangan pendorongnya adalah $V_o\ u(t)$. Apabila $V_o = 1$, maka tegangan pendorongnya menjadi $u(t)$. Sehingga transformasi Laplace dari fungsi tangga satuan adalah

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_o^\infty e^{-st}\, dt = [-\frac{1}{s}\, e^{-st}]_o^\infty = \frac{1}{s}.$$

Jadi,

$$[V_o u(t)] = \frac{V_o}{s}.$$

2. $f(t) = e^{at}$, dengan a adalah konstanta.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_o^\infty e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_o^\infty e^{-(s-a)t}\, dt.$$

$$= [-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}]_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \ \delta_1 > a.$$

3. $f(t) = t.$

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t\ e^{-st}\ dt = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty (st)\ e^{-st}\ d(st)$$

$$= \frac{1}{s^2}\int_0^\infty x\ e^{-x}\ dx = \frac{1}{s^2}, \text{ dengan } x = st.$$

4. $f(t) = t^n.$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty x^n\ e^{-x}\ dx, \text{ dengan } x = st$$

$$= \frac{(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Apabila n adalah integer positif, maka

$$\Gamma(n+1) = \underline{|n}$$

Sehingga $\mathcal{L}[t^n] = \frac{\underline{|n}}{s^{n+1}}$

$$\frac{\mathcal{L}[t^n]}{\underline{|n}} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

5. $f(t) = \sinh at.$

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}]$$

$$= \frac{a}{s^2-a^2}.$$

6. $f(t) = \cosh at.$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}]$$

$$= \frac{s}{s^2-a^2}.$$

7. $f(t) = \sin at.$

$$\mathcal{L}[\sinh jat] = \frac{-ja}{s^2+a^2}, \text{ karena } \sinh jat = j \sin at.$$

maka $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}.$

8. $f(t) = \cos at.$

$$\mathcal{L}[\cosh jat] = \frac{s}{s^2+a^2}, \text{ karena } \cosh jat = \cos at,$$

maka $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}.$

3.1.2.1 Invers Transformasi Laplace

Karena fungsi F(s) dan f(t) memenuhi konsep pasangan transformasi, maka dapat dinyatakan sebagai

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t), \qquad (3.7)$$

simbol $\mathcal{L}^{-1}$ adalah bentuk umum invers transformasi Laplace.

3.1.2.2 Teorema Dasar Transformasi Laplace

(i) Transformasi Kombinasi Linier

Misalkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah dua fungsi waktu, dan misalkan a dan b adalah konstanta, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_0^\infty [af_1(t) + bf_2(t)]\, e^{-st}\, dt \\ &= a\int_0^\infty f_1(t)\, e^{-st}\, dt + b\int_0^\infty f_2(t)\, e^{-st}\, dt \\ &= a\, F_1(s) + b\, F_2(s).\end{aligned}$$

(ii) Transformasi Derivatif

Misalkan diberikan derivatif pertama $\frac{d}{dt} f(t)$, maka

$$\mathcal{L}[\tfrac{d}{dt} f(t)] = \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

misalkan $u = e^{-st} \longrightarrow du = -\,se^{-st}\, dt$

$dv = df(t) \longrightarrow v = f(t).$

Sehingga, $\int_a^b d(uv) = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du.$

Jadi didapatkan

$$\mathcal{L}[\tfrac{d}{dt} f(t)] = [e^{-st}f(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0+),$$

asalkan $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-st} = 0$, menurut aturan d'Hospital benar jika f(t) dan derivatifnya berhingga pada t = 0 dan δ > 0.

Diberikan derivatif kedua $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$, maka

$$\mathcal{L}[\frac{d^2f(t)}{dt^2}] = s\mathcal{L}[\tfrac{d}{dt} f(t)] - \tfrac{d}{dt} f(0+).$$

$$= s[sF(s) - f(0+)] - \frac{d}{dt} f(0+)$$

$$= s^2F(s) - sf(0+) - \frac{d}{dt} f(0+).$$

dengan $\frac{d}{dt}$ f(0+) adalah besaran yang dihitung pada saat t = 0

Untuk derivatif ke-n, adalah

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - \ldots\ldots\ldots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0+).$$

<u>(iii) Transformasi Integral</u>

Misalkan diberikan integral $\int_0^t f(t)\, dt$, maka

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \int_0^t \left[\int_0^t f(t)\, dt\right] e^{-st}\, dt$$

misalkan $u = \int_0^t f(t)\, dt \longrightarrow du = f(t)\, dt$

$dv = e^{-st}\, dt \longrightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}\, dt$

Sehingga didapatkan,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t)\, dt\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{F(s)}{s}.$$

<u>Cara lain:</u>

Misalkan $\phi(t) = \int_0^t f(t)\, dt$, maka

$$\phi'(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = f(t)$$

$$\phi(t) = 0.$$

Jadi $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\phi'(t)] = s\,\mathcal{L}[\phi(t)]$

atau $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\, F(s).$

<u>(iv) Parameter s Diganti (s - b)</u>

Jika s diganti oleh (s - b) dalam transformasi F(s), dengan b adalah konstanta, maka

$$F(s - b) = \int_0^\infty e^{-(s-b)t}\, f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{bt}\, f(t)]\, dt$$

$$= \mathcal{L}[e^{bt}\, f(t)].$$

Sehingga,

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ t^n] = \frac{(n+1)}{(s-b)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ t] = \frac{1}{(s-b)^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ \sin\ at] = \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ \cos\ at] = \frac{(s-b)}{(s-b)^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ \sinh\ at] = \frac{a}{(s-b)^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{bt}\ \cosh\ at] = \frac{(s-b)}{(s-b)^2-a^2}$$

(v) Invers Laplace Derivatif F(s)

$$\frac{dF(s)}{ds} = F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}\ f(t)]\ dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[-t\ f(t)]\ dt$$

$$= \mathcal{L}[-t\ f(t)].$$

Begitu pula, $F''(s) = \frac{d^2}{ds^2} F(s) = \mathcal{L}[t^2\ f(t)].$

Jadi bentuk umumnya $F^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}[(-t)^n\ f(t)].$

Sehingga didapatkan,

$$\mathcal{L}[t\ \sin\ at] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}[t\ \cos\ at] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

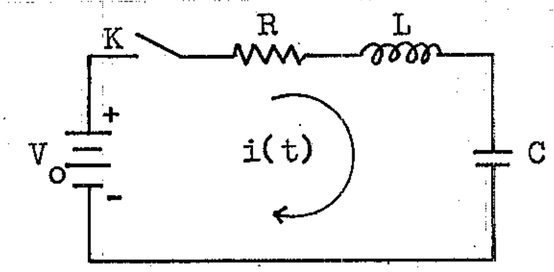
$$\mathcal{L}[t\ \sinh\ at] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}[t\ \cosh\ at] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$$

Dari rumus-rumus tersebut dibentuk tabel transformasi Laplace.

3.1.2.3 Transformasi Laplace Untuk Menganalisis Rangkaian Sederhana

(i) Rangkaian RLC Seri



Gambar 3.3 Rangkaian RLC.

Dalam rangkaian RLC seri gambar 3.3, dipakai sumber tegangan d.c V_o dan misalkan saklar K ditutup pada saat t=0. Hukum Kirchhoff's tegangan pada rangkaian RLC tersebut,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, dt = V_o\, u(t).$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{o} i\, dt + \frac{1}{C}\int_{o}^{t} i\, dt = V_o\, u(t). \qquad (3.8)$$

Persamaan transformasi Laplacenya adalah

$$L[sI(s) - i(0+)] + RI(s) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\, q(0+) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = \frac{V_o}{s}$$

$$L[sI(s) - i(0+)] + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{q(0+)}{s} + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = \frac{V_o}{s} \qquad (3.9)$$

<u>Kondisi Awal:</u> Arus induktor L pada saat t = 0 adalah i(0+) = 0, demikian juga muatan kapasitor C pada saat t = 0 adalah q(0+) = 0.

Sehingga,

$$Ls\,I(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{s} = \frac{V_o}{s}$$

$$I(s)[Ls + R + \frac{1}{Cs}] = V_o\frac{1}{s}$$

$$I(s) = \frac{V_o}{[Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}]}$$

$$= \frac{V_o}{L(s - s_1)(s - s_2)} \qquad (3.10)$$

dengan s_1, s_2 adalah akar-akar persamaan

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0.$$

Jadi $$s_1, s_2 = \frac{-R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}$$

Invers transformasi Laplace persamaan (3.10) adalah

$$i(t) = \frac{V_o/L}{(s_1 - s_2)}[e^{s_1 t} - e^{s_2 t}].$$

Contoh:

Dalam rangkaian gambar 3.3, V_o = 10 volt, R = 5 ohms, L = 1 H, dan C = 0,25 farad. K ditutup pada saat t = 0. Diasumsikan bahwa, aliran arus induktor L adalah nol dan muatan ujung kapasitor C juga nol sebelum saklar K ditutup.

Penyelesaian:

Substitusikan nilai-nilai R, L, C dan V_o pada persamaan (3.10), maka

$$I(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 4}$$

$$= \frac{10}{(s + 1)(s + 4)}$$

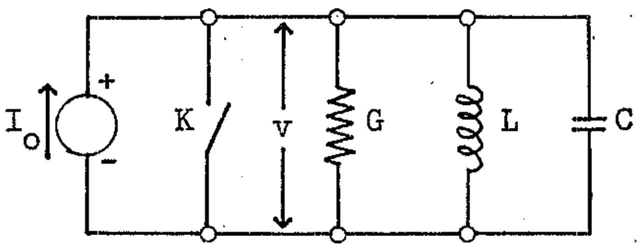
Invers transformasi Laplacenya adalah

$$i(t) = \frac{10}{-1 - (-4)} [e^{-t} - e^{-4t}]$$

$$= \frac{10}{3} [e^{-t} - e^{-4t}]$$

(ii) Rangkaian RLC Paralel

Pada rangkaian RLC paralel gambar 3.4, misal saklar K dibuka pada saat t = 0, jadi menghubungkan sumber arus d.c I_o dengan rangkaian. Dengan menggunakan hukum Kirchhoff arus didapatkan,



Gambar 3.4 Rangkaian RLC paralel.

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v\, dt = I_o\, u(t)$$

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{o} v\, dt + \frac{1}{L} \int_{o}^{t} v\, dt = I_o\, u(t). \quad (3.11)$$

Jadi persamaan transformasi Laplacenya adalah

$$C[sV(s) - v(0+)] + G\, V(s) + \frac{1}{L} \ell\phi(0+) + \frac{1}{L} \frac{V(s)}{s} = \frac{I_o}{s}$$

dengan $\phi(0+)$ adalah flux rangkaian yang sama dengan $Li(0+)$.

Kondisi Awal: Tegangan awal dari kapasitor C pada saat $t = 0$ adalah $v(0+) = 0$. Arus awal dari induktor L pada saat $t = 0$ adalah $i(0+) = 0$, sehingga $\phi(0+) = 0$.

Substitusikan dua kondisi awal ini kedalam persamaan (3.11), didapatkan

$$CsV(s) + GV(s) + \frac{1}{Ls} V(s) = \frac{1}{s} I_o$$

atau

$$V(s) \left[Cs + G + \frac{1}{Ls}\right] = \frac{1}{s} I_o$$

Sehingga

$$V(s) = \frac{I_o}{(Cs^2 + Gs + \frac{1}{L})}$$

$$= \frac{I_o}{C(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC})}$$

$$= \frac{I_o}{C(s - s_1)(s - s_2)}, \qquad (3.12)$$

dengan s_1, s_2 adalah akar-akar dari persamaan

$$Cs^2 + Gs + \frac{1}{L} = 0.$$

Jadi $$s_1, s_2 = \frac{-G}{2s} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - 4\frac{C}{L}}$$

Invers transformasi Laplace dari persamaan (3.12),

$$v(t) = \frac{I_o}{s_1 - s_2}\left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right].$$

Contoh:

Pada rangkaian gambar 3.4 dengan sumber arus d.c 6 A, $R = \frac{1}{4}$ Ohm, $L = \frac{1}{4}$ H dan $C = 1$ F. Misalkan muatan awal kapasitor nol, dan arus awal induktor juga nol.

Penyelesaian:

Subtitusikan nilai-nilai R, L, C dan sumber arus pada persamaan (3.12), didapatkan

$$V(s) = \frac{6}{s^2 + 4s + 4}$$

$$= \frac{6}{(s + 2)(s + 2)}$$

Dengan invers transformasi Laplace, didapatkan

$$v(t) = 6t\ e^{-2t}.$$

3.1.2.4 Uraian Pecahan Parsial

Persamaan defferensial dalam bentuk umum

$$a_o \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n\ i = v(t), \quad (3.13)$$

bentuk transformasi Laplacenya adalah

$$I(s) = \frac{\mathcal{L}[v(t)] + \text{suku-suku keadaan awal}}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.14)$$

Jadi dapat ditulis sebagai,

$$I(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.15)$$

dimana N(s) dan D(s) adalah polinomial dalam s.

D(s) = 0 merupakan persamaan karakteristik polinomial tersebut. Jika transformasi $\frac{N(s)}{D(s)}$ dapat diperoleh dari tabel, penyelesaiannya langsung ditemukan. Tetapi biasanya, I(s) harus dipecah-pecah menjadi suku-suku yang lebih sederhana sebelum menggunakan tabel transformasi Laplace.

Langkah pertama dalam menguraikan $\frac{N(s)}{D(s)}$, diperiksa apakah derajat polinomial N(s) lebih kecil dari pada D(s). Jika keadaan itu tidak dipenuhi, kita bagi pembilang dengan penyebutnya untuk mendapatkan uraian dalam bentuk

$$\frac{N(s)}{D(s)} = A_o + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots\ldots + A_{n-d} s^{n-d} + \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (3.16)$$

dimana n merupakan derajat tertinggi yang dimiliki pembilang dan d derajat tertinggi pada penyebut. Fungsi baru dari $\frac{N(s)}{D(s)}$ telah siap dan aturan derajatnya sudah terpenuhi.

Selanjutnya kita faktorkan polinomial penyebut D(s),

$$\begin{aligned} D(s) &= a_o s^d + a_1 s^{d-1} + \ldots\ldots + a_{d-1} s + a_d \\ &= a_o (s - s_1)(s - s_2) + \ldots\ldots + (s - s_d) \end{aligned} \quad (3.17)$$

dimana $s_1, s_2, \ldots, s_d$ adalah d buah akar persamaan D(s) = 0.

Bentuk-bentuk yang mungkin timbul untuk akar-akar persamaan karakteristik tersebut adalah:

(i) Nyata Dan Sederhana

$$\frac{N_1(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots\ldots(s-s_d)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \ldots\ldots + \frac{K_d}{s-s_d} \qquad (3.18)$$

dengan K_1, K_2 dan seterusnya adalah konstanta-konstanta nyata yang disebut residu.

(ii) Pasangan Sekawan Komplek

$$\frac{N_1(s)}{(s-\alpha-jw)(s-\alpha+jw)} = \frac{K_1}{(s-\alpha-jw)} + \frac{K_1^*}{(s-\alpha+jw)} + \ldots\ldots \qquad (3.19)$$

dengan K_1 dan K_1^* adalah bentuk pasangan sekawan komplek.

(iii) Kelipatan r

a). $$\frac{N_1(s)}{(s-s_1)^r} = \frac{K_1}{(s-s_1)} + \frac{K_2}{(s-s_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{K_r}{(s-s_1)^r} \qquad (3.20)$$

b). $$\frac{N_1(s)}{(s-s_1)(s-s_2)^r} = \frac{K_1}{(s-s_1)} + \frac{K_2}{(s-s_2)^1} + \ldots\ldots + \frac{K_r}{(s-s_2)^r} \qquad (3.21)$$

c). $$\frac{N_1(s)}{(s^2-s-s_1)^r(s-s_2)} = \frac{K_1 s+K_2}{(s^2-s-s_1)} + \frac{K_3 s+K_4}{(s^2-s-s_1)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{K_{(2r-1)} s+K_{2r}}{(s^2-s-s_1)^r} + \frac{K_{(2r+1)}}{(s-s_2)} \qquad (3.22)$$

3.1.2.5 Teorema Uraian Pecahan Parsial Heaviside

Teorema ini untuk melengkapi methode perhitungan koeffisien K_1, K_2 dan seterusnya dalam uraian pecahan parsial.

(i) Nyata Dan Sederhana

Kembali pada akar nyata dan sederhana, uraian pecahan parsial diberikan oleh persamaan

$$\frac{N_1(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \ldots\ldots + \frac{K_d}{s - s_d} \qquad (3.23)$$

Koeffisien K_1, K_2, ..., K_d memerlukan penghitungan. Sebarang koeffisien K_p dapat dihitung dengan

$$K_p = \left[\frac{N_1(s)}{D(s)}\,(s - s_p)\right]_{s=s_p}, \qquad (3.24)$$

dimana s dibuat sama dengan nilai akar penyebut $(s - s_p)$.

(ii) Akar-Akar Berulang

Misalkan setiap akar sama dengan s_p yang berulang r.

$$\frac{N_1(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_p)^r} = \frac{K_1}{(s-s_p)} + \frac{K_2}{(s-s_p)^2} + \ldots\ldots + \frac{K_n}{(s-s_p)^n} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{K_r}{(s-s_p)^r} \qquad (3.25)$$

dengan n adalah suatu suku dalam uraian pecahan parsial yang kurang dari r.

P(s) diberikan oleh,

$$P(s) = \frac{N_1(s)}{D(s)} (s - s_p)^r. \qquad (3.26)$$

Kalikan persamaan (3.25) dengan kwantitas $(s-s_p)^r$, maka didapatkan

$$P(s) = K_1(s-s_p)^{r-1} + K_2(s-s_p)^{r-2} + \ldots\ldots + K_r. \qquad (3.27)$$

Sekarang jika kita misalkan $s=s_p$, setiap suku sebelah kanan dari persamaan (3.27) hilang kecuali suku K_r. Jadi nilai K_r diberikan sebagai,

$$K_r = [P(s)]_{s=s_p}. \qquad (3.28)$$

Kemudian defferensialkan persamaan (3.27) terhadap s, dimisalkan $s=s_p$. Maka kita dapatkan nilai K_{r-1} adalah

$$K_{r-1} = [\frac{d}{ds} P(s)]_{s=s_p}. \qquad (3.29)$$

Secara berturut-turut dengan mendefferensialkan, akan didapatkan nilai setiap koeffisien K_1, K_2 dan seterusnya.

Bentuk umum suku K_n didapatkan dengan mendefferensialkan persamaan (3.27) sebanyak (r-n) kali dan misalkan $s=s_p$. Yaitu

$$K_n = \frac{1}{\lfloor(r-n)} [\frac{d^{r-n}}{ds^{r-n}} P(s)]_{s=s_p} \qquad (3.30)$$

atau $$K_n = \frac{1}{\lfloor(r-n)} [\frac{d^{r-n}}{ds^{r-n}} \frac{N_1(s)}{D(s)} (s-s_p)^r]_{s=s_p}. \qquad (3.31)$$

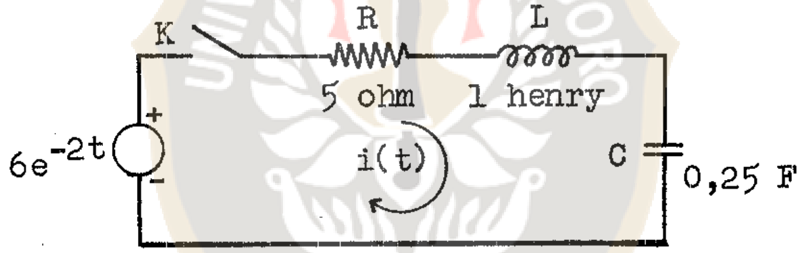
Contoh (1)

Rangkaian RLC seri gambar 3.5, R = 5 ohm, L = 1 H dan C = 0,25 F. Tegangannya 6 e^{-2t} V. Saklar K ditutup pada waktu t = 0. Dibutuhkan jawaban lengkap secara khusus pada rangkaian dengan menggunakan transformasi Laplace untuk mendapatkan arus i(t). Diassumsikan aliran arus induktor L nol, juga muatan ujung kapasitor C nol sebelum saklar K ditutup.

Penyelesaian:

Hukum Kirchhoff's tegangan pada rangkaian, adalah

$$L\,\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,dt = 6e^{-2t}. \qquad (1)$$



Gambar 3.5 Rangkaian RLC seri dengan sumber tegangan exponensial.

Dengan transformasi Laplace, persamaan (1) menjadi

$$L[sI(s) - i(0+)] + R\,I(s) + \frac{1}{C}\,\frac{q(0+)}{s} + \frac{1}{C}\,\frac{I(s)}{s} = \frac{6}{s+2} \qquad (2)$$

Kondisi awal: Pada saat t = 0+, arus i(0+) induktor L sama pada saat t = 0-. Jadi i(0+) = 0. Selanjutnya pada saat t = 0+, muatan q(0+) ujung kapasitor sama pada saat t = 0-. Jadi q(0+) = 0.

Subtitusikan kondisi awal ini dalam persamaan (2),

$$I(s)\left[Ls + R + \frac{1}{Cs}\right] = \frac{6}{s+2} \qquad (3)$$

atau

$$I(s) = \frac{6}{(s+2)\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)}$$

$$= \frac{6s}{L(s+2)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{CL}\right)} \qquad (4)$$

Subtitusikan nilai R, L dan C dalam persamaan (4),

$$I(s) = \frac{6s}{(s+2)(s^2+5s+4)}$$

$$= \frac{6s}{(s+2)(s+1)(s+4)} \qquad (5)$$

misalkan,

$$\frac{6s}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} \qquad (6)$$

Dengan menggunakan teorema uraian pecahan Heaviside, didapatkan

$$I(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{6}{s+2} + \frac{-4}{s+4} \qquad (7)$$

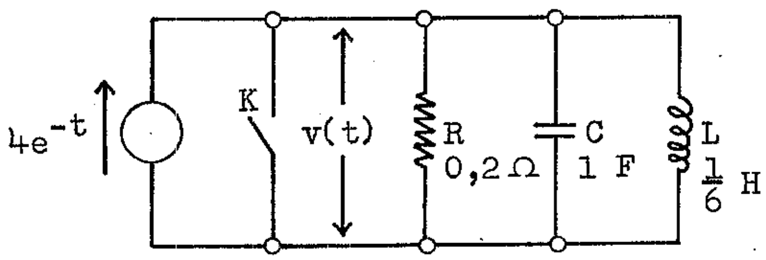
Dengan invers transformasi Laplace, didapatkan

$$i(t) = -2e^{-t} + 6e^{-2t} - 4e^{-4t}.$$

Contoh (2)

Diketahui rangkaian RLC paralel pada gambar 3.6, dimana $R = 0{,}2$ ohm, $L = \frac{1}{6}$ H dan $C = 1$ farad. Arusnya $4e^{-t}$ A. Dan saklar K ditutup pada saat $t = 0$. Dibutuhkan penyelesaian secara khusus untuk memperoleh tegangan ujung $v(t)$ pada rangkaian. Diassumsikan aliran arus induktor L nol dan muatan dari ujung kapasitor C nol sebelum saklar K ditutup.

Penyelesaian:



Gambar 3.6 Rangkaian RLC paralel dengan sumber arus exponensial.

Penerapan hukum Kirchhoff's arus pada rangkaian,

$$C\frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,dt = 4e^{-t}. \qquad (1)$$

Transformasi Laplace dari persamaan (1) adalah

$$C[sV(s) - v(0+)] + G\,V(s) + \frac{1}{L}\frac{\phi(0+)}{s} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} = \frac{4}{s+1} \qquad (2)$$

Kondisi Awal: Tegangan awal kapasitor C, $v(0+) = 0$ se bab tegangan kapasitor tidak mempunyai muatan sesaat. Demikian juga arus pada induktor dalam interval waktu $-\infty$ sampai 0 adalah nol, yaitu $\phi(0-) = 0$. Sehingga $\phi(0+) = 0$, karena flux dalam induktor tidak mempunyai muatan sesaat.

Substitusikan kondisi awal dalam persamaan (2), maka

$$V(s)[Cs + G + \frac{1}{Ls}] = \frac{4}{s+1}$$

$$V(s) = \frac{4}{(s+1)(Cs + G + \frac{1}{LC})}$$

$$= \frac{4s}{C(s+1)(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC})}$$

$$= \frac{4s}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)}$$

$$= \frac{4s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \qquad (3)$$

misalkan $$V(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \qquad (4)$$

Dengan menggunakan teorema uraian pecahan Heaviside, didapatkan

$$V(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{8}{s+2} + \frac{-6}{s+3} \qquad (5)$$

Dengan invers transformasi Laplace, didapatkan

$$v(t) = -2e^{-t} + 8e^{-2t} - 6e^{-3t}. \qquad (6)$$

<u>Contoh (3)</u>

Sebuah tegangan sinusoidal 25 sin 10t dipakai pada saat $t = 0$ untuk rangkaian RL seri yang memuat $R = 5$ ohm dan $L = 1$ henry. Dengan methode transformasi Laplace, didapatkan arus $i(t)$. Diassumsikan aliran arus induktor nol sebelum menggunakan tegangan.

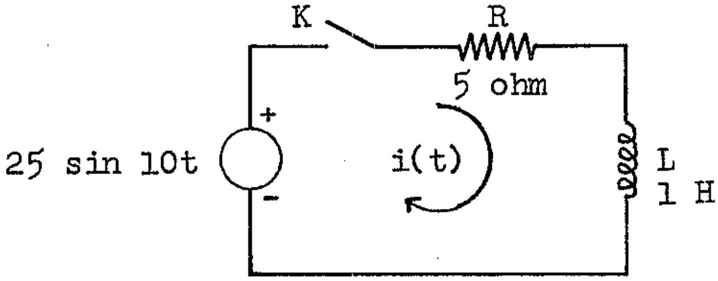
<u>Penyelesaian:</u>

Penerapan hukum Kirchhoff's tegangan pada rangkaian,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 25 \sin 10t. \qquad (1)$$

Transformasi Laplace dari persamaan (1) adalah:

$$L[sI(s) - i(0+)] + R\,I(s) = \frac{10}{s^2 + 100} \qquad (2)$$



Gambar 3.7 Rangkaian RL seri dengan sumber tegangan sinusoidal.

<u>Kondisi awal:</u> Disini tidak ada aliran arus pada induktor sebelum saklar K ditutup, yaitu i(0-) = 0. Sehingga arus awal induktor L pada saat t = 0 adalah i(0+) = 0.

Subtitusikan i(0+) = 0 pada persamaan (2), didapatkan

$$I(s)(Ls + R) = \frac{250}{s^2 + 100}$$

$$I(s) = \frac{250}{(s + 5)(s^2 + 100)}$$

$$= \frac{250}{(s + 5)(s + 10j)(s - 10j)} \qquad (3)$$

Dengan menggunakan invers transformasi Laplace, persamaan (3) menjadi

$$i(t) = 250\left[\frac{e^{-5t}}{(10j - 5)(-10j - 5)} + \frac{e^{-10jt}}{(5 - 10j)(-10j - 10j)} + \frac{e^{10jt}}{(5 + 10j)(10j + 10j)}\right]$$

$$= 250\left[\frac{e^{-5t}}{125} + \frac{e^{-10jt}}{-100(j + 2)} + \frac{e^{10jt}}{100(j - 2)}\right]$$

$$= 2e^{-5t} - \tfrac{1}{2}(2 - j)e^{-10jt} - \tfrac{1}{2}(2 + j)e^{10jt}$$

$$= 2e^{-5t} - \tfrac{1}{2}j(e^{10jt} - e^{-10jt}) - (e^{10jt} + e^{-10jt})$$

$$= 2e^{-5t} + \sin 10t - 2\cos 10t$$

$$= 2e^{-5t} + 5\sin(10t - \tan^{-1} 2). \qquad (4)$$

3.1.3 Transformasi Impedansi Dan Admittansi

Transformasi impedansi dan admittansi pada setiap elemen rangkaian RLC digambarkan sebagai berikut:

1. Resistor

Dalam daerah waktu, hubungan arus, tegangan dan resistansi dinyatakan oleh hukum Ohm's. Jadi resistor R Ohm, tegangan $v_R(t)$ pada sebarang waktu dinyatakan

$$v_R(t) = R\, i_R(t) \qquad (3.30)$$

atau

$$i_R(t) = G\, v_R(t) \qquad (3.31)$$

dengan

$$G = \frac{1}{R}$$

Persamaan transformasi dari (3.30) dan (3.31), adalah

$$V_R(s) = R\, I_R(s) \qquad (3.32)$$

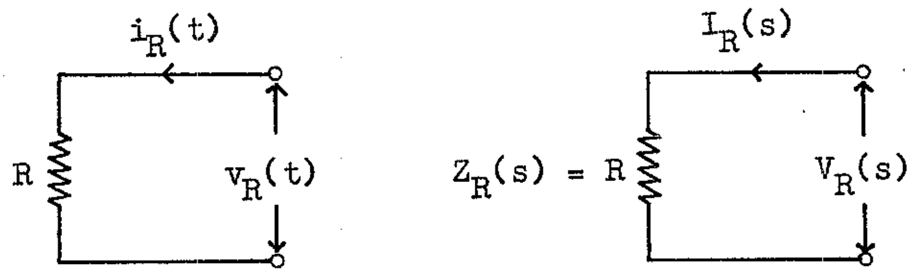
$$I_R(s) = G\, V_R(s) \qquad (3.33)$$

Transformasi impedansi dari resistor didefinisikan

$$Z_R(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)} = R \qquad (3.34)$$

Transformasi admittansi dari resistor didefinisikan

$$Y_R(s) = \frac{I_R(s)}{V_R(s)} = G \qquad (3.35)$$



(a) Resistor dalam daerah waktu. (b) Transformasi resistor.

Gambar 3.8 Resistor dan transformasi impedansi.

2. Induktor

Dalam daerah waktu, hukum Kirchhoff II menyatakan hu bungan arus $i_L(t)$ dari induktor L dengan tegangan $v_L(t)$ pada ujung-ujungnya, yaitu

$$v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (3.36)$$

atau

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt \qquad (3.37)$$

Persamaan transformasi Laplace dari (3.36) adalah

$$V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0+)] \qquad (3.38)$$

$$Ls\,I_L(s) = V_L(s) + L\,i_L(0+) \qquad (3.39)$$

Dalam persamaan (3.38) dan (3.39), $V_L(s)$ adalah transformasi Laplace dengan memakai tegangan $v_L(t)$, dan $L\,i_L(0+)$ adalah transformasi tegangan mula-mula oleh arus awal $i_L(0+)$ yang berada didalam induktor pada saat $t = 0+$.

Misalkan $V_1(s) = V_L(s) + L\,i_L(0+)$, (3.40)

maka persamaan (3.39) menjadi

$$Ls\,I_L(s) = V_1(s). \qquad (3.41)$$

$V_I(s)$ adalah transformasi total tegangan induktor. Transformasi impedansi induktor L adalah perbandingan transformasi tegangan $V_L(s)$ dengan transformasi arus $I_L(s)$.

$$Z_L(s) = \frac{V_1(s)}{I_L(s)} = Ls \qquad (3.42)$$

Gambar 3.9(a) rangkaian induktor L pada daerah waktu, aliran arus $i_L(t)$ dan tegangan $v_L(t)$.

Disini $i_L(t)$ memuat arus awal $i_L(0+)$. Gambar 3.9(b), transformasi impedansi dari induktor L.

Persamaan transformasi Laplace dari (3.37) adalah,

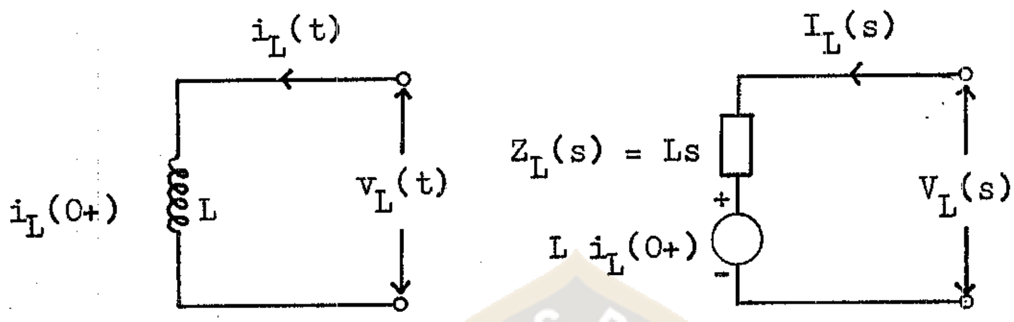
$$I_L(s) = \frac{1}{L}\left[\frac{V_L(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{+0} V_L(t)\,dt}{s}\right] \qquad (3.43)$$

Tetapi $\int_{-\infty}^{0+} v_L(t)\,dt = L\,i_L(0+)$. (3.44)

Sehingga persamaan (3.43) menjadi,

$$I_L(s) = \frac{1}{L}\frac{V_L(s)}{s} + \frac{i_L(0+)}{s} \qquad (3.45)$$

atau
$$\frac{1}{Ls} V_L(s) = I_L(s) - \frac{i_L(0+)}{s} \qquad (3.46)$$



(a) Induktor dengan arus awal $i_L(0+)$.
(b) Gambaran transformasi induktor.

Gambar 3.9 Induktor dan transformasi impedansi.

Dalam persamaan (3.46), $I_L(s)$ adalah transformasi Laplace dengan menggunakan arus $i_L(t)$, dan $\frac{i_L(0+)}{s}$ adalah transformasi arus mula-mula oleh arus awal $i_L(0+)$ dalam induktor.

Misalkan $I_1(s) = I_L(s) - \frac{i_L(0+)}{s}$. (3.47)

Maka persamaan (3.46) menjadi,

$$\frac{1}{Ls} V_L(s) = I_1(s). \qquad (3.48)$$

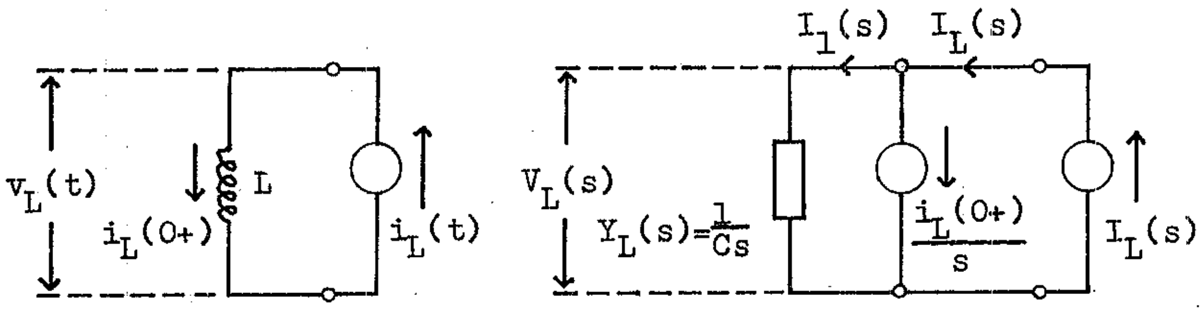
$I_L(s)$ adalah transformasi total aliran arus induktor L. Sehingga transformasi admittansi induktor L adalah perbandingan transformasi arus $I_1(s)$ dengan transformasi tegangan $V_L(s)$, yaitu

$$Y_L(s) = \frac{I_1(s)}{V_L(s)} = \frac{1}{Ls} \qquad (3.49)$$

Gambar 3.10(a) memperlihatkan gambar daerah waktu dari induktor L dengan arus awal $i_L(0+)$. Dan arus $i_L(t)$ memuat arus awal $i_L(0+)$. Gambar 3.10(b) transformasi admittansi dari induktor L persamaan (3.46).

Kombinasikan (3.42) dan (3.49), didapatkan

$$Z_L(s) = \frac{1}{Y_L(s)} = Ls. \qquad (3.50)$$



(a) Daerah waktu induktor L dengan arus awal $i_L(0+)$

(b) Transformasi induktor dengan arus awal $i_L(0+)$.

Gambar 3.10 Daerah waktu dan tranformasi admitansi induktor.

3. Kapasitor

Dalam daerah waktu, persamaan dari arus $i_C(t)$ pada kapasitor C berbanding dengan tegangan $v_C(t)$, yaitu

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (3.51)$$

atau

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\,dt. \qquad (3.52)$$

Persamaan transformasi Laplace (3.52) adalah

$$V_C(s) = \frac{1}{C}\left[\frac{I_C(s)}{s} + \frac{q(0+)}{s}\right] \qquad (3.53)$$

dengan q(0+) adalah muatan awal kapasitor, dan

$$\frac{q(0+)}{C} = v_C(0+)$$

merupakan tegangan awal kapasitor.

Pada persamaan (3.53), $\frac{q(0+)}{Cs}$ atau $\frac{v_C(0+)}{s}$ adalah transformasi tegangan mula-mula oleh tegangan awal $v_C(0+)$ kapasitor C pada saat t = 0.

Persamaan (3.53) dapat diatur sebagai,

$$\frac{1}{Cs}\,I_C(s) = V_C(s) - \frac{v_C(0+)}{s} \qquad (3.54)$$

Misalkan $$V_1(s) = V_C(s) - \frac{v_C(0+)}{s} \qquad (3.55)$$

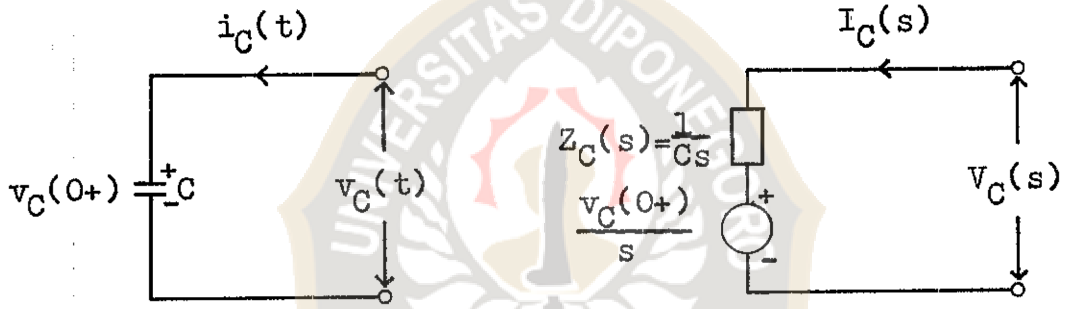
Sehingga persamaan (3.54) menjadi,

$$\frac{1}{Cs}\,I_C(s) = V_1(s) \qquad (3.56)$$

$V_1(s)$ adalah transformasi total tegangan kapasitor. Sehingga transformasi impedansi dari kapasitor C adalah perbandingan antara transformasi tegangan $V_1(s)$ dengan transformasi arus $I_C(s)$, yaitu

$$Z_C(s) = \frac{V_1(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{3.57}$$

Gambar 3.11(a), memperlihatkan daerah waktu kapasitor C dengan tegangan awal $v_C(0+)$. Tegangan $V_1(s)$ memuat tegangan awal $v_C(0+)$. Gambar 3.11(b), memperlihatkan transformasi impedansi kapasitor dari persamaan (3.54).



(a) Daerah waktu kapasitor C dengan tegangan $v_C(0+)$.

(b) Transformasi kapasitor C dengan tegangan $v_C(0+)$.

Gamb 3.11 Daerah waktu dan transformasi impedansi kapasitor.

Persamaan transformasi dari persamaan (3.51), adalah

$$I_C(s) = C\,[sV_C(s) - v_C(0+)] \tag{3.58}$$

atau

$$Cs\,V_C(s) = I_C(s) + C\,v_C(0+) \tag{3.59}$$

Misalkan aliran arus admittansi $Y_C(s)$ kapasitor C adalah $I_1(s)$, maka

$$I_1(s) = I_C(s) + C\,v_C(0+) \tag{3.60}$$

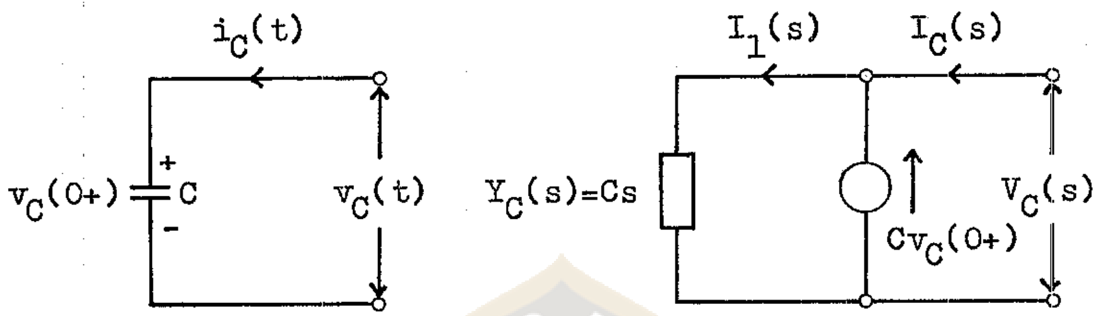
Sehingga persamaan (3.59) dapat dinyatakan sebagai,

$$Cs\,V_C(s) = I_1(s) \tag{3.61}$$

Jadi transformasi admittansi kapasitor C adalah transformasi arus $I_1(s)$ berbanding dengan transformasi tegangan $V_C(s)$, yaitu

$$Y_C(s) = \frac{I_1(s)}{V_C(s)} = Cs \tag{3.62}$$

Gambar 3.12(a), memperlihatkan daerah waktu kapasitor C dengan tegangan awal $v_C(0+)$. Gambar 3.12(b), menggambarkan transformasi kapasitor dengan admittansi persamaan (3.60).



(a) Kapasitor C dengan tegangan awal $v_C(0+)$.

(b) Transformasi kapasitor C dengan tegangan awal $v_C(0+)$.

Gambar 3.12 Kapasitor dengan tegangan awal, dan transformasi representation admittansinya.

Kombinasikan persamaan (3.57) dan (3.62), sehingga kita dapatkan

$$Z_C(s) = \frac{1}{Y_C(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{3.63}$$

3.2 Determinan

Kita ambil sebuah matrik bujur sangkar n × n,

$$M = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots\cdots\cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots\cdots\cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots\cdots\cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari M disingkat $|M|$, kita definisikan sebagai berikut ini

$$|M| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots\cdots\cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \cdots\cdots\cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots\cdots\cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

3.2.1 Minor Dan Kofaktor

Definisi: Determinan yang terjadi bila baris ke-i dan kolom ke-j dari suatu determinan dihilangkan disebut Minor dari unsur d_{ij}.

Minor dinyatakan dengan simbol: $|M_{ij}|$, untuk memudahkan kadang-kadang digunakan simbol M_{ij} saja. Simbol yang benar adalah $|M_{ij}|$, karena M_{ij} adalah matrik yang terjadi dari suatu matrik jika baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan.

Misalkan,

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots\cdots & d_{1j} & \cdots\cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots\cdots & d_{2j} & \cdots\cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots\cdots & d_{ij} & \cdots\cdots & d_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots\cdots & d_{nj} & \cdots\cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

maka:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots\cdots & d_{1j-1} & d_{1j+1} & \cdots\cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots\cdots & d_{2j-1} & d_{2j+1} & \cdots\cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ d_{i1-1} & d_{i2-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{in-1} \\ d_{i1+1} & d_{i2+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d_{in+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots\cdots & d_{nj-1} & d_{nj+1} & \cdots\cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

dan determinan dari matrik $M_{ij} = |D_{ij}|$ disebut minor dari unsur d_{ij}.

Misalkan diketahui determinan 3 × 3,

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

Sehingga minor-minor determinan tersebut adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{22} & d_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{21} & d_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$$

Sekarang apabila kita hitung dengan methode ''Sarrus'', akan didapatkan bahwa:

$$D = d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}d_{32} + d_{12}d_{23}d_{31} - d_{12}d_{21}d_{33} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{13}d_{22}d_{31}.$$

$$= d_{11}(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}) + d_{12}(d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33}) + d_{13}(d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31}).$$

Yang berada dalam kurung disebut kofaktor dari d_{11}, d_{12}, dan d_{13}. Ini adalah uraian determinan menurut baris pertama. Determinan dapat diuraikan menurut baris ke-i dan kolom ke-j.

Kembali pada determinan tingkat 3 yang diuraikan menurut baris pertama seperti di atas, dengan kofaktor dari d_{11} ditulis sebagai D_{11}.

$$D_{11} = (d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}) = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$D_{12} = (d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33}) = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} = - M_{12}$$

$$D_{13} = (d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31}) = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix} = M_{13}$$

Dan selanjutnya diperoleh rumus umum:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M \quad . \qquad (3.64)$$

Jadi determinan tingkat/derajat 3 dapat diuraikan

$$D_3 = d_{11}D_{11} + d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13}.$$

Sehingga rumus umum determinan matrik dapat ditulis

$$|D| = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}D_{ij}, \quad \text{dengan i sebarang.} \qquad (3.65)$$

$$|D| = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}D_{ij}, \quad \text{dengan j sebarang.} \qquad (3.66)$$

Sekarang jika sebuah baris dikalikan dengan kofaktor dari baris lain, misalnya

$$d_{11}D_{21} + d_{12}D_{22} + d_{13}D_{23} = - d_{11}M_{21} + d_{12}M_{22} + d_{13}M_{23}$$

$$= - d_{11}\begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} + d_{12}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} + d_{13}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ sebab terdapat 2 baris yang sama.}$$

Jadi rumus umumnya dapat ditulis

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}D_{kj} = |D|, \quad \text{jika } i = k, \qquad (3.67)$$
$$= 0, \quad \text{jika } i \neq k.$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij}D_{kj} = |D|, \quad \text{jika } j = k, \qquad (3.68)$$
$$= 0, \quad \text{jika } j \neq k.$$

3.2.2 Matrik Inversi

Definisi: Apabila matrik D merupakan matrik bujur sangkar. Suatu matrik C disebut ''inversi'' dari matrik D (ditulis $C = D^{-1}$), apabila $DD^{-1} = D^{-1}D = I$. Ukuran matrik I sama dengan ukuran matrik D.

Matrik* Dan Matrik Ajoin

Jika D adalah suatu matrik bujur sangkar (n × n), dan D_{ij} merupakan kofaktor dalam $|D|$, didefinisikan matrik

$$D^* = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots\cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots\cdots & D_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots\cdots & D_{nn} \end{vmatrix}$$

Definisi:

Transpose dari D^* disebut ajoin D, dan ditulis dengan simbol D^+. Sehingga $D^+ = (D^*)^1$.

$$D^+ = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots\cdots\cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots\cdots\cdots & D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots\cdots\cdots & D_{nn} \end{vmatrix}$$

Dalil: Untuk setiap matrik bujur sangkar berlaku hubungan

$$DD^+ = D^+D = |D|I.$$

Bukti:

Karena apabila suatu baris dari determinan dikalikan dengan kofaktor dari baris tersebut, hasilnya adalah determinan $|D|$ itu sendiri, dan apabila dikalikan dengan kofaktor dari baris lain akan menghasilkan nol.

Jadi

$$DD^+ = D^+D = \begin{vmatrix} |D| & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & |D| & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & |D| & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & |D| \end{vmatrix}$$

sehingga didapatkan

$$DD^+ = D^+D = |D|I. \tag{3.69}$$

Matrik Singular Dan Nonsingular

Definisi: Matrik D dikatakan matrik singular jika $|D| = 0$, dan dikatakan matrik non singular jika $|D| \neq 0$.

Dari definisi diatas, jelas bahwa matrik-matrik tersebut merupakan matrik bujur sangkar.

Matrik Invers

Dari rumus (3.69), untuk setiap matrik bujur sangkar nonsingular berlaku

$$\frac{DD^+}{|D|} = \frac{D^+D}{|D|} = I. \qquad (3.70)$$

Sedangkan dari definisi matrik invers adalah

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I, \qquad (3.71)$$

sehingga didapatkan

$$D^{-1} = \frac{D^+}{|D|}. \qquad (3.72)$$

Contoh Soal:

Tentukan jawaban dari sistem persamaan linier nonhomogen berikut ini, dengan cara diatas.

$$2x_1 + 3x_2 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

Penyelesaian:

Karena $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

maka didapatkan $D^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $D^+ = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|D| = 4 - 3 = 1 \text{ dan } D^{-1} = D^*.$$

Jadi $$X = D^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Teorema Binet-Cauchy

Jika Q dan R adalah matrik $(k \times m)$ dan $(m \times k)$ dengan $k < m$, maka determinan hasil kalinya

det(QR) = jumlah hasil kali hubungan determinan mayor dari Q dan R.

Istilah determinan mayor atau mayor saja, berarti determinan submatrik bujur sangkar dari Q (atau R) yang dibentuk oleh pengambilan sebarang k kolom (atau baris). Istilah hubungan, berarti jika kolom $i_1, i_2, \ldots, i_k$ dari Q dipilih untuk suatu mayor khusus, maka mayor dari Q pasti berhubungan dengan baris $i_1, i_2, \ldots, i_k$ dari R. Jelas, $\binom{m}{k}$ banyaknya hasil kali.

Contoh:

Misalkan $Q = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det(QR) = \det\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} .$$

$$= 2.(-2) + 4.1 + (-2).4 = -8.$$

Bukti:

Untuk mengevaluasi det(QR), misalkan kita buat dan kalikan dua matrik sekatan $(m + k) \times (m + k)$:

$$\begin{bmatrix} I_k & -Q \\ 0 & I_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Q & 0 \\ I_m & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -QR \\ I_m & R \end{bmatrix},$$

dengan I_m dan I_k merupakan matrik identitas dengan derajat m dan k. Oleh karena itu,

$$\det\begin{bmatrix} Q & 0 \\ I_m & R \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & -QR \\ I_m & R \end{bmatrix} .$$

Sehingga,
$$\det(QR) = \det \begin{bmatrix} Q & 0 \\ I_m & R \end{bmatrix}. \qquad (3.73)$$

Misalkan sekarang digunakan methode uraian Cauchy pada persamaan (3.73) sebelah kanan, jelas bahwa hanya minor-minor tidak nol dengan derajat sebarang didalam matrik I_m adalah minor-minor utama dari derajat itu. Jadi uraian Cauchy terdiri dari minor-minor ini dengan derajat m - k dikalikan kofaktor dengan derajat k didalam Q dan R.

3.2.4 Nullity Matrik Dan Hukum Sylvester's

Jika Q suatu matrik (n × n), maka Qx = 0 mempunyai solusi non-trivial x ≠ 0 jika dan hanya jika Q singular, yaitu $|Q| = 0$. Himpunan semua vektor x memenuhi Qx = 0, merupakan bentuk ruang vektor (disebut ruang nol) dari Q. Rank dari ruang nol disebut nullity Q. Sehingga terdapat
$$\text{rank } Q + \text{nullity } Q = n. \qquad (3.74)$$

Hukum Sylvester's nullity untuk memperoleh nullity gabungan dari matrik, dinyatakan sebagai berikut:

Hukum Sylvester's:

Jika Q matrik (k × n) dan R matrik (n × p), maka
$$\text{nullity } QR \leq \text{nullity } Q + \text{nullity } R. \qquad (3.75)$$

Bukti:

Karena setiap vektor x memenuhi Rx = 0, maka pasti memenuhi QRx = 0. Jadi didapatkan
$$\text{nullity } QR \geq \text{nullity } R \geq 0. \qquad (3.76)$$

Misalkan s nullity matrik R, maka terdapat himpunan s vektor independent linier
$$[x_1, x_2, \ldots, x_s],$$
merupakan bentuk basis ruang nol dari R. Jadi
$$Rx_i = 0, \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (3.77)$$

Misalkan (s + t) nullity matrik QR. Maka terdapat himpunan t vektor independent linier

$$[x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{s+t}],$$

dimana himpunan

$$[x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{s+t}]$$

merupakan bentuk basis ruang nol dari matrik QR. Jadi

$$QRx_i = 0, \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, s, s+1, \ldots, s+t. \qquad (3.78)$$

Dari sisi lain, (s + t) vektor x_i bentuk basis ruang nol QR, s vektor adalah nol pada matrik R, dan Rx_i sisanya tidak nol (untuk i = s+1, s+2,..., s+t), adalah nol pada matrik Q.

Vektor $Rx_{s+1}, Rx_{s+2}, \ldots, R_{s+t}$

adalah independent linier, jika

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 Rx_{s+1} + a_2 Rx_{s+2} + \ldots + a_t Rx_{s+t} \\ &= R(a_1 x_{s+1} + a_2 x_{s+2} + \ldots + a_t x_{s+t}), \end{aligned}$$

maka vektor $(a_1 x_{s+1} + a_2 x_{s+2} + \ldots + a_t x_{s+t})$ pasti berada di dalam ruang nol R, jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 0$.

Jadi terdapat sedikitnya t vektor independent linier nol pada matrik Q, oleh karena itu

$$\text{nullity } Q \geq t.$$

Tetapi karena $t = (s + t) - s$

$$= \text{nullity } QR - \text{nullity } R,$$

maka $\text{nullity } QR \leq \text{nullity } Q + \text{nullity } R.$

Subtitusikan persamaan (3.74) dalam persamaan (3.75), maka didapatkan

$$\text{rank } QR \geq \text{rank } Q + \text{rank } R - n. \qquad (3.79)$$

Jika hasil kali matrik QR adalah nol, maka persamaan (3.79) menjadi

$$\text{rank } Q + \text{rank } R \leq n. \qquad (3.80)$$