BAB II

FUNGSI KOMPLEKS

2.1. DAERAH-DAERAH DI BIDANG KOMPLEKS

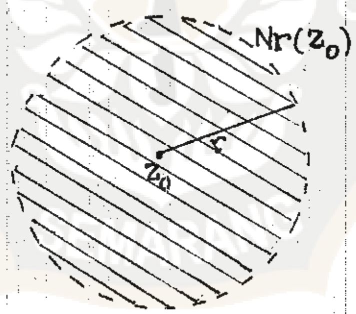
Definisi 2.1.

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah himpunan titik-titik di bidang kompleks.

Definisi 2.2.

Daerah persekitaran dari bilangan kompleks z_o dan jari-jari $r > 0$ adalah himpunan titik z dengan sifat $|z - z_o| < r$,

dinotasikan $Nr\,(z_o) = \left\{ z \,\middle|\, |z - z_o| < r \right\}$, seperti pada gambar 2.1.



Gambar 2.1.

Definisi 2.3.

Titik z_o disebut titik limit dari himpunan D jika untuk setiap $r > 0$ terdapat $z \in D$ dengan $z \neq z_o$ sedemikian hingga $0 < |z - z_o| < r$

Definisi 2.4.

Titik z_o disebut titik Interior dari himpunan D apabila terdapat suatu sekitar N dari z_o berjari-jari r, $(N_r\,(z_o)) = N\,(z_o, r)$ sedemikian hingga

$N\,(z_o, r) \subset D$.

Definisi 2.5.

Titik limit dari himpunan D yang bukan titik -

Interior dari D, jadi Nr (z_o) memuat baik titik $z \in D$ maupun $z \notin D$, maka titik disebut titik perbatasan.

Definisi 2.6.

Titik z_o disebut titik terasing dari himpunan D jika titik $z_o \in D$ tetapi bukan titik limit dari D.

Definisi 2.7.

Himpunan D terbuka apabila semua anggauta dari himpunan tersebut adalah titik Interior.

Definisi 2.8.

Himpunan D tertutup apabila memuat semua titik limitnya.

Definisi 2.9.

Himpunan D disebut terbatas jika terdapat bilangan riil q sedemikian hingga D di dalam $|z| = q$
Jadi untuk semua $z \in D$ maka $|z| < q$

Definisi 2.10.

Himpunan D disebut terhubung jika setiap dua titik dari D dapat dihubungkan dengan rantai kontinue yang terdiri dari beberapa penggal garis yang seluruhnya di dalam D.

Definisi 2.11.

Domain adalah suatu himpunan yang terbuka dan - terhubung.

2.2. FUNGSI KOMPLEKS

$\mathbb{C}$ dan $\mathbb{D}$ masing-masing himpunan bilangan kompleks

Definisi 2.12.

Fungsi f dari himpunan $\mathbb{R}$ ke dalam himpunan $\mathbb{R}$ adalah suatu pengawanan sedemikian hingga setiap elemen $x \in \mathbb{R}$ dikawankan secara tunggal dengan elemen $y \in \mathbb{R}$.

Notasi :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y$$

Atau ditulis $y = f(x)$.

Jadi pada umumnya suatu fungsi dimaksudkan berharga satu, yang artinya untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berkawankan dengan tunggal $y \in \mathbb{R}$.

Tetapi pada himpunan kompleks $\mathbb{C}$ dan D, fungsi bisa berharga banyak, dan fungsi ini dinamakan fungsi berharga banyak, karena dapat dipandang sebagai kumpulan banyak fungsi.

Dan dinotasikan :

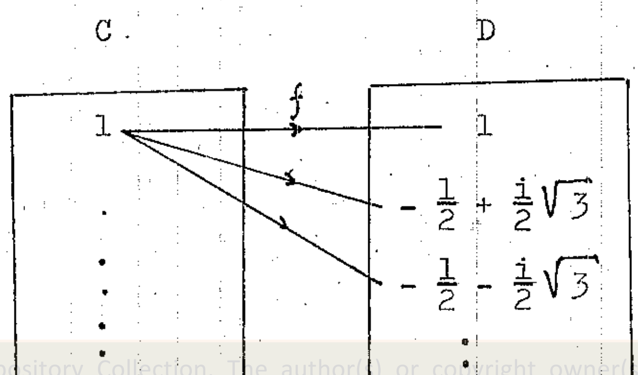
$f : \mathbb{C} \longrightarrow D$; dimana $\mathbb{C}$ disebut Domain dan
$z \longrightarrow w$ D disebut Daerah jangkau.

Atau ditulis $w = f(z)$.

Jadi w bisa berharga lebih dari satu untuk satu harga z.

Contoh .

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}}$$



Gambar 2.2.

Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dan apabila $z = x + iy$ dan diketahui

$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \quad u(x,y) \qquad (x,y) \quad v(x,y)$

Sehingga fungsi kompleks f(x) dapat ditulis sebagai :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{atau}$$

$$w = u + iv$$

Dinotasikan

$$f : C \longrightarrow D$$

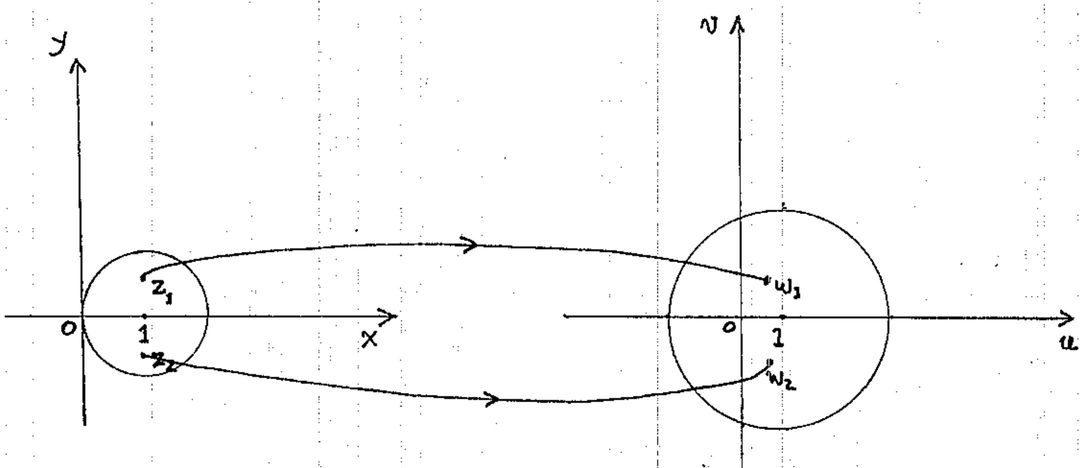
$$(x+iy) \quad u+iv$$

Apabila disajikan secara grafik, fungsi $w = f(z)$ diambil dua bidang kompleks, yang satu untuk perubah z dan lainnya untuk perubah w.

Jadi untuk setiap titik (x,y) dalam bidang z yang terletak di dalam daerah definisi $f(z)$, terdapatlah titik (u,v) dibidang W sedemikian sehingga $w = u + iv$ sebagai kawan dari titik (x,y) tersebut,

Perkawanan antara titik-titik di kedua bidang ini disebut pemetaan dari titik-titik di bidang z ke titik-titik di bidang w oleh fungsi f

Contoh 2.2. (lihat gambar 2.3.)



Gambar 2.3.

$f : C \longrightarrow D$ dengan $C : |z - 1| < 1$

$z \longrightarrow z^2$ $\qquad D : |z - 1| < 3$

$f(z) = u + iv$

$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$

Definisi 2.13.

Fungsi kompleks f(z) terbatas dalam suatu daerah D jika dan hanya jika terdapat bilangan M positip untuk semua $z \in D$ berlaku $|f(z)| \leqslant M$.

2.3. LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI KOMPLEKS

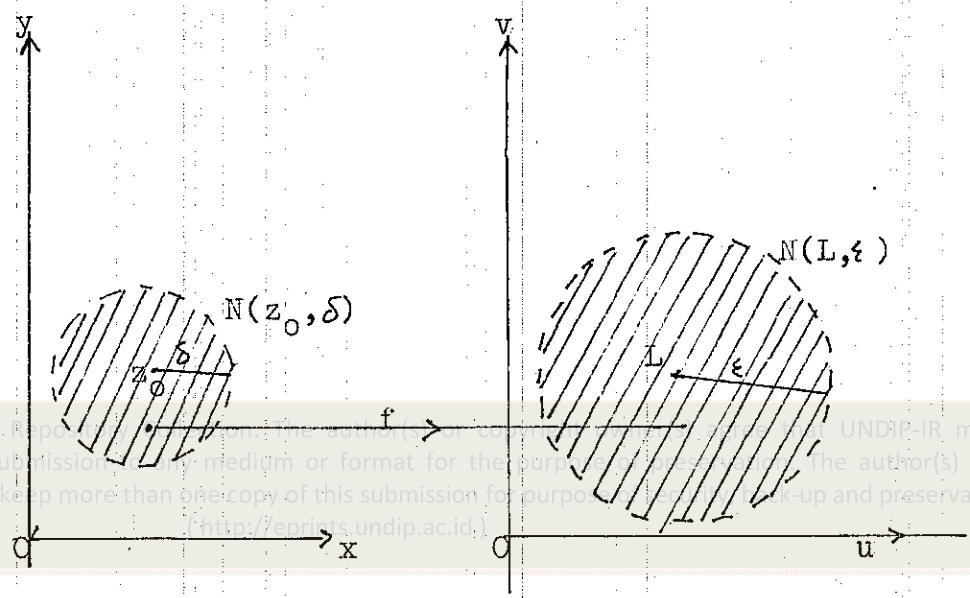
2.3.1. Limit Fungsi Kompleks

Definisi 2.14.

Bilangan L disebut limit fungsi f(z) untuk $z \to z_0$ dan dinotasikan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$

jika hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang ditentukan terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua $z \in D$ dimana $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.
Jadi untuk harga-harga z disekitar z_0 dengan jari-jari $r = \delta$, harga f(z) ada disekitar L dengan jari-jari $r = \varepsilon$ atau pada $N(L,\varepsilon)$.
Sedangkan nilai f pada z_0 tidak didefinisikan.
Notasi :

$$\lim f(z) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D, 0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon).$$



Gambar 2.4

Theorema 2.1.

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $z_o = x_o + y_o$ dalam Domain D, maka

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = a + ib \iff \lim_{(x,y) \to (x_o,y_o)} u(x,y) = a \text{ dan } \lim_{(x,y) \to (x_o,y_o)} v(x,y) = b$$

Theorema 2.2.

Jika $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = A$ dan $\lim\limits_{z \to z_o} g(z) = B$

dimana f(z) dan g(z) masing-masing merupakan fungsi kompleks maka untuk $z \to z_o$

i. $\lim (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$

ii. $\lim f(z) \,.\, g(z) = A.B$

iii. $\lim \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

2.3.2. Kontinuitas Fungsi Kompleks.

Definisi 2.15.

Fungsi f(z) dikatakan kontinu di titik $z_o \in C$ jika dan hanya jika $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (|z - z_o| < \delta)$ berlaku $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$.

Dengan kata lain,

f kontinu di $z_o \in \mathbb{C}$ apabila memenuhi syarat sebagai berikut :

i. $f(z_o)$ ada

ii. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)$ ada

iii. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Definisi 2.16.

Fungsi f(z) yang tidak kontinu disebut

diskontinu $\Longleftrightarrow$ $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\ |z - z_0| < \delta$

$\&\ \ |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon\ )$

Definisi 2.17.

Fungsi f(z) kontinu pada suatu daerah D jika f(z) kontinu di setiap $z_0 \in D$.

Jadi

f(z) kontinu pada D $\Longleftrightarrow$

$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, z \text{ dan } \forall\, z_0 \in D)\ (\ |z - z_0| < \delta$

$\Longrightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ )$

Contoh

$f(z) = z^2$ kontinu pada D: $|z| \leq 1$, oleh karena

$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, z, z_0 \in D)(\ |z - z_0| < \delta = -|z_0| + \sqrt{|z_0|^2 + \varepsilon}\ \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| < \varepsilon\ )$.

Sebagai akibat dari theorema-theorema tentang limit maka timbul sifat-sifat kontinuitas sebagai berikut :

Sifat 2.1.

Jika f(z) dan g(z) masing-masing merupakan fungsi kontinu maka :

(i) $f(z) \pm g(z)$ adalah kontinu

(ii) $f(z) \cdot g(z)$ adalah kontinu

(iii) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ adalah kontinu, dimana $g(z) \neq 0$

Sifat 2.2.

Fungsi $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ kontinu di $z_0 = x_0 + i\, y_0$ bila dan hanya bila

u(x,y) dan v(x,y) masing-masing merupakan fungsi kontinue di x_o dan y_o.

Sifat 2.3.

Jika f(z) kontinu pada D yang tertutup dan terbatas maka f(z) terbatas pada D.

Penjelasan.

Diambil sembarang $z \in D$ oleh karena f(z) kontinue pada z, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sehingga untuk $z_k \in D$ berlaku

$|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$ bila $|z - z_k| < \delta$

Dengan kata lain

bilamana $z_k \in D$ berada dalam persekitaran

$(N(z, \delta))$ maka $f(z_k)$ berada dalam $N(f(z), \varepsilon)$

Sedemikian sehingga total dari semua persekitaran $N(z, \delta)$ dari setiap $z \in D$ menutup D. Dan oleh karena D tertutup dan terbatas maka terdapat berhingga persekitaran

misal N_1, N_2, ... N_n yang bersesuai dengan

z_1, z_2, ... $z_n \in$ D, yang mana persekitaran tersebut juga menutup D.

Sekarang mengingat persekitaran - ε, $(N(f(z), \varepsilon))$ yang bersesuaian

M_1, M_2, ... M_n dengan

$f(z_1)$, $f(z_2)$, ... $f(z_n)$

akan terlihat jika diberikan sebarang $z_k \in D$, z_k termuat pada suatu N_i dan oleh karena itu $f(z_k)$ termuat sesuai M_i, i = 1, 2, ... n

sehingga persekitaran M_i memuat setiap $f(z_k)$ untuk $\forall z_k \in D$. Dan oleh karena hanya ada persekitaran M_i yang demikian, yang mana setiap persekitaran adalah terbatas, yaitu lingkaran $|f(z)| = M$

Yang memuat semua daerah dalam persekitaran M_i.
Misalnya diambil M bilangan terbesar dari bilangan n yang berhingga $(|f(z_1)|+\varepsilon, |f(z_2)|+\varepsilon, \ldots, |f(z_n)|+\varepsilon)$ maka didapat $|f(z_k)| \leq M$ untuk setiap $z_k \in D$.
Dengan demikian maka f(z) terbatas pada D.

Definisi 2.18.

Fungsi f(z) dikatakan kontinu Uniform pada D jika dan hanya jika $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall z, \forall z_1 \in D)$ $(\,|z - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \varepsilon\,)$.

Contoh 2.18.

$f(z) = z^2$ kontinu uniform pada $D : |z| \leq 1$.

Penjelasan :

Dari contoh 2.17. telah diperlihatkan bahwa $f(z) = z^2$ kontinu pada $D : |z| \leq 1$, sehingga

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall z, z_o \in D)\ (|z - z_o| < \delta = -|z_o| + \sqrt{|z_o|^2 + \varepsilon}$

$\Rightarrow |z^2 - z_o^2| < \varepsilon$

Jadi δ tergantung pada ε dan $z_o \in D$.

Sekarang diambil harga δ maximum dengan $z_o = 1$ maka $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon} > 0)$ akan ber laku $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$ bila $|z - z_o| < \delta$ untuk se - mua $z_o \in D$.

Dengan demikian δ hanya bergantung pada ε sehingga f(z) kontinu uniform pada D.

Perbedaan antara definisi kontinu dan kontinu uniform suatu fungsi, terletak pada :

(i) Fungsi kontinu dapat didefinisikan pada suatu ti - tik dalam Domain, sedangkan fungsi kontinu uniform didefinisikan pada suatu himpunan.

(ii) Jika $f(z)$ kontinu pada D, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap titik $z_0 \in D$ yang diberikan, dapat dicari $\delta > 0$, sehingga untuk semua $z_0 \in D$ dengan sifat $|z - z_0| < \delta$ akan berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Bilangan δ tergantung pada ε dan kepada z_0. Sedangkan jika $f(z)$ kontinu uniform pada D, maka untuk $\forall\, \varepsilon > 0$ yang diberikan dapat dicari satu bilangan $\delta > 0$ yang dapat bekerja untuk semua titik $z_0 \in D$.

Dengan demikian timbul sifat bahwa jika $f(z)$ kontinu uniform pada D maka $f(z)$ kontinu di setiap titik di dalam D.

Definisi 2.19.

Fungsi $f(z)$ tidak kontinu uniform pada D jika dan hanya jika $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\exists\, z_1, z_2 \in D$ dengan $|z_1 - z_2| < \delta$ dan $|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \varepsilon$).

Dengan kata lain,

$f(z)$ tidak kontinu uniform pada D, jika dan hanya jika terdapat suatu $\varepsilon > 0$ sehingga untuk semua $\delta > 0$ terdapat z_1 dan $z_2 \in D$ dengan $|z_1 - z_2| < \delta$ dan $|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \varepsilon$.

Contoh

$f(z) = z^2$ kontinu pada $\mathbb{C}$, tetapi tidak kontinu uniform pada $\mathbb{C}$.

Penjelasan :

$f(z) = z^2$ jelas kontinu pada $\mathbb{C}$, sebab kontinu di setiap $z_0 \in \mathbb{C}$. Jadi $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, z_0 \in \mathbb{C})$ $(\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ )$.

Ditunjukkan bahwa untuk setiap $\delta > 0$ terdapat z_1 dan z_2 dalam $\mathbb{C}$ dengan $|z_1 - z_2| < \delta$ dan $|z_1^2 - z_2^2| \geq \varepsilon$.

Misal diambil $\varepsilon = 1$, maka

$$
\begin{aligned}
|z_1^2 - z_2^2| &= |z_1 - z_2||z_1 + z_2| \\
&= |z_1 - z_2|\,|(z_1 - z_2) + 2z_2| \\
&\geq |z_1 - z_2|\,\big|\,2|z_2| - |z_1 - z_2|\,\big|
\end{aligned}
$$

Jika diambil $|z_1 - z_2| = \frac{1}{2}\delta$ maka

$$|z_1^2 - z_2^2| \geq \tfrac{1}{2}\delta\,\big|\,2|z_2| - \tfrac{1}{2}\delta\,\big|$$

Dengan mengambil $|z_2| \geq \dfrac{\delta^2 + 4}{4\delta}$ dan $z_1 = z_2 \pm \frac{1}{2}\delta$

maka $|z_1 - z_2| = \frac{1}{2}\delta < \delta$ dan $|f(z_1) - f(z_2)| \geq 1$.

Diperiksa untuk $\delta = 1$ maka terdapat $z_1 = \frac{7}{4}$ dan $z_2 = \frac{5}{4}$ dengan $|z_1 - z_2| = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} < 1$ dan $|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{3}{2} \geq 1$.

Bisa diperiksa untuk $\delta > 0$ yang lain. Sehingga dengan terdapatnya $\varepsilon > 0$ untuk setiap $\delta > 0$ maka terdapat z_1 dan z_2 dalam C dengan $|z_1 - z_2| < \delta$ dan $|f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon$. Dengan demikian maka $f(z) = z^2$ tidak kontinu uniform pada $\mathbb{C}$.

<u>Theorema 2.3.</u>

Jika f(z) kontinu pada setiap titik dari D yang tertutup dan terbatas maka f(z) kontinu uniform pada D.

Bukti :

Untuk membuktikan f(z) kontinu uniform pada D, harus dibuktikan bahwa jika diberikan $\varepsilon > 0$ harus di temukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang z_n dan z_m dalam D dengan $|z_n - z_m| < \delta$

berlaku $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$ ....(1)

Karena f(z) kontinu pada D, maka untuk setiap $z_m \in D$ terdapat $\delta_m > 0$ sedemikian sehingga

$| f(z_m) - f(w) | < \varepsilon/2$ untuk $\forall\, w \in D$ terpenuhi apabila $| z_m - w| < \delta_m$

Pengulangan dengan proses yang sama untuk setiap $z_m \in D$, ditemukan suatu keluarga dari persekitaran N_{z_m} dengan pusat z_m dan jari-jari δ_m .

Sehingga sekarang untuk setiap N_{z_m} kita temukan daerah terbuka M_{z_m} yang konsentris (sepusat) dengan N_{z_m} dan berjari- jari $\frac{1}{2}.\delta_m$.

Keluarga dari M_{z_m} ini menutup D dan oleh karena D tertutup dan terbatas, maka terdapat berhingga banyak M_{z_m} yang menutup D dengan jari-jari dari M_{z_m} dinotasikan $\frac{\delta_1}{2}$, $\frac{\delta_2}{2}$, ... $\frac{\delta_k}{2}$; dimana $k > 0$ sehingga terdapat jari-jari terkecil diantara $\frac{\delta_1}{2}$, $\frac{\delta_2}{2}$, ... dan kita sebut δ .

Dinyatakan bahwa δ memenuhi persyaratan (1) .

Dan akhirnya kita pandang bahwa untuk setiap z_n dan z_m dalam D benar bahwa $| z_n - z_m| < \delta$.

Sehingga karena z_n termuat dalam salah satu daerah k yang masih menutup D, kita sebut M_v, dan oleh karena v adalah pusat dari M_v maka kita temukan

$|z_n - v| < \frac{\delta_v}{2} < \delta_v$. Sehingga $|f(z_n) - f(v)| < \varepsilon/2$.

Oleh karena $| z_n - z_m | < \delta \leq \frac{\delta_v}{2}$, maka dengan ketidaksamaan segitiga, kita dapatkan

$$|z_m - v| \leq |z_n - z_m| + |z_n - v| < \delta_v /2 + \delta_v /2 = \delta_v$$

dan oleh karena

$$|f(z_m) - f(v)| < \varepsilon/ 2$$

pada akhirnya dengan ketidaksamaan segitiga lagi kita dapatkan

$$|f(z_n) - f(z_m)| \leq |f(z_n) - f(v)| + |f(z_m) - f(v)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Dengan demikian maka terbukti bahwa f(z) kontinu uniform pada D,

Contoh :

$f(z) = z^2$ kontinu pada setiap z_o D : $|z| \leq 1$, maka f(z) kontinu uniform pada D.

2.4. DERIVATIVE FUNGSI KOMPLEKS

Definisi 2.20.

Jika harga $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$ ada, maka

$\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$ disebut derivative dari f(z) di titik z_o.

dinotasikan :

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

notasi lain yang diberikan :

$$f'(z) = \frac{df}{dz} \quad \text{atau}$$

$$w = f(z) \quad \text{maka} \quad w'(z) = \frac{dw}{dz}$$

apabila $z = z_o + \Delta z$

$$z = x + iy$$

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

maka,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Persamaan Cauchy - Riemann

Dari fungsi $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ mempunyai derivative di $z_o = x_o + i\,y_o$ maka

$f'(z_o) = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y$

atau $u_x = v_y$ dan $v_x = -u_y$.

Theorema 2.4.

Fungsi $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, kontinu di z_o dan mempunyai derivative di $z_o = x_o + i\,y_o$, jika derivative- derivative u_x, u_y, v_x, dan v_y ada dan kontinu di (x_o,y_o) dan di titik itu berlaku syarat - syarat persamaan Cauchy - Riemann ,maka

$f'(z_o)$ ada dan $f'(z_o) = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y$

Rumus-rumus derivative

i. $\frac{d}{dz}(c) = 0$; c = konstanta

ii. $\frac{d}{dz}(z) = 1$

iii. $\frac{d}{dz}(cf(z)) = c\frac{d}{dz}f(z) = c\,f'(z)$; c = konstanta

iv. $\frac{d}{dz}(f(z) \pm g(z)) = f'(z) \pm g'(z)$

v. $\frac{d}{dz}(f(z).g(z)) = f(z).g'(z) + g(z).f'(z)$

vi. $\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{g(z).f'(z) - f(z).g'(z)}{(g(z))^2}$; $g(z) \neq 0$

vii. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

viii. $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = f'(z).g'(z)$ dimana

$w = f(t)$ dan $t = g(z)$, sedangkan $f'(t)$ ada di $t = g(z)$ dan $g'(z)$ ada.

2.5. FUNGSI ANALITIK

<u>Definisi 2.21</u>.

Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik di $z_o \in D$ bila terdapat suatu sekitar titik z_o sedemikian hingga $f'(z)$ ada untuk semua z di dalam sekitar tersebut.

<u>Definisi 2.22</u>.

Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik dalam domain D jika $f'(z)$ ada untuk semua $z \in D$.

<u>Definisi 2.23</u>.

Fungsi seluruh adalah fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks.

<u>Definisi 2.24</u>.

Jika suatu fungsi analitik disuatu titik di dalam sekitar dari titik $z_o \in D$ kecuali di $z_o \in D$ itu sendiri, maka z_o disebut titik singular,

<u>Definisi 2.25</u>.

Suatu fungsi disebut meromorfik dalam suatu Domain, jika singularitas fungsi dalam domain itu hanyalah suatu kutub.

<u>Sifat-sifat fungsi analitik</u>

* Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing analitik pada D

** Jika $f(z)$ analitik pada setiap $g(z)$ untuk semua $z \in D$. Maka :

(i) $f(z) \pm g(z)$ adalah analitik

(ii) $f(z) \cdot g(z)$ adalah analitik

(iii) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ analitik ; $g(z) \neq 0$

2.6. INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

<u>Definisi 2.26</u>.

Suatu kurva C disebut busur licin jika dan hanya jika kurva tersebut dibentuk oleh fungsi bernilai riil

$x = Q(t)$ dan $y = \Psi(t)$ dengan $\alpha \leq t \leq \beta$

sedemikian sehingga derivative masing-masing

$\frac{dx}{dt} = Q'(t)$ dan $\frac{dy}{dt} = \Psi'(t)$ ada dan merupakan fungsi kontinu dari t pada interval yang sama.

Ditulis dalam lambang

$C : z(t) = x(t) + i\, y(t) \qquad \alpha \leq t \leq \beta$

<u>Definisi 2.27</u>.

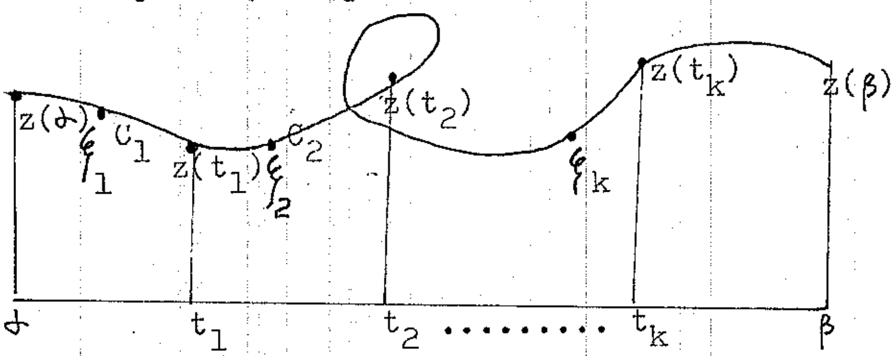
Kontour adalah rangkaian kontinu dari busur licin.

<u>Definisi 2.28</u>.

Integral dari fungsi f(z) sepanjang C adalah

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{u \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, (\Delta z)_k$$

Lebih jelasnya dapat dilihat gambar 2.26.



$u = \max (\Delta t_k) \quad ; \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

Gambar 2.26

Theorema 2.5.

Jika : (i) f(z) analitik pada daerah terhubung R

(ii) C adalah kontour tertutup dalam R

maka :

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Theorema 2.6.

Jika : (i) R adalah daerah terhubung

(ii) $z_1 \in R$

(iii) f(z) analitik pada setiap titik pada R

maka : untuk sebarang $\xi \in R$

$$\frac{d}{d\xi} \int_{z_1}^{\xi} f(z)\, dz = f(\xi)$$

Theorema 2.7.

Jika : (i) R adalah daerah terhubung

(ii) $z_1, z_2 \in R$

(iii) f(z) analitik pada R

(iv) Q(z) anti derivative dari $f(z) \in R$

maka :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = Q(z_2) - Q(z_1)$$

Theorema 2.8.

Jika $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ kontinu pada kurva licin C,

maka :

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - \int_C v\, dy + i\int_C u\, dy + i\int_C v\, dx$$

Theorema 2.9.

Jika ξ = sebarang konstan kompleks , C + K adalah suatu kontour yang terdiri dari dua busur licin C dan K, dan jika fungsi f(z) dan g(z) adalah dapat terintegral sepanjang C dan sepanjang K, maka :

i. $\int_C \xi f(z)\, dz = \xi \int_C f(z)\, dz$

ii. $\int_C (f(z)+g(z))\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz$

iii. $\int_{C+K} f(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_K f(z)\, dz$

iV. $\int_{-C_1} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$; $-C_1$ = kontour yang berlawanan arah dengan

V. Jika untuk sebarang $M > 0$ dengan fungsi f yang memenuhi $|f(z)| \leq M$ untuk setiap z pada C dan jika L adalah panjang kontour C, maka

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$$

Theorema 2.10. (Morera's Theorem)

Jika i. f(z) kontinu pada daerah terhubung sederhana R

ii. $\int_C f(z)\, dz = 0$ untuk setiap kontour tertutup sederhana C

maka f(z) analitik pada R.

Theorema 2.11.

Jika i. f(z) analitik pada orientasi positip kontour tertutup sederhana C dan pada Int(C)

ii. Titik sebarang $z_0 \in$ Int(C)

maka untuk sebarang $n \geqslant 0$, derivative $f^{(n)}(z_0)$ ada dan diberikan oleh:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$