BAB III

BARISAN DAN DERET

3.1. BARISAN DAN DERET BILANGAN KOMPLEKS.

3.1.1. Barisan Bilangan Kompleks

<u>Definisi 3.1.</u>

Barisan bilangan kompleks adalah fungsi yang domainnya bilangan bulat positip dan kodomainnya bilangan kompleks.

Dinotasikan : $f(n) = z_n$ untuk $n \in N$

Dilambangkan: $\langle z_n \rangle$

Jadi $\langle z_n \rangle = \langle z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n, \ldots\ldots \rangle$

<u>Catatan</u>

Dua barisan bilangan kompleks $\langle z_n \rangle$ dan $\langle w_n \rangle$ dikatakan sama jika dan hanya jika suku-sukunya bernilai sama.

Jadi $z_n = w_n$

<u>Definisi 3.2.</u>

Diberikan suatu barisan bilangan kompleks $\langle z_n \rangle$ dan dibentuk barisan asli $\langle n_k \,;\, k \in N \rangle$ sedemikian sehingga $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots\ldots\ldots$, maka barisan $\langle z_{n_k} \rangle$ dinamakan sub barisan dari barisan $\langle z_n \rangle$

<u>Contoh</u>

$\langle z_{n_k} = i, \frac{-i}{3}, \frac{i}{5}, \ldots\ldots \rangle$ adalah sub barisan dari barisan $\langle \frac{i^n}{n} \rangle$

3.1.2. Deret Bilangan Kompleks

<u>Definisi 3.3.</u>

Jika $\langle z_n \rangle$ barisan bilangan kompleks

S_n diberikan oleh $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n$

Atau $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + z_n$$

$$\vdots$$

$$S_k = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots\ldots\ldots$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Maka Barisan $\langle S_k \rangle$ adalah Deret tak hingga.

<u>Theorema 3.1</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n) = Re(S) \text{ dan}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n) = Im(S).$$

Sehingga bisa ditulis

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n)$$

$$S = Re(S) + iIm(S).$$

Dan jika setiap suku dari deret disajikan dalam bentuk $z_n = x_n + iy_n$ maka dapat ditulis suatu deret tak hingga

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad \text{sebagai}$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

Jika $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ dengan demikian dapat ditulis

$S_n = Re(S_n) + iIm(S_n)$ dengan $Re(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ dan

$$Im(S_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Contoh 3.3.

Diketahui $z_n = \frac{2i}{n^3} + \frac{1}{n^2}$ membentuk deret tak hingga

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{k^3} + \frac{1}{k^2}$$

Untuk $z_k = x_k + i\, y_k$, maka $x_k = \frac{1}{k^2}$ dan $y_k = \frac{2}{k^3}$

Sehingga

$$Re(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{dan} \quad Im(S_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Dengan demikian dapat ditulis

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2i + k}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Definisi 3.4.

Deret dengan bentuk $a + ar + ar^2 + \ldots. + ar^{n-1} + \ldots$

atau ditulis $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

dinamakan deret geometri.

Dimana r adalah pembanding sebarang suku dengan suku sebelumnya.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots.. + ar^{n-1}$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$ disebut jumlah parsial ke n

a = suku pertama dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

Contoh 3.4.

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} i(\frac{1}{2})^n = i + \frac{i}{2} + \frac{i}{4} + \frac{i}{8} + \ldots..$

dimana $r = \frac{1}{2}$ dan suku pertama adalah $a = i$

dan $S_n = \frac{i(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}}$

misal kita hitung jumlah suku ke 5 (n=5)

maka $S_5 = i + i/2 + i/4 + i/8 + i/32$

$S_5 = 31i/16$

3.2. BARISAN DAN DERET FUNGSI KOMPLEKS

3.2.1. Barisan Fungsi Kompleks

Definisi 3.5.

Jika untuk setiap bilangan bulat positip $n = 1, 2, 3, \ldots$ dan fungsi-fungsi kompleks $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ terdefinisi dalam domain D yang sama, maka fungsi-fungsi tersebut dinamakan barisan fungsi kompleks.

Dinotasikan

$$\langle f_k(z) \rangle = f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

dimana $f_n(z)$ dinamakan suku ke n dari barisan $\langle f_k(z) \rangle$.

Contoh 3.5.

$f_n(z) = \dfrac{(z-1)^n}{3^n}$ yang terdefinisi dalam $\mathbb{C}$

membentuk barisan fungsi kompleks

$$\left\langle f_n(z) = \frac{(z-1)^n}{3^n} \right\rangle = \frac{(z-1)}{3}, \frac{(z-1)^2}{9}, \ldots$$

3.2.2. Deret Fungsi Kompleks

Definisi 3.6.

Jika $\langle f_k(z) \rangle$ barisan fungsi kompleks yang terdefinisi dalam domain D dan $S_k(z)$ diberikan oleh $f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$ maka barisan $\langle S_k(z) \rangle$ dinamakan deret fungsi kom-

Dinotasikan : $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$

$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots\ldots + f_n(z)$ dinamakan jumlah parsial ke n dari deret itu.

Contoh 3.6.

$f_n(z) = \dfrac{(z-1)^n}{3^n}$ yang terdefinisi dalam $\mathbb{C}$

membentuk deret fungsi kompleks

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \frac{(z-1)}{3} + \frac{(z-1)^2}{9} + \frac{(z-1)^3}{27} + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$$

Jadi disini $f_1(z) = \dfrac{z-1}{3}$

$$f_2(z) = \frac{(z-1)^2}{9}$$

$$\vdots$$

$$f_n(z) = \frac{(z-1)^n}{3^n}$$

dan $S_1(z) = f_1(z) = \dfrac{z-1}{3}$

$$S_2(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

$$= \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{9}$$

$$\vdots$$

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(z-1)^k}{3^k}$$

3.3. DERET PANGKAT

Definisi 3.7.

Deret pangkat bilangan kompleks adalah deret bilangan kompleks tak hingga dengan bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n = a_o + a_1(z - z_o) + a_2(z - z_o)^2 + \ldots\ldots + a_n(z - z_o)^n + \ldots\ldots$$

dimana z adalah bilangan kompleks

a_o, a_1, a_2, ... adalah konstanta kom - pleks, disebut juga koefisien deret itu.

z_o adalah pusat dari deret tersebut.

Contoh 3.7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} = \frac{i}{1} + \frac{i^2}{4} + \frac{i^3}{9} + \ldots\ldots$$

dimana $z = i$; $z_o = 0$; $a_n = \frac{1}{n^2}$

Definisi 3.8.

Analoog deret pangkat fungsi kompleks adalah deret dengan bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (f(z) - f(z_o))^n$$

Contoh 3.8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 - i)^n}{n^2} = \frac{(z^2 - i)}{1} + \frac{(z^2 - i)^2}{4} + \ldots\ldots$$

dimana $f(z) = z^2$; $f(z_o) = i$; $a_n = \frac{1}{n^2}$

3.4. LIMIT DAN KONTINUITAS

Dari definisi 3.1. yang menyatakan bahwa suatu barisan adalah suatu fungsi, maka sifat-sifat dari limit dan kontinuitas barisan sesuai yang dimiliki oleh fungsi. Sebagaimana telah disajikan dalam Bab II.

Definisi 3.9.

L disebut limit dari barisan bilangan kompleks $\langle z_n \rangle$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan bilangan N, sehingga untuk setiap $n > N$ berlaku $0 < |z_n - L| < \varepsilon$.

Dapat ditulis :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = L \iff (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N)\ (\forall n > N \implies 0 \leqslant |z_n - L| < \varepsilon).$$

Contoh 3.9.

Diketahui $\left\langle z_n = \dfrac{2i + n}{n^3} \right\rangle$

$L = 0$ adalah limit dari barisan $\langle z_n \rangle$.

Jadi $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2i + n}{n^3} = 0$

Theorema 3.3.

Barisan $\langle z_n \rangle$ dengan $z_n = x_n + i\, y_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$, maka

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} z_n = a + ib$ jika dan hanya jika

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = a$ dan $\displaystyle\lim_{n \to \infty} y_n = b$

Contoh 3.10.

Dari contoh 3.9. dapat disajikan sebagai

$z_n = x_n + i\, y_n$ dimana $x_n = \dfrac{n}{n^3}$ dan

$y_n = \dfrac{2}{n^3}$

Sehingga $\displaystyle\lim_{n \to \infty} z_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^3} = 0$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n^3} = 0$

Theorema 3.4.

Jika diketahui dua barisan $\langle z_n \rangle$ dan $\langle w_n \rangle$ dan limit dari masing-masing adalah L_1

dan L_2 , keduanya ada dan berhingga maka untuk $n \to \infty$ berlaku :

(i) $\lim (z_n \pm w_n) = L_1 \pm L_2$

(ii) $\lim (k. z_n) = k. L_1$; k = konstanta

(iii) $\lim (z_n . w_n) = L_1 . L_2$

(iv) $\lim (\frac{z_n}{w_n}) = \frac{L_1}{L_2}$; $w_n \neq 0$

Definisi 3.10.

Barisan $\langle z_n = f(n) \rangle$ kontinu di n_1

jika (i) $f(n_1)$ ada

(ii) $\lim_{n \to n_1} f(n)$ ada

(iii) $\lim_{n \to n_1} f(n) = f(n_1)$

dimana n_1 berlaku menuju ∞ .

Contoh 3.12.

$\langle z_n = f(n) = \frac{2n - i}{n + 2i} \rangle$ kontinu di ∞ .

karena (i) $f(n_1) = f(\infty) = 2$, ada.

(ii) $\lim_{n \to \infty} f(n) = 2$, ada.

(iii) $f(\infty) = \lim_{n \to \infty} f(n)$

Definisi 3.11.

Jika $S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ dan $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$

maka $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

Contoh 3.13.

Barisan $\langle \frac{3i}{2^n} \rangle$ membentuk deret tak hingga

dengan $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3i}{2^k}$ dan $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3i}{2^k}$

$$= \lim_{n\to\infty} 3i\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}_{A}$$

$$= 3i \lim_{n\to\infty} A$$

Oleh karena A membentuk deret geometri dengan

$r = \frac{1}{2}$ dan $a = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3i \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 3i.1$$

$$= 3i = S.$$

Theorema 3.5.

Jika $S_n = Re(S_n) + i\, Im(S_n)$ maka

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(Re(S_n) + i\, Im(S_n) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} Re(S_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(S_n)$$

Contoh 3.14.

Dari contoh 3.13. dapat disajikan sebagai

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3i}{2^k}$ dengan $Re(S_n) = 0$

$Im(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^k}$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} Re(S_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(S_n)$

$$= 0 + i \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 0 + i.3$$

$$= 3i$$

Dapat ditulis $\lim_{n\to\infty} Re(S_n) = 0$ dan

$\lim_{n\to\infty} Im(S_n) = 3$

Definisi 3.12

Jika $\langle f_n(z) \rangle$ barisan fungsi yang

masing-masing suku-sukunya , $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..
....., $f_n(z)$, ... terdefinisi dalam domain D, maka f(z) disebut limit dari barisan fungsi jika dan hanya jika untuk $n \to \infty$
$\lim f_n(z) = f(z)$.

Contoh 3.15.

$\langle f_n(z) = z^n \rangle$ dengan $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... terdefinisi dalam D : $|z| < 1$, maka untuk $n \to \infty$
$\lim f_n(z) = \lim z^n = 0 = f(z)$.

Definisi 3.13.

Jika masing-masing suku dari barisan $\langle f_n(z) \rangle$ adalah kontinu pada D, maka barisan $\langle f_n(z) \rangle$ dikatakan kontinu pada D.

Contoh 3.16.

$\langle f_n(z) = \dfrac{n}{n+1} z^2 \rangle$ dan $f_n(z)$ kontinu pada D : $|z| < 1$.

$f_1(z) = \dfrac{1}{2} z^2$ kontinu pada D

$f_2(z) = \dfrac{2}{3} z^2$ kontinu pada D

begitu juga untuk $f_3(z)$, $f_4(z)$, ...
masing-masing kontinu pada D.
Sehingga menurut definisi 3.12. barisan $\langle f_n(z) \rangle$ kontinu pada D.

Definisi 3.14.

Jika diketahui deret fungsi kompleks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = S(z)$ dan diberikan

$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z)$

Maka $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ dinamakan limit jumlah dari deret tersebut.

Contoh 3.17.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k = z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots\ldots$$

dimana $z, z^2, z^3, \ldots\ldots$ terdefinisi pada D

$D : |z| < 1$.

Dan $S_n(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots + z^n$

$$\text{Maka } \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1(1 - z^n)}{1 - z}$$

$$= \frac{1}{1 - z} = S(z) .$$

Definisi 3.15.

Jika masing-masing suku dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ adalah kontinu pada D, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ dikatakan kontinu pada D.

Contoh 3.18.

Dari contoh 3.16. dapat dikatakan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} z^2$ kontinu pada D.

3.5. BARISAN TERBATAS

Definisi 3.16.

Barisan bilangan $\langle z_n \rangle$ adalah terbatas jika dan hanya jika terdapat $M > 0$ sehingga $|z_n| \leqslant M$, untuk setiap $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ dan $n \in N$.

Contoh 3.19.

Barisan $\langle z_n = \frac{ni}{n+1} \rangle$ adalah terbatas.

Sebab jika diambil $M = 1$, maka pasti akan diperoleh

$$|z_n| = \frac{n}{n+1} \leqslant 1 \quad ; \text{ untuk } \forall\, n \in N.$$

Definisi 3.17.

Barisan fungsi kompleks $\langle f_n(z) \rangle$ untuk $n \in N$ yang terdefinisi dalam domain D dikatakan terbatas uniform jika dapat ditemukan suatu bilangan $M > 0$ sedemikian sehingga $|f_n(z)| \leq M$ berlaku untuk $\forall\, z \in D$ dan $n \in N$.

Contoh 3.20.

$\langle f_n(z) = \frac{z^n}{n} \rangle$ yang terdefinisi pada D: $|z| \leq 1$, untuk $\forall\, z \in D$ dan $n \in N$ maka $\langle f_n(z) = \frac{z^n}{n} \rangle$, sehingga terdapat

$|f_1(z)|, |f_2(z)|, |f_3(z)|, \ldots\ldots\ldots$

Jika diambil $M = \max\,(|f_1(z)|, |f_2(z)|, \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$$M = \max\,(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots)$$

Sehingga dapat ditemukan $M = 1$ dan untuk setiap $z \in D$ dan $n \in N$ berlaku $|f_n(z)| \leq M$. Dengan demikian maka barisan fungsi kompleks $\langle f_n(z) = \frac{z^n}{n} \rangle$ merupakan barisan fungsi terbatas uniform pada D.

3.6. BARISAN CAUCHY

Definisi 3.18.

Barisan $\langle z_n \rangle$ dinamakan barisan cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat bilangan N sedemikian sehingga untuk semua $m > N$ dan semua $n > N$ berlaku $|z_m - z_n| < \varepsilon$.

Contoh 3.21.

$\langle z_n = \frac{i}{n} \rangle$ adalah barisan cauchy.
Jika diambil $\varepsilon = 1/5$, maka terdapat bilangan N sehingga $N = 1/\varepsilon$; untuk $m,n > N$. Antara lain untuk $N = 5$ sehingga untuk $n = 6,7,8,\ldots$ dan $m = 6,7,8,\ldots$; jika diambil $m \leq n$ berlaku $|z_m - z_n| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Jadi dengan demikian barisan $\langle z_n = \frac{i}{n} \rangle$ barisan cauchy.

Catatan.
Barisan cauchy adalah barisan terbatas.

Dapat diperlihatkan bahwa dari contoh 3.21.
$\langle z_n = \frac{i}{n} \rangle$ juga merupakan barisan terbatas.
Dengan mengambil $\varepsilon = 1$ maka dapat ditemukan bilangan N sehingga untuk semua $n,m > N$ berlaku $|z_n - z_m| < 1$. Jadi juga berlaku,
$|z_{n+1} - z_{m+1}| < 1$, $|z_{n+2} - z_{m+2}| < 1$, ..., $|z_{n+p} - z_{m+p}| < 1$, ...
Dengan ketidaksamaan segitiga diperoleh,
$|z_n| < |1 + z_m|$, $|z_{n+1}| < |1 + z_{m+1}|$, $|z_{n+2}| < |1 + z_{m+2}|$ ...., $|z_{n+p}| < |1 + z_{m+p}|$, ...
Dipilih $M = \max\,(|1 + z_m|, |1 + z_{m+1}|, |1 + z_{m+2}|, \ldots\ldots, |1 + z_{m+p}|, \ldots\ldots)$, maka didapat $|z_n| \leq M$ untuk semua $n > N$, dengan demikian maka barisan $\langle z_n = \frac{i}{n} \rangle$ adalah terbatas.

Theorema 3.6.

Setiap barisan cauchy dari bilangan kompleks mempunyai limit.

Bukti

Misal $\langle z_n \rangle$ adalah barisan cauchy dari bilang-an kompleks dengan $z_n = x_n + i\, y_n$; n = 1,2,. ....

maka $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$ adalah barisan cauchy dalam $\mathbb{R}$.

Mengingat barisan cauchy dalam $\mathbb{R}$ adalah kon - vergen, maka $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$ pasti mempunyai limit. Misal $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_o$

maka menurut theorema 3.3. barisan $\langle z_n \rangle$ mempunyai limit yaitu $z_o = x_o + i\, y_o$.

Contoh 3.22.

Barisan $\left\langle z_n = \dfrac{1+i}{n} \right\rangle$ adalah barisan cauchy dalam $\mathbb{C}$, dan mempunyai limit $z_o = 0$.

Sebab $\left\langle x_n = \dfrac{1}{n} \right\rangle$ dan $\left\langle y_n = \dfrac{1}{n} \right\rangle$ adalah barisan cauchy dalam $\mathbb{R}$ dan mempunyai limit yaitu,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 + i\,0 = 0$ (sesuai theo-rema 3.3.).

Dalam pembicaraan selanjutnya, khususnya pada Bab IV, yang dimaksud " N " adalah suatu bilangan.