BAB II

RUANG INNER PRODUCT DAN NILAI HARAPAN BERSYARAT

2.1. Fungsi dan Ruang Metrik

2.1.1. Konsep-konsep Penting

Definisi 5.

Suatu himpunan adalah kumpulan dari elemen-elemen atau obyek-obyek.Apabila suatu elemen x milik dari himpunan A,kita tulis $x \in A$.Apabila x tidak milik dari A ditulis $x \notin A$.
Pada tulisan ini $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai himpunan dari semua bilangan riil sedangkan $\emptyset$ adalah himpunan kosong.
Apabila A dan B adalah himpunan-himpunan dan setiap elemen dari B juga milik dari A maka B adalah suatu himpunan bagian dari A.Kita tulis $B \subset A$ atau $A \supset B$.
Apabila A adalah sebarang himpunan maka $\emptyset \subset A$ dan $\emptyset \subset \emptyset$.
Apabila B tidak suatu himpunan bagian dari A,ditulis $B \not\subset A$.

Contoh 1.

Apabila R adalah himpunan dari semua bilangan riil,Z adalah himpunan dari semua bilangan bulat,J adalah himpunan dari semua bilangan bulat positif dan R' adalah himpunan dari semua bilangan rasional.
Kita dapat mendefinisikan himpunan - himpunan di atas dengan :

$Z = \{x \in R : x \text{ adalah suatu bilangan bulat}\}$

$J = \{x \in Z : x = 1, 2, \ldots\}$

$R' = \{x \in R : x = p/q \ , p, q \in Z \ , q \neq 0\}$

Sehingga $\emptyset \subset J \subset Z \subset R' \subset R$ dan $0 \notin J$.

Definisi 6.

Dua himpunan A dan B dikatakan sama jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.
Dalam hal ini kita tulis $A = B$.Apabila dua himpunan A dan B tidak sama ditulis $A \neq B$.
Apabila X adalah suatu himpunan dan $A \subset X$.Maka komplemen dari himpunan bagian A terhadap X adalah himpunan dari elemen-elemen

Definisi 7.

Dianggap A dan B adalah himpunan bagian dari X. Kita definisikan gabungan dari himpunan A dan B yang dinyatakan dengan $A \cup B$ adalah himpunan dari semua elemen yang ada di dalam A atau B. Ditulis $A \cup B = \{ x \in X : x \in A \text{ atau } x \in B \}$.

Sedangkan irisan himpunan A dan B adalah himpunan dari semua elemen milik A dan B dan dinyatakan dengan $A \cap B$.

Ditulis $A \cap B = \{ x \in X : x \in A \text{ dan } x \in B \}$.

Apabila irisan dari dua himpunan A dan B adalah kosong, artinya $A \cap B = \emptyset$. Kita katakan A dan B saling asing.

Dianggap n adalah sebarang bilangan bulat positif dan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan himpunan bagian dari X. Himpunan $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ didefinisikan himpunan dari semua $x \in X$, dimana x di dalam sekurang-kurangnya satu dari himpunan bagian A_i, $i=1,2,\ldots,n$.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \in X : x \in A_i \text{ untuk beberapa } i = 1,2,\ldots,n \}.$$

Sedangkan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ adalah himpunan yang terdiri dari elemen-elemen X, dimana elemennya adalah milik dari semua himpunan bagian $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \in X : x \in A_i \text{ untuk semua } i = 1,2,\ldots,n \}.$$

Definisi 8.

Dianggap X dan Y adalah dua himpunan tidak kosong. Kita definisikan cartesian product dari X dan Y, dinyatakan dengan X x Y sebagai himpunan dari semua pasangan berurutan, dimana elemen pertamanya anggota X dan elemen kedua anggota Y.

$$X \times Y = \{ (x,y) : x \in X, y \in Y \}.$$

Apabila $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan n sebarang himpunan tidak kosong. Maka cartesian product dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dinyatakan dengan $X_1 x X_2 x \ldots x X_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n \}$.

Definisi 9.

Setiap hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut titik dan keseluruhan dari hasil yang mungkin disebut ruang sampel. Notasi untuk ruang sampel digunakan Ω sedangkan untuk tidari ruang sampel. Kelas dengan anggota-anggotanya semua kejadian yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang kejadian. Ruang kejadian biasa diberi notasi $\mathcal{A}$.

2.1.2. Pengertian Fungsi

Definisi 10.

Dianggap dua himpunan A dan B tidak kosong. Suatu fungsi dari A ke B adalah suatu aturan yang mana setiap elemen x dari A menentukan dengan tunggal satu anggota dari B, yang mana kita nyatakan dengan f(x). Maka f disebut suatu fungsi dari A ke B. Himpunan A disebut domain dari f dan elemen-elemen f(x) disebut harga dari f. Himpunan dari semua harga dari f disebut range dari f.

Definisi 11.

Dianggap A dan B adalah dua himpunan dan f adalah suatu pemetaan dari A ke B. Apabila $E \subset A$, f(E) didefinisikan himpunan dari semua elemen-elemen f(x), untuk $x \in E$. Maka f(E) adalah peta dari E di bawah f. f(A) adalah range dari f dan $f(A) \subset B$.

Apabila $D \subset B$, $f^{-1}(D)$ adalah himpunan dari semua $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) \in D$. Maka $f^{-1}(D)$ adalah kebalikan peta dari D di bawah f.

Definisi 12.

Misalkan Ω adalah suatu ruang sampel dengan titik ω dan A himpunan bagian dari Ω. Fungsi indikator dari A dinyatakan dengan $I_A(.)$ adalah fungsi dengan domain Ω dan kodomain $\{0,1\}$, yang didefinisikan sebagai :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{apabila } \omega \in A \\ 0 & \text{apabila } \omega \notin A \end{cases}$$

Contoh 2.

(i). Apabila h adalah suatu fungsi berharga riil yang didefinisikan pada Ω dan c adalah suatu bilangan riil.

$$I_{[h \leqslant c]}(x) = 0 \quad \text{apabila } h(x) > c.$$

Dimana $[h \leqslant c] \subset \Omega$, dengan $[h \leqslant c]$ adalah himpunan tertutup fungsi-fungsi h yang berharga $\leqslant$ c.

(ii). Sedangkan untuk bilangan riil :

$I_{(-\infty,c)}(t)=1$ apabila $t \leqslant c$; $I_{(-\infty,c)}(t)=0$ apabila $t>c$

dan $I_{(-\infty,c]}[h(x)] = I_{[h \leqslant c]}(x)$,dimana $(-\infty,c) \subset \Omega$.

Dengan $(-\infty,c)$ didefinisikan himpunan terbuka dari bilangan-bilangan riil.

Definisi 13.

Misalkan Ω adalah ruang sampel dan $\mathcal{A}$ adalah σ-field. Suatu fungsi probabilitas P(.) atau disebut juga ukuran probabilitas adalah fungsi himpunan dengan domain $\mathcal{A}$ dan kodomain $[0,1]$ yang memenuhi :

(i). $P(A) \geqslant 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$.

(ii). $P(\Omega) = 1$.

(iii), Apabila $A_1, A_2, \ldots$, barisan kejadian yang saling asing di dalam $\mathcal{A}$ yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$; $i,j=1,2,\ldots$ dan $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ maka $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definisi 14.

Suatu ruang probabilitas adalah tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dimana Ω adalah ruang sampel , $\mathcal{A}$ adalah σ-field dan P adalah fungsi probabilitas dengan domain $\mathcal{A}$.

Himpunan A disebut terbilang apabila A berhingga atau anggota-anggota A dikawankan satu-satu dengan anggota-anggota J.

2.1.3. Ruang Metrik

Definisi 15.

Dianggap X suatu himpunan tidak kosong sebarang dan ρ adalah suatu fungsi berharga riil pada X x X, yaitu $\rho : X \times X \dashrightarrow R$, dimana ρ memenuhi sifat-sifat :

(i). $\rho(x,y) \geqslant 0$ untuk semua $x,y \in X$ dan $\rho(x,y)=0$ bila dan hanya bila $x=y$.

(iii). $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ untuk semua $x,y,z \in X$.

Maka fungsi ρ disebut suatu metrik pada X dan sistem matematik yang terdiri atas ρ dan X yaitu $\{X;\rho\}$ disebut ruang metrik.

Himpunan X sering disebut himpunan utama dari ruang metrik, elemen-elemen dari X disebut titik dan $\rho(x,y)$ disebut jarak dari suatu titik $x \in X$ ke suatu titik $y \in X$.

Dalam aksioma (i). jarak antara dua titik yang berbeda adalah suatu bilangan positif tunggal dan sama dengan nol bila dan hanya bila dua titik itu sama.

Aksioma (ii). menunjukan jarak antara titik x dan y sama dengan jarak antara titik y dan x.

Aksioma (iii). disebut pertidaksamaan segi tiga.

<u>Theorema 1.</u>

Apabila $\{X;\rho\}$ adalah suatu ruang metrik dan x,y,z sebarang elemen dari X. Maka $|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ untuk semua $x,y,z \in X$.

<u>Bukti :</u>

Menurut aksioma (iii). definisi 15. dipenuhi bahwa

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

dan

$$\rho(y,z) \leq \rho(y,x)+\rho(x,z) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Dari (1) kita dapatkan $\rho(x,z)-\rho(y,z) \leq \rho(x,y)$ .... (3)

dan dari (2) kita dapatkan $-\rho(y,x) \leq \rho(x,z)-\rho(y,z)$ ... (4)

Dari aksioma (ii). definisi 15. didapatkan $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

Dengan demikian dari (3) dan (4) berlaku

$-\rho(x,y) \leq \rho(x,z)-\rho(y,z) \leq \rho(x,y)$. Sehingga terbukti

$|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ untuk semua $x,y,z \in X$.

<u>Definisi 16.</u>

Dianggap $x_0 \in X$ dan $r \in R$, $r > 0$. Suatu bola terbuka dinyatakan dengan $B(x_0;r)$ adalah didefinisikan sebagai himpunan

$B(x_0;r)=\{x \in X: \rho(x,x_0) < r\}$. Titik tetap x_0 disebut pusat dan bilangan r disebut jari-jari dari $B(x_0;r)$.

<u>Definisi 17.</u>

Dianggap Y adalah suatu himpunan bagian dari X. Suatu titik $x \in X$ disebut suatu titik hubung dari himpunan Y apabila setiap bola terbuka dengan pusat x memuat sekurang-kurangnya satu titik dari Y.Himpunan dari semua titik hubung dari Y disebut penutup dari Y dan dinyatakan dengan $\bar{Y}$.

Definisi 18.

Dianggap Y adalah suatu himpunan bagian dari X dan $x \in X$ adalah suatu titik hubung dari Y.Titik x disebut suatu titik limit atau titik akumulasi dari himpunan Y apabila setiap bola dengan pusat x memuat bilangan tidak berhingga dari titik-titik Y.Suatu titik $x \in X$ disebut suatu titik dalam dari Y apabila ada suatu bola $B(x;r)$ sedemikian hingga $B(x;r) \subset Y$.

Definisi 19.

Suatu himpunan bagian Y dari X disebut suatu himpunan bagian tertutup dari X apabila $Y = \bar{Y}$.Suatu himpunan bagian G dari X disebut suatu himpunan bagian terbuka dari X apabila setiap titik dari G adalah suatu titik dalam dari G.

Definisi 20.

Suatu barisan $\{x_n\}$ di dalam suatu himpunan $Y \subset X$ adalah suatu fungsi $f:J \to Y$.Dengan demikian apabila $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di dalam Y maka $f(n) = x_n$ untuk setiap $n \in J$.

Definisi 21.

Dianggap $\{x_n\}$ adalah suatu barisan dari titik-titik di dalam X dan x adalah suatu titik dari X.Barisan $\{x_n\}$ disebut konvergen ke x apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$,ada suatu bilangan bulat N sedemikian hingga untuk semua $n \geqslant N$ berlaku $\rho(x,x_n) < \varepsilon$, maksudnya $x_n \in B(x;\varepsilon)$ untuk semua $n \geqslant N$.
Kita sebut x adalah limit dari $\{x_n\}$ dan biasa ditulis $\lim_n x_n = x$ atau $x_n \to x$ pada $n \to \infty$.

Apabila tidak ada $x \in X$ yang konvergen maka dikatakan bahwa $\{x_n\}$ divergen.Dengan demikian $x_n \to x$ jika dan hanya jika barisan dari bilangan riil $\{\rho(x_n,x)\}$ konvergen ke nol.

Definisi 22.

$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ adalah suatu barisan dari bilangan bulat positif yang mana dengan tepat bertambah yaitu $n_j > n_k$ untuk $j > k$. Maka barisan $\{x_{n_k}\}$ disebut suatu barisan bagian dari $\{x_n\}$. Apabila barisan bagian $\{x_{n_k}\}$ konvergen maka limitnya disebut suatu limit barisan bagian dari $\{x_n\}$.

Theorema 2.

Apabila $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di dalam X. Maka

(i). Ada paling banyak satu titik $x \in X$ sedemikian hingga

$$\lim_n x_n = x.$$

(ii). Apabila $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ dan $y \in X$ maka

$$\lim_n \rho(x_n, y) = \rho(x, y).$$

Bukti :

Untuk membuktikan bagian (i). dianggap bahwa $x, y \in X$ dan $\lim_n x_n = x$ dan $\lim_n x_n = y$. Maka setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif N_x dan N_y sedemikian hingga $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ bilamana $n \geqslant N_x$ dan $\rho(x_n, y) < \varepsilon/2$ bilamana $n \geqslant N_y$.

Apabila kita pilih $N = \text{mak}\,(N_x, N_y)$ maka dipenuhi bahwa

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Diketahui ε adalah sebarang bilangan positif, $\rho(x,y) < \varepsilon$ dengan setiap $\varepsilon > 0$ didapatlah $\rho(x,y) = 0$. Oleh karena itu $x = y$.

Untuk membuktikan bagian (ii). yaitu menurut theorema 1. bahwa $|\rho(y,x) - \rho(y,x_n)| \leqslant \rho(x, x_n)$.

Diketahui bahwa $\lim_n x_n = x$. Oleh karena itu $\lim_n \rho(x_n, x) = 0$. Sehingga $\lim_n |\rho(y,x) - \rho(y,x_n)| = 0$. Didapat $\lim_n \rho(y, x_n) = \rho(y,x)$.

Theorema 3.

Apabila Y adalah suatu himpunan bagian dari X. Maka

(i). $x \in X$ adalah suatu titik hubung dari Y jika dan hanya jika ada suatu barisan $\{y_n\}$ di dalam Y sedemikian hingga $\lim_n y_n = x$.

(ii). $x \in X$ adalah suatu titik limit dari himpunan Y jika dan hanya jika ada suatu barisan $\{y_n\}$ dari titik-titik yang berbeda di dalam Y sedemikian hingga $\lim_n y_n = x$.

(iii). Y adalah tertutup jika dan hanya jika untuk setiap barisan konvergen $\{y_n\}$ sedemikian hingga $y_n \in Y$ untuk semua n, $\lim_n y_n = x \in Y$.

<u>Bukti :</u>

Untuk membuktikan bagian (i).dianggap bahwa $\lim_n y_n=x$. Maka setiap bola dengan pusat x memuat sekurang-kurangnya satu titik dari barisan $\{y_n\}$ dan setiap titik dari $\{y_n\}$ adalah suatu titik dari Y.Ini sesuai bahwa x adalah suatu titik hubung dari Y.

Sebaliknya dianggap bahwa x adalah suatu titik hubung dari Y.Maka setiap bola dengan pusat x memuat sekurang-kurangnya satu titik dari Y.

Sekarang dipilih untuk setiap bilangan bulat positif n,suatu titik $y_n \in Y$ sedemikian hingga $y_n \in B(x;1/n)$.Maka ini sesuai bahwa barisan $\{y_n\}$ terpilih di dalam sifat konvergen ke x.Khususnya apabila diberikan $\varepsilon > 0$ dan kita pilih suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga $1/N < \varepsilon$.Maka untuk setiap $n \geqslant N$ kita dapatkan $y_n \in B(x;1/n) \subset B(x;\varepsilon)$.Sehingga $\lim_n y_n = x$.

Untuk membuktikan bagian ke (ii).dianggap bahwa x adalah suatu titik limit dari himpunan Y.Maka setiap bola $B(x;1/n)$ memuat suatu bilangan tidak berhingga dari titik-titik Y dan kita dapat memilih suatu $y_n \in B(x;1/n)$ sedemikian hingga $y_n \neq y_m$ untuk semua $m < n$.Barisan $\{y_n\}$ terdiri dari titik-titik yang berbeda dan konvergen ke x.Karena untuk setiap bilangan bulat positif n,ada suatu titik $y_n \in Y$ sedemikian hingga $y_n \in B(x;1/n)$. Apabila diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang,ada suatu bilangan bulat positif N sedemikian hingga $1/N < \varepsilon$ .Maka untuk setiap $n \geqslant N$ kita dapatkan $y_n \in B(x;1/n) \subset B(x;\varepsilon)$.

Sebaliknya apabila $\{y_n\}$ adalah suatu barisan dari titik -titik yang berbeda konvergen ke x dan $B(x;\varepsilon)$adalah sebarang bola dengan pusat pada x .Maka menurut definisi dari konvergen ada suatu N sedemikian hingga untuk semua $n \geqslant N$ berlaku

Y di dalam $B(x;\varepsilon)$. Sehingga $x \in X$ adalah suatu titik limit dari himpunan Y.

Untuk membuktikan (iii). dianggap bahwa Y adalah tertutup dan $\{y_n\}$ adalah suatu barisan konvergen dengan $y_n \in Y$ untuk semua n dan $\lim_n y_n = x$. Kita tunjukkan bahwa $x \in Y$.
Menurut bagian (i). x adalah suatu titik hubung dari Y. Dari Y adalah tertutup maka $x \in Y$.

Selanjutnya kita buktikan kebalikannya. Apabila x adalah suatu titik hubung dari Y. Maka menurut bagian (i). ada suatu barisan $\{y_n\}$ di dalam Y sedemikian hingga $\lim_n y_n = x$. Diketahui setiap barisan konvergen $\{y_n\}$ sedemikian hingga $y_n \in Y$ untuk semua n dan $\lim_n y_n = x \in Y$.
Dari Y memuat semua titik-titik hubungnya maka Y adalah tertutup.

<u>Definisi 23.</u>

Suatu barisan $\{x_n\}$ dari titik-titik di dalam suatu ruang metrik $\{X;\rho\}$ disebut suatu barisan Cauchy atau suatu barisan fundamental apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada suatu bilangan bulat N sedemikian hingga $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ bilamana $m,n \geq N$.

<u>Theorema 4.</u>

Setiap barisan konvergen di dalam ruang metrik $\{X;\rho\}$ adalah suatu barisan Cauchy.

<u>Bukti :</u>

Dianggap bahwa $\lim_n x_n = x$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan suatu bilangan bulat N sedemikian hingga $\rho(x_n,x) < \varepsilon/2$ dan $\rho(x_m,x) < \varepsilon/2$ bilamana $m,n \geq N$.
Menurut pertidaksamaan segi tiga didapatkan :

$$\rho(x_n,x_m) \leq \rho(x_n,x) + \rho(x_m,x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ bilamana } m,n \geq N.$$

Sehingga setiap barisan konvergen di dalam ruang metrik $\{X;\rho\}$ adalah suatu barisan Cauchy.

<u>Definisi 24.</u>

Apabila setiap barisan Cauchy di dalam suatu ruang metrik $\{X;\rho\}$ konvergen ke suatu elemen di dalam X maka $\{X;\rho\}$ disebut ruang metrik lengkap.

Definisi 25.

Suatu barisan $\{s_n\}$ dari bilangan riil disebut :

(i). monotonik naik apabila $s_n \leqslant s_{n+1}$,n=1,2,...

(ii). monotonik turun apabila $s_n \geqslant s_{n+1}$,n=1,2,... .

Kelas dari barisan monotonik terdiri atas barisan monotonik naik dan monotonik turun.

2.2. Lattice

2.2.1. Himpunan Terurut

Definisi 26.

Diambil S adalah suatu himpunan.Suatu urutan pada S adalah suatu relasi yang dinyatakan dengan $<$ yang memenuhi :

(i). Apabila $x \in S$ dan $y \in S$ maka satu dan hanya satu dari pernyataan $x < y$, $x=y$, $y < x$ adalah benar.

(ii). Apabila $x,y,z \in S$ dengan $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

Definisi 27.

Suatu himpunan terurut adalah suatu himpunan S yang mana suatu urutannya didefinisikan.

Definisi 28.

Dianggap S adalah suatu himpunan terurut dan $E \subset S$.Apabila ada suatu $\beta \in S$ sedemikian hingga $x \leqslant \beta$ untuk setiap $x \in E$ maka E disebut terbatas ke atas dan β disebut suatu batas atas dari E.

Apabila ada $\theta \in S$ sedemikian hingga $x \geqslant \theta$ untuk setiap $x \in E$ maka E disebut terbatas ke bawah dan θ disebut batas bawah dari E.

Definisi 29.

Dianggap S adalah suatu himpunan terurut, $E \subset S$ dan terbatas ke atas.Dianggap ada suatu $\alpha \in S$ yang memenuhi sifat :

(i). α adalah suatu batas atas dari E.

Maka α disebut batas atas terkecil dari E atau supremum dari E dan kita tulis α =sup E.

Sedangkan $E \subset S$ dan E terbatas ke bawah.Dianggap ada sutu $\psi \in S$ yang memenuhi sifat-sifat :

(i). ψ adalah suatu batas bawah dari E.

(ii). Apabila $\gamma > \psi$ maka γ tidak suatu batas bawah dari E.

Maka ψ disebut batas bawah terbesar dari E atau infimum dari E, ditulis ψ = inf E.

2.2.2. Lattice

Definisi 30.

Suatu himpunan bagian terurut adalah suatu sistim yang terdiri dari himpunan tidak kosong S dan suatu relasi biasanya dinyatakan dengan $\leqslant$ sedemikian hingga memenuhi sifat-sifat :

(i). $a \leqslant b$ dan $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$, disebut anti simetrik,

(ii). $a \leqslant a$, disebut refleksif,

(iii). $a \leqslant b$ dan $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$ untuk semua $a,b,c \in S$ disebut transitif.

Definisi 31.

Suatu rantai C di dalam suatu himpunan bagian terurut adalah himpunan bagian dari S sedemikian hingga untuk setiap $a,b \in C$ berlaku salah satu $a \leqslant b$ atau $b \leqslant a$.

Suatu elemen $u \in S$ adalah suatu batas atas dari C apabila $a \leqslant u$ untuk setiap $a \in C$.

Suatu elemen $v \in S$ adalah suatu batas bawah dari C apabila $v \leqslant b$ untuk setiap $b \in C$.

Suatu elemen $m \in S$ adalah suatu elemen maksimal dari suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$ apabila $m \leqslant a$, $a \in S$ berlaku m=a.

Suatu elemen $n \in S$ adalah suatu elemen minimal dari suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$ apabila $b \leqslant n$, $b \in S$ berlaku n=b.

Theorema 5.

Apabila setiap rantai C di dalam suatu himpunan bagian

$(S, \leqslant)$ mempunyai suatu elemen maksimal.

Apabila setiap rantai C di dalam suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$ mempunyai suatu batas bawah di dalam S maka $(S, \leqslant)$ mempunyai suatu elemen minimal.

Theorema ini disebut theorema Zorn's.

Bukti :

Diketahui setiap rantai C di dalam suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$ mempunyai suatu batas atas di dalam S maka suatu elemen $u \in S$ adalah suatu batas atas dari C berlaku $a \leqslant u$ untuk setiap $a \in C$.

Apabila $u \leqslant b$ dengan $b \in S$, karena $u \in S$ adalah suatu batas atas dari C maka $u = b$.Sehingga $u \in S$ adalah suatu elemen maksimal dari suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$.

Diketahui setiap rantai C di dalam suatu himpunan bagian terut $(S, \leqslant)$ mempunyai suatu batas bawah di dalam S maka suatu elemen $v \in S$ adalah suatu batas bawah dari C berlaku $v \leqslant c$ untuk setiap $c \in C$.

Apabila $d \leqslant v$ dengan $d \in S$, karena $v \in S$ adalah suatu batas bawah dari C maka $v = d$.Sehingga $v \in S$ adalah suatu elemen minimal dari suatu himpunan bagian terurut $(S, \leqslant)$.

Definisi 32.

Suatu Lattice adalah suatu himpunan bagian terurut yang mana setiap dua elemennya mempunyai suatu batas bawah terbesar atau "meet" dan batas atas terkecil atau "join".

Apabila L adalah lattice dengan $x, y \in L$ maka meet= $x \wedge y \in L$ dan join= $x \vee y \in L$.

Definisi 33.

Suatu lattice bagian dari suatu lattice L adalah himpunan bagian lattice yang mana setiap dua elemennya mempunyai join dan meet.

Notasi untuk $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ dan $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Definisi 34.

Suatu lattice lengkap adalah suatu himpunan bagian terrurut yang mana setiap himpunan bagiannya mempunyai suatu batas atas terkecil dan suatu batas bawah terbesar.

Definisi 35.

Suatu lattice L yang mana setiap himpunan bagian terbilang mempunyai suatu batas bawah terbesar dan batas atas terkecil disebut suatu σ- Lattice.

Definisi 36.

Suatu bagian- σ- lattice dari suatu σ-lattice adalah suatu himpunan bagian dari σ-lattice yang mana setiap himpunan bagian terbilangnya mempunyai suatu batas bawah terbesar dan batas atas terkecil.

Definisi 37.

Apabila setiap barisan $\{u_n\}$ adalah suatu barisan monotonik elemen-elemen dari σ- lattice L,barisan tersebut konvergen ke $u \in \sigma$- lattice L.Maka σ-lattice L disebut σ-lattice lengkap.

2.2.3. Regresi Isotonik

Definisi 38.

Fungsi regresi dari suatu random variabel $\tilde{y}$ ke random variabel $\tilde{x}$ adalah nilai harapan bersyarat $\mu(x) = E(\tilde{y}/\tilde{x}=x)$. Dimana x adalah anggota himpunan X.Apabila $\tilde{x}$ suatu random variabel, w(x) adalah probabilitas random variabel $\tilde{x}$ yang sama ke x.

Definisi 39.

Dianggap X adlah himpunan berhingga atau $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$ dengan terurut sederhana $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.Suatu fungsi berharga riil f pada X adalah isotonik apabila $x,y \in X$ dan $x < y$ maka $f(x) < f(y)$.Dianggap g adalah suatu fungsi yang diberikan pada X dan w adalah fungsi positif pada X.Suatu fungsi isotonik g* pada X adalah suatu regresi isotonik dari g dengan fungsi bobot w terhadap terurut sederhana $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ apabila g^* meminimalkan di dalam kelas dari fungsi-fungsi isotonik f pada X jumlahan $\sum_{x \in X} \left[g(x) - f(x)\right]^2 w(x)$.

Definisi 40.

Suatu fungsi berharga riil f pada X adalah isotonik terhadap suatu terurut sebagian " $\leqslant$ " pada X apabila $x,y \in X$, $x \leqslant y$ maka $f(x) \leqslant f(y)$.

Definisi 41.

Dianggap g adalah suatu fungsi yang diberikan pada X dan w suatu fungsi positif pada X. Suatu fungsi isotonik g^* pada X adalah suatu regresi isotonik dari g dengan fungsi bobot w bila dan hanya bila g^* meminimalkan di dalam kelas dari fungsi -fungsi isotonik f pada X suatu jumlahan $\sum_{x \in X} \left[g(x)-f(x)\right]^2 w(x)$.

Definisi 42.

Apabila a dan b adalah dua bilangan riil maka $a \wedge b$ dan $a \vee b$ masing-masing merupakan bilangan terkecil dan terbesar maksudnya $a \wedge b = \min(a,b)$ dan $a \vee b = \text{mak}(a,b)$.

Apabila f dan g adalah dua fungsi pada X maka fungsi-fungsi $f \wedge g$ dan $f \vee g$ didefinisikan dengan :

$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$, $x \in X$ dan $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $x \in X$.

Definisi 43.

Suatu himpunan bagian L dari X adalah suatu himpunan bawah terhadap terurut sebagian " $\leqslant$ " apabila $y \in L, x \in X$, dengan $x \leqslant y$ maka $x \in L$.

Suatu himpunan bagian U dari X adalah suatu himpunan atas apabila $y \in U, x \in X$ dan $y \leqslant x$ maka $x \in U$.

Kelas dari semua himpunan bawah dinyatakan dengan $\mathcal{L}$ dan kelas dari semua himpunan atas dinyatakan dengan $\mathcal{U}$. Setiap kelas $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{U}$ adalah tertutup di bawah sebarang gabungan dan irisan. Suatu himpunan U adalah suatu himpunan atas bila dan hanya bila U^c adalah suatu himpunan bawah.

(iii). $\emptyset(A_1 \cup A_2)+\emptyset(A_1 \cap A_2)= \emptyset(A_1)+\emptyset(A_2)$.

(iv). $\emptyset(A) \geq 0$ untuk semua A dan $A_1 \subset A_2$ maka $\emptyset(A_1) \leq \emptyset(A_2)$.

(v). $\emptyset(A-B)= \emptyset(A)-\emptyset(B)$ apabila $B \subset A$ dan $|\emptyset(B)| < +\infty$.

Theorema 6.

Apabila $\emptyset$ penambahan terbilang pada suatu ring $\mathcal{R}$, $A_n \in \mathcal{R}$, $n=1,2,3,\ldots$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A \in \mathcal{R}$ dan $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Maka pada $n \longrightarrow \infty$, $\emptyset(A_n) \longrightarrow \emptyset(A)$.

Bukti :

Diambil $B_1=A_1$ dan $B_n=A_n-A_{n-1}$ dengan $n=2,3,\ldots$ serta $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ maka $B_i \cap B_j=\emptyset$ untuk $i \neq j$, $A_n=B_1 \cup \ldots \cup B_n$ dan $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \cup \ldots \cup B_n)=(B_1) \cup (\bigcup_{n=1}^{2} B_n) \cup \ldots \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=(\bigcup_{n=1}^{2} B_n) \cup \ldots \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Karena $\emptyset$ penambahan terbilang maka menurut definisi 45. berlaku $\emptyset(A_n)= \sum_{i=1}^{n} \emptyset(B_i)$ dan $\emptyset(A)= \sum_{i=1}^{\infty} \emptyset(B_i)$.
Sehingga pada $n \longrightarrow \infty$ didapat $\emptyset(A_n)= \sum_{i=1}^{n} \emptyset(B_i) \longrightarrow \emptyset(A)= \sum_{i=1}^{\infty} \emptyset(B_i)$ sesuai definisi 21.

Definisi 46.

Apabila A adalah gabungan dari suatu bilangan berhingga pada interval maka A disebut suatu himpunan elementer. Sedangkan ξ merupakan keluarga dari semua himpunan bagian elementer dari R^p atau ruang Euclides dimensi p.

Definisi 47.

Suatu fungsi himpunan penambahan tidak negatif $\emptyset$ didefinisikan pada ξ disebut regular apabila untuk setiap $A \in \xi$ dan setiap $\varepsilon > 0$ ada himpunan $F \in \xi$, $G \in \xi$ sedemikian hingga F adalah tertutup, G terbuka $F \subset A \subset G$ dan

$$\emptyset(G)-\varepsilon \leq \emptyset(A) \leq \emptyset(F) + \varepsilon .$$

Definisi 48.

Apabila $\mathcal{R}$ adalah σ-ring maka suatu fungsi himpunan λ yang berharga riil dan terdefinisi pada $\mathcal{R}$ disebut Ukuran, apabila memenuhi sifat-sifat :

(i). $\lambda(E) \geq 0$ untuk $E \in \mathcal{R}$ dan $\lambda(\emptyset)= 0$.

$m \neq n$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$ maka $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

Definisi 49.

Untuk $E \in \mathcal{R}$ dengan $\mathcal{R}$ adalah σ-ring maka $\lambda(E) < \infty$ disebut ukuran berhingga. Apabila terdapat barisan himpunan $\{E_n\}$ di dalam $\mathcal{R}$ sedemikian hingga $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ dan $\lambda(E_n) < \infty$. Maka λ disebut ukuran σ-berhingga.

Keluarga himpunan dengan ukuran berhingga adalah suatu $\mathcal{R}$ dan keluarga himpunan dengan ukuran σ-berhingga adalah suatu σ-field.

Contoh 3.

(1). Apabila $E \in R$, dengan R adalah himpunan bilangan riil dan $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ dengan $j=1,2,\ldots$ maka $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$.

(2). Apabila $E \subset R^n$, dengan R^n adalah ruang Euclides dimensi n dan $E = \{ x_i \in E \;/ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \;, i=1,2,\ldots,n \}$ maka $\lambda(E) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Definisi 50.

Dianggap λ adalah penambahan, regular, tidak negatif dan berhingga pada ξ. Dengan selimut terbilang dari sebarang himpunan $E \subset R^p$ menurut himpunan elementer terbuka A_n maksudnya $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Didefinisikan $\lambda^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$, infimum diambil atas semua selimut terbilang dari E menurut himpunan elementer terbuka. $\lambda^*(E)$ disebut ukuran luar dari E menurut λ. Sehingga $\lambda^*(E) \geqslant 0$ untuk semua E dan $\lambda^*(E_1) \leqslant \lambda^*(E_2)$ apabila $E_1 \subset E_2$.

Definisi 51.

Untuk sebarang $A \subset R^p$, $B \subset R^p$. Didefinisikan $Q(A,B) = (A-B) \cup (B-A)$ dan $d(A,B) = \lambda^*(Q(A,B))$.

Kita tulis $A_n \longrightarrow A$ apabila $\lim_n d(A, A_n) = 0$.

Apabila ada suatu barisan $\{A_n\}$ dari himpunan elementer sedemikian hingga $A_n \longrightarrow A$. Kita sebut A adalah λ berhingga-dapat ukur dan ditulis $A \in \mathfrak{M}_F(\lambda)$. Apabila A adalah gabungan dari but λ -dapat ukur dan ditulis $A \in \mathfrak{M}(\lambda)$.

Difinisi 52.

Apabila A terbuka maka $A \in \mathfrak{M}(\lambda)$ dan setiap himpunan tertutup adalah anggota $\mathfrak{M}(\lambda)$.

Definisi 53.

Himpunan E disebut suatu himpunan Borel apabila E dapat diperoleh melalui suatu bilangan terbilang dari operasi-operasi mulai dari himpunan terbuka,dimana setiap operasi menggunakan gabungan,irisan atau komplemen.
Koleksi $\mathfrak{B}$ dari semua himpunan Borel dari himpunan bilangan riil di dalam R^p adalah suatu σ-ring, yaitu merupakan σ-ring terkecil yang memuat semua himpunan terbuka. $E \in \mathfrak{M}(\lambda)$ apabila $E \in \mathfrak{B}$.

2.3.2. Fungsi Dapat Ukur

Definisi 54.

Ruang ukur $(X,\mathfrak{M},\lambda)$ adalah suatu pasangan berurutan yang terdiri dari suatu himpunan X, suatu σ-ring $\mathfrak{M}$ dari himpunan bagian X dan suatu fungsi penambahan terbilang tidak negatif λ yang disebut suatu ukuran yang didefinisikan pada $\mathfrak{M}$. Suatu himpunan $E \subset X$ adalah dapat ukur apabila $E \in \mathfrak{M}$ karena setiap titik di dalam ruang ukur $(X,\mathfrak{M},\lambda)$ termuat di dalam suatu himpunan dapat ukur.Apabila E_n , n=1,2,... adalah himpunan-himpunan di dalam $\mathfrak{M}$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$.
Apabila $X \in \mathfrak{M}$ maka X disebut suatu ruang dapat ukur.

Definisi 55.

Apabila f adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang dapat ukur X dengan harga di dalam sistim bilangan riil diperluas.Suatu fungsi f disebut dapat ukur apabila himpunan $\{x/f(x) > a\}$ adalah dapat ukur untuk setiap a riil.
Apabila f adalah suatu fungsi berharga riil sedemikian hingga [illegible] $\in \mathfrak{M}$ untuk semua $x \in X$ maka f disebut dapat ukur $\mathfrak{M}$.

Contoh 4.

(1). Apabila $X = R^p$ dan $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\lambda)$ seperti didefinisikan pada definisi 51. ,setiap fungsi kotinu f adalah dapat ukur.Karena $\{x/f(x) > a\}$ adalah himpunan terbuka $\in \mathfrak{M}(\lambda)$.

(2). Sebarang fungsi konstan adalah dapat ukur.
Karena untuk $f(x) = c$ untuk semua $x \in X$,dimana X adalah suatu ruang dapat ukur , c adalah kostanta dan $\mathfrak{M}$ adalah σ-ring berlaku :
Apabila $a \geqslant c$ maka himpunan $\{x/f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}$.
Apabila $a < c$ maka himpunan $\{x/f(x) > a\} = X \in \mathfrak{M}$.
Sehingga fungsi kostan $f(x)=c$ merupakan fungsi dapat ukur.

(3). Apabila $E \in \mathfrak{M}$ dan f_k adalah fungsi karakteristik yang didefinisikan dengan : $f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \in E \\ 0 & \text{untuk } x \notin E \end{cases}$,
dimana $\mathfrak{M}$ adalah σ-ring dan $E \subset X$.
Maka f_k adalah fungsi dapat ukur, karena untuk :
$a \geqslant 1$ didapat $\{x \in X/f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}$.
$0 \leqslant a < 1$ didapat $\{x \in X/f(x) > a\} = E \in \mathfrak{M}$.
$a < 0$ didapat $\{x \in X/f(x) > a\} = X \in \mathfrak{M}$.

(4). Apabila $X = [0,1]$ dan $\mathfrak{M}$ adalah σ-ring sedangkan E adalah himpunan bilangan-bilangan rasional $[0,1]$ dengan $E \in \mathfrak{M}$ dan $X \in \mathfrak{M}$ .Maka suatu fungsi karakteristik f dari bilangan-bilangan rasional di dalam $[0,1]$ adalah fungsi dapat ukur,karena untuk :
$a \geqslant 1$ berlaku $\{x \in X/f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}$.
$a < 0$ berlaku $\{x \in X/f(x) > a\} = [0,1] \in \mathfrak{M}$.
$0 \leqslant a < 1$ berlaku $\{x \in X/f(x) > a\} = E \in \mathfrak{M}$.

2.3.3. Integral Lebesgue

Definisi 56.

Dianggap $E \in \mathfrak{M}$ dengan $\mathfrak{M}$ adalah σ-ring, f adalah dapat ukur dan dua integral $\int_E f^+ \, d\lambda$, $\int_E f^- \, d\lambda$ ....(5)

dengan $f^+ = \text{mak}(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$.

Apabila sekurang-kurangnya satu dari integral (5) adalah berhingga maka didefinisikan $\int_E f \; d\lambda = \int_E f^+ \; d\lambda - \int_E f^- \; d\lambda$.

$$\int_E f \; d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Apabila kedua integral di dalam (5) adalah berhingga maka (6) adalah berhingga.Sehingga kita sebut f adalah dapat diintegralkan pada E dalam arti Lebesgue terhadap λ atau disebut juga integral Lebesgue dari f terhadap ukuran λ atas himpunan E. Kita tulis $f \in L_1$ pada E.

Theorema 7.

Apabila $f \in L_1$ pada E maka $|f| \in L_1$ pada E dan

$$\left| \int_E f \; d\lambda \right| \leqslant \int_E |f| \; d\lambda .$$

Bukti :

Dianggap $E = A \cup B$ dimana $f(x) \geqslant 0$ pada A dan $f(x) < 0$ pada B.Maka $\int_E |f| \; d\lambda = \int_A |f| \; d\lambda + \int_B |f| \; d\lambda$,karena A dan B saling asing. $\int_E |f| \; d\lambda = \int_A f^+ \; d\lambda + \int_B f^- \; d\lambda < +\infty$ sebab $f \in L_1$.Sehingga $|f| \in L_1$.

Dari $f \leqslant |f|$ dan $-f \leqslant |f|$,kita dapatkan $\int_E f \; d\lambda \leqslant \int_E |f| \; d\lambda$ dan $-\int_E f \; d\lambda \leqslant \int_E |f| \; d\lambda$ .Oleh karena itu

$$-\int_E |f| \; d\lambda \leqslant \int_E f \; d\lambda \leqslant \int_E |f| \; d\lambda .$$

Terbukti $\left| \int_E f \; d\lambda \right| \leqslant \int_E |f| \; d\lambda$.

Theorema 8.

Apabila f adalah dapat ukur pada E, $|f| \leqslant g$ dan $g \in L_1$ pada E.Maka $f \in L_1$ pada E.

$|f| = f^+ + f^-$

Bukti :

Dari $|f| \leqslant g$ kita dapatkan $f^+ \leqslant g$ dan $f^- \leqslant g$.Karena f adalah dapat ukur pada E dan $g \in L_1$ pada E maka $f \in L_1$ pada E.

$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda < +\infty$.

Definisi 57.

Dianggap $E \in \mathfrak{M}$ dengan $\mathfrak{M}$ adalah σ-ring sedangkan $\{f_n\}$ adalah suatu barisan dari fungsi dapat ukur sedemikian hingga $f_n(x) \dashrightarrow f(x)$, $x \in E$ pada $n \dashrightarrow \infty$.

Apabila ada suatu fungsi $g \in L_1$ pada E sedemikian hingga konvergen dominated dengan g.

Definisi 58.

Suatu himpunan E disebut suatu himpunan λ-ukuran nol apabila $\lambda(E) = 0$.

Suatu fungsi g mempunyai sifat bahwa setiap titik dari suatu himpunan A mempunyai λ-ukuran nol,kecuali dari suatu himpunan bagian A yang mempunyai ukuran nol, kita sebut g mempunyai sifat hampir dimana-mana (λ) pada A.

Definisi 59.

Suatu barisan $\{g_v\}$ dari fungsi-fungsi pada suatu domain A disebut konvergen hampir dimana-mana ke g apabila $\lim_{v} g_v(\omega) = g(\omega)$ berlaku untuk hampir semua $\omega \in A$.

2.4. Ruang Inner Product

2.4.1. Ruang Norm Linier

Definisi 60.

Apabila $\|\cdot\|$ merupakan pemetaan dari X ke R yang mempunyai sifat-sifat untuk setiap $x,y \in X$ dan setiap $\alpha \in R$:

(i). $\|x\| \geq 0$.

(ii). $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(iii). $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(iv). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Maka fungsi $\|\cdot\|$ disebut suatu norm pada X.Di sini X adalah suatu ruang linier atas R.Dalam sistim matematik yang terdiri dari $\|\cdot\|$ dan X yaitu $\{X; \|\cdot\|\}$ disebut suatu ruang norm linier. Sedangkan $\|x\|$ disebut ruang norm dari x .

2.4.2. Ruang Inner Product

Definisi 61.

Apabila X adalah suatu ruang linier riil.Maka suatu fungsi yang didefinisikan pada X x X ke R yang dinyatakan de-

(i). $(x,x) > 0$ untuk semua $x \neq 0$ dan $(x,x)=0$ apabila $x = 0$.

(ii). $(x,y) = (y,x)$ untuk semua $x,y \in X$.

(iii). $(\alpha x+ \beta y,z) = \alpha(x,z)+ \beta(y,z)$ untuk semua $x,y,z \in X$ dan semua $\alpha,\beta \in R$.

(iv). $(x,\alpha y+\beta z)= \alpha(x,y)+ \beta (x,z)$ untuk semua $x,y,z \in X$ dan semua $\alpha,\beta \in R$.

Sistim $\{X;(.,.)\}$ disebut ruang inner product.

Untuk setiap $x \in X$,didefinisikan $\|x\| =(x,x)^{1/2}$. Kita sebut $\|x\|$ norm dari x.

Theorema 9.

Inner product $(x,y)=0$ untuk semua $x \in X$ bila dan hanya bila $y = 0$.

Bukti :

Apabila $y=0$ maka $y=0.x$ dan $(x,y)=(x,0)=(x,0.x)=0.(x,x) = 0$ untuk semua $x \in X$.

Sebaliknya diambil $(x,y)=0$ untuk semua $x \in X$.Maka benar juga $(x,y)=0$ apabila $x=y$.Dengan demikian kita dapatkan $(x,y)=(y,y)=0$,yang mana berlaku $y = 0$.

Theorema 10.

Apabila x dan y adalah anggota-anggota dari X.Maka

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| , \qquad \text{...........} (7)$$

dimana $|(x,y)|$ adalah harga mutlak dari suatu skalar berharga riil dan $\|x\|$ adalah norm dari x.

Pertidaksamaan (7) disebut pertidaksamaan Schwarz.

Bukti :

Untuk x dan y anggota X dan suatu skalar berharga riil. Kita dapatkan $(x+\alpha y,x+\alpha y)=(x,x)+ \alpha (x,y)+ \alpha(y,x)+ \alpha^2(y,y) \geq 0$, menurut definisi 61. Dianggap bahwa $y \neq 0$ dan diambil $\alpha = -(x,y) / (y,y)$. Maka $(x+ \alpha y,x+\alpha y)=(x,x)+2\alpha (x,y)+ \alpha^2(y,y)$ $=(x,x)-2(x,y).(x,y)/(y,y)+(x,y)^2.(y,y)/(y,y)^2$ $=(x,x)-(x,y)^2/(y,y) \geq 0$.Oleh karena itu $(x,x).(y,y) \geq (x,y)^2$. Dengan mengambil akar kuadrat dari kedua sisi,kita dapatkan pertidaksamaan $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Sedangkan untuk $y=0$ berlaku $(x,y)=0$ dan $\|y\|=0$. Pada masalah ini pertidaksamaan $|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ dipenuhi.

Theorema 11.

Untuk semua x dan y di dalam X dan semua skalar berharga riil α memenuhi :

(i). $\|x\| > 0$ kecuali $x=0$, untuk $x=0$ maka $\|x\|=0$.

(ii). $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,dimana $|\alpha|$ adalah harga mutlak dari skalar α .

(iii). $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Bukti :

Bukti dari bagian (i). sesuai dari definisi 61.butir(i).

Untuk mebuktikan bagian (ii).kita gunakan $\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha \cdot \alpha(x,x) = \alpha^2(x,x) = \alpha^2 \|x\|^2$.

Diambil akar kuadrat dari kedua sisi.Kita dapatkan hubungan

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| .$$

Untuk mebuktikan bagian (iii).kita tulis bahwa

$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$

$= \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2$.Dengan menggunakan pertidaksamaan Schwarz didapatkan $\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$ $=(\|x\|+\|y\|)^2$.Dengan mengambil akar kuadrat dari kedua sisi didapatkan $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,yang mana ini merupakan hasil yang diinginkan.

Definisi 62.

Suatu ruang inner product lengkap disebut suatu ruang Hilbert.

2.4.3. Ruang L_2

Definisi 63.

L_2 adalah himpunan dari semua fungsi dapat ukur g yang berharga riil didefinisikan pada ruang ukur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ sedemikian hingga $|g|^2$ dapat diintegralkan.Anggota dari L_2 akan dinyatakan sebagai kuadrat fungsi-fungsi dapat diintegralkan.

Definisi 64.

Norm dari g dinyatakan menurut inner product dengan

$$\|g\| = \left(\int_{\Omega} |g|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} .$$

Barisan $\{g_v\}$ konvergen pada g jika dan hanya jika $\{\|g_v - g\|^2\}$ mempunyai limit nol dan $\lim_{v} \int_{\Omega} |g_v - g|^2 \, d\lambda = 0$.

Definisi 65.

Dianggap X adalah suatu ruang dapat ukur.Kita sebut suatu fungsi berharga riil $f \in L_2$ pada X apabila f adalah dapat ukur dan $\int_X |f|^2 \, d\lambda < +\infty$.

Theorema 12.

Apabila $f \in L_2$ dan $g \in L_2$.Maka $f.g \in L_1$ dan

$$\int_X |f.g| \, d\lambda \leqslant \|f\| . \|g\| .$$

Bukti :

Apabila $f \in L_2$ dan $g \in L_2$ maka $\int_X |f.g| \, d\lambda < +\infty$.Sehingga $f.g \in L_1$.

Dengan pertidaksamaan Schwarz ditunjukkan :

$$\left(\int_X |f.g| \, d\lambda \right)^2 = \int_X |f.g|^2 \, d\lambda \leqslant \int_X |f|^2 \, d\lambda . \int_X |g|^2 \, d\lambda$$

$= \|f\|^2 . \|g\|^2$ .Jadi $\left(\int_X |f.g| \, d\lambda \right)^2 \leqslant \|f\|^2 . \|g\|^2$.

Dengan mengambil akar kuadrat dari kedua sisi diperoleh

$$\int_X |f.g| \, d\lambda \leqslant \|f\| . \|g\| .$$

Theorema 13.

Apabila $f \in L_2$ dan $g \in L_2$ maka $f+g \in L_2$ dan

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\| .$$

Bukti :

Apabila $f \in L_2$ dan $g \in L_2$ maka f+g adalah fungsi dapat ukur dan $\int_X |f+g|^2 \, d\lambda < +\infty$ .Sehingga $f+g \in L_2$.

Dengan menggunakan pertidaksamaan Schwarz,kita tunjukkan $\|f+g\|^2 = \int |f|^2 \, d\lambda + \int |f.g| \, d\lambda . \int |f.g| \, d\lambda + \int |g|^2 \, d\lambda$ $\leqslant \|f\|^2 + 2 \|f\| . \|g\| + \|g\|^2$,atau $\|f+g\|^2 \leqslant (\|f\| + \|g\|)^2$.

Dengan mengambil akar kuadrat dari kedua sisi didapatlah

$$\| f+g \| \leqslant \|f\| + \|g\| .$$

2.5. Himpunan Konvek

Definisi 66.

X adalah suatu ruang norm linier riil. Diambil x dan y dua elemen dari X. Himpuna $\overline{xy}$ didefinisikan dengan $\overline{xy} = \{ z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha) y$ untuk semua $\alpha \in R$ sedemikian hingga $0 \leq \alpha \leq 1 \}$ sebagai segmen garis yang menghubungkan x dan y .

Definisi 67.

Dianggap Y adalah suatu himpunan bagian dari X. Maka Y disebut himpunan konvek apabila Y memuat segmen garis $\overline{xy}$, dimana x dan y adalah dua titik sebarang di dalam Y.

Contoh 5.

Gambar A.

Definisi 68.

Suatu pernyataan yang ekivalen untuk Y adalah konvek apabila $x, y \in Y$ maka $\alpha x + \beta y \in Y$, dimana α dan β adalah konstanta positif sedemikian hingga $\alpha + \beta = 1$.
Apabila $x \in (\alpha+\beta)\, Y$ maka $x = (\alpha+\beta) y = \alpha y + \beta y$,dengan $y \in Y$.

Theorema 14.

Apabila Y adalah suatu himpunan konvek di dalam X dan $\alpha, \beta \in R$ adalah skalar positif. Maka $(\alpha+\beta)Y = \alpha Y + \beta Y$.

Bukti :

Apabila $x \in (\alpha+\beta)Y$ maka $x = (\alpha+\beta)y = \alpha y + \beta y \in \alpha Y + \beta Y$ dengan $y \in Y$. Oleh karena itu $(\alpha+\beta)Y \subset \alpha Y + \beta Y$.

Sekarang diambil Y adlah konvek dan $x = \alpha y + \beta z$, dimana $y, z \in Y$. Maka $(1/(\alpha+\beta))x = (\alpha/(\alpha+\beta))y + (\beta/(\alpha+\beta))z \in Y$, sebab $\alpha/(\alpha+\beta) + \beta/(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)/(\alpha+\beta) = 1$.
Karena itu $x \in (\alpha+\beta)Y$ dan dengan demikian $\alpha Y + \beta Y \subset (\alpha+\beta)Y$.

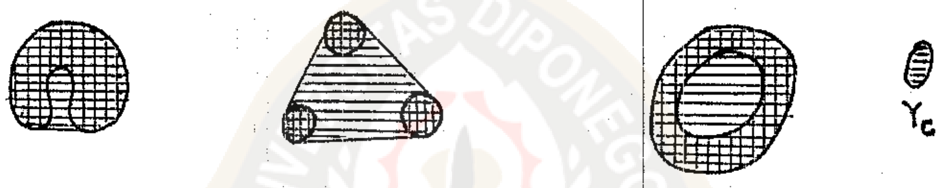
$(\alpha+\beta)Y = \alpha Y + \beta Y$.

Definisi 69.

Apabila Y adalah suatu himpunan di dalam X. Konvek hull dari Y disebut juga selimut konvek dari Y, dinyatakan dengan Y_c adalah perpotongan dari semua himpunan konvek yang memuat Y. Konvek hull dari Y adalah himpunan konvek paling kecil yang memuat Y.

Contoh 6.

Konvek hull dari himpunan di dalam R^2 (bidang).



Gambar B.

Theorema 15.

Sebarang bola di dalam X adalah suatu himpunan konvek.

Bukti :

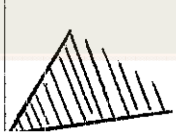
Kita ambil bola satuan $Y=\{x \in X: \|x\| < 1\}$. Apabila $x_o, y_o \in Y$ maka $\|x_o\| < 1$ dan $\|y_o\| < 1$. Sekarang apabila $\alpha \geq 0$ dan $\beta \geq 0$ dimana $\alpha+\beta=1$. Maka $\|\alpha x_o+\beta y_o\| \leq \|\alpha x_o\|+\|\beta y_o\| = \alpha\|x_o\| + \beta\|y_o\| < \alpha+\beta=1$. Dengan demikian $\alpha x_o+\beta y_o \in Y$ dan Y konvek. Sehingga sebarang bola di dalam X adalah suatu himpunan konvek.

Definisi 70.

Suatu himpunan Y di dalam X disebut suatu kone dengan puncak pada titik asal, apabila $y \in Y$ maka $\alpha y \in Y$ untuk semua $\alpha \geq 0$. Suatu himpunan disebut konvek kone apabila himpunan itu sekaligus konvek dan kone.

Contoh 7.

Himpunan Kone



Himpunan Konvek Kone

2.6. Nilai Harapan Bersyarat

Definisi 71.

Nilai harapan dari suatu random variabel $\tilde{x}$ pada $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adalah integral dari $\tilde{x}$ terhadap ukuran P :

$E[\tilde{x}] = \int \tilde{x} \; dP = \int_{\Omega} \tilde{x}(\omega) \; P(d\omega)$, dimana $\omega \in \Omega$.

Definisi 72.

Dianggap bahwa $\tilde{x}$ adalah suatu random variabel yang dapat diintegralkan pada $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dan $\mathcal{D}$ adalah suatu σ-field di dalam $\mathcal{A}$. Ada suatu random variabel $E[\tilde{x}/\mathcal{D}]$ yang disebut nilai harapan bersyarat dari $\tilde{x}$ diberikan $\mathcal{D}$,yang mana mempunyai dua sifat :

(i). $E[\tilde{x}/\mathcal{D}]$ adalah dapat ukur $\mathcal{D}$ dan dapat diintegralkan.

(ii). $E[\tilde{x}/\mathcal{D}]$ memenuhi persamaan fungsional :

$$\int_D E[\tilde{x}/\mathcal{D}] \; dP = \int_D \tilde{x} \; dP, \text{dimana } D \in \mathcal{D} .$$

Theorema 16.

Apabila $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ adalah random variabel dapat diintegralkan dan a_1, a_2 adalah konstanta. Maka

(i). $E[a_1\tilde{x}_1 \pm a_2\tilde{x}_2/\mathcal{D}] = a_1E[\tilde{x}_1/\mathcal{D}] + a_2E[\tilde{x}_2/\mathcal{D}]$, dimana $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$.

(ii). Apabila $\tilde{x}_1 \leqslant \tilde{x}_2$ maka $E[\tilde{x}_1/\mathcal{D}] \leqslant E[\tilde{x}_2/\mathcal{D}]$, dimana $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$.

Bukti :

Untuk membuktikan (i). menurut persamaan fungsional $\int_D E[\tilde{x}/\mathcal{D}] \; dP = \int_D \tilde{x} \; dP$, $D \in \mathcal{D}$. Sehingga $\int_D (a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2) \; dP = a_1 \int_D \tilde{x}_1 \; dP + a_2 \int_D \tilde{x}_2 \; dP$,dimana $D \in \mathcal{D}$ dan $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Oleh karena itu $E[a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2/\mathcal{D}] = a_1E[\tilde{x}_1/\mathcal{D}] + a_2E[\tilde{x}_2/\mathcal{D}]$.

Untuk membuktikan (ii). menurut persamaan fungsional $\int_D E[\tilde{x}/\mathcal{D}] \; dP = \int_D \tilde{x} \; dP$, dimana $D \in \mathcal{D}$. Sehingga apabila $\tilde{x}_1 \leqslant \tilde{x}_2$ maka $\int_D \tilde{x}_1 \; dP \leqslant \int_D \tilde{x}_2 \; dP$ untuk semua $D \in \mathcal{D}$. Oleh karena itu $E[\tilde{x}_1/\mathcal{D}] \leqslant E[\tilde{x}_2/\mathcal{D}]$.