BAB II

MATRIKS DAN DETERMINAN

2.1. PENGERTIAN MATRIKS

Defimisi 1 :

Matriks adalah tabel bilangam yang disusun menurut baris-baris dam kolom-kolom, yang berbentuk persegi panjang.

Suatu matriks, A , yang mempunyai banyak baris m dan banyak kolom n, dikatakan matriks A berukuran (m x n), dan ditulis, $A_{(m \times n)}$

Notasi :

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

a_{ij} , dengan $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2, \ldots , n$ disebut sebagai elemen/unsur/entri dari matriks A, dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j

Defimisi 2 :

Matriks A yamg berukuran (m x n) disebut :

Matriks Horizoltal jika $m < n$,

Matriks Vertikal, jika $m > n$ dam

Matriks Bujur sangkar, jika $m = n$

Akan didefinisikan beberapa jenis matriks khusus, dimama pada pembahasan selanjutnya, matriks-matriks tersebut akan digunakan.

Pandang matriks bujur sangkar, $A_{(n \times n)}$

$$A_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Barisan entri-entri, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ (atau a_{ij} dengan $i = j$), disebut sebagai entri-entri pada diagonal utama matriks bujur sangkar.

Definisi 3 :

Matriks bujur sangkar A dinamakan matriks diagonal, jika semua entrinya yang berada diluar diagonal utama sama dengan nol. (atau $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$)

Notasi :

$$D_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Definisi 4 :

Matriks Identitas adalah matriks diagonal dimana entri-entrinya, $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

Notasi :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Indeks n menyatakan ukuran dari matriks Identitas, I_n .
Jadi I_n adalah matriks identitas berukuran (n x n).

Definisi 5 :
Matriks baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris, dan matriks kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.

Definisi 6 :
Matriks baris dan matriks kolom, masing-masing juga disebut vektor.

Pandang matriks,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1n} \end{bmatrix} \tag{5}$$

X adalah matriks baris berukuran (1 x n)
dan,

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Y adalah matriks kolom berukuran (n x 1).

Matriks baris, X , dan matriks kolom , Y , masing-masing juga disebut sebagai vektor berdimensi n.

Definisi 7 :

Matriks Nol adalah setiap matriks yang entri-entrinya semua sama dengan nol. (Notasi : $0_{(m \times n)}$).

Definisi 8 :

Jika diketahui matriks $A_{(m \times n)}$, maka dapat dibentuk suatu matriks baru yang diperoleh dari matriks A, dengan cara memindahkan setiab baris ke-i dari A (i = 1,2,...,m), sebagai kolom ke-i dari matriks baru tersebut.

Matriks baru tersebut dinamakan transpose dari matriks A, dan ditulis sebagai A^T, yang berukuran (n x m).

Pandang,

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

maka transpose dari matriks A adalah

$$A^T_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

2.2. OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN MATRIKS

Definisi 9 :

Penjumlahan dari dua matriks yang berukuran sama, akan menghasilkan matriks baru yang entri-entrinya merupakan hasil penjumlahan entri-entri seletak dari kedua matriks yang dijumlahkan.

Notasi :

$$A_{(m \times n)} + B_{(m \times n)} = C_{(m \times n)} = (c_{ij})_{(m \times n)} \qquad (9)$$

dimana,

$$(c_{ij})_{(m \times n)} = (a_{ij})_{(m \times n)} + (b_{ij})_{(m \times n)} \qquad (10)$$

Pandang dua matriks, $A_{(m \times n)}$ dan $P_{(m \times n)}$ dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots\cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Maka,

$$A + P = \begin{bmatrix} a_{11}+x_{11} & a_{12}+x_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}+x_{1n} \\ a_{21}+x_{21} & a_{22}+x_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}+x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+x_{m1} & a_{m2}+x_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn}+x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Definisi 10 :

Perkalian dua matriks, $A_{(m \times n)} \cdot B_{(m \times q)}$ akan menghasilkan matriks baru, $C_{(m \times q)} = (c_{ij})_{(m \times q)}$, dimana

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots\cdots + a_{in}b_{nj} \qquad (13)$$

Perkalian dua matriks dapat didefinisikan, jika banyaknya kolom dari matriks didepan = banyaknya baris dari matriks dibelakang.

Sesuai definisinya, maka perkalian dua matriks bujur sangkar yang berukuran sama, akan menghasilkan matriks bujur - sangkar juga.

Pandang matriks $A_{(n \times n)}$ dan $P_{(n \times n)}$ dibawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Maka perkalian matriks A terhadap matriks P adalah,

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{11}x_{1n} + \cdots\cdots + a_{1n}x_{nn} \\ a_{21}x_{11} + \cdots + a_{2n}x_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{21}x_{1n} + \cdots\cdots + a_{2n}x_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{11} + \cdots + a_{nn}x_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{n1}x_{1n} + \cdots\cdots + a_{nn}x_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks perkalian AP berukuran (n x n) (15)

Misalkan masing-masing kolom dari matriks AP tersebut dianggap sebagai matriks kolom.

Untuk kolom pertama, jika diuraikan kembali akan diperoleh,

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+ \cdots +a_{1n}x_{n1} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+ \cdots +a_{2n}x_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+ \cdots +a_{nn}x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= AX_1 \qquad (16)$$

Jadi kolom ke-1 dari matriks perkalian AP adalah AX_1

Dengan cara yang sama, maka dari persamaan (15) akan diperoleh,

- kolom ke-2 dari matriks perkalian AP adalah AX_2
- kolom ke-3 dari matriks perkalian AP adalah AX_3
-
-
- kolom ke-n dari matriks perkalian AP adalah AX_n

Dengan demikian persamaan (15) dapat ditulis menjadi,

$$AP = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Theorema 1 :

Jika A matriks berukuran (m x n) dan X matriks kolom berukuran (n x 1), maka perkalian matriks A terhadap matriks X akan menghasilkan matriks kolom, AX dengan ukuran (m x 1)

Bukti :

Bukti :

Jika,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka, berdasarkan definisi 10, diperoleh

$$A_{(m \times n)} \cdot X_{(n \times 1)} = AX_{(m \times 1)} \qquad (18)$$

dengan,

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=n}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Sesuai definisi 5, dikatakan bahwa AX matriks kolom ber - ukuran (m x 1).

Theorema 2 :

Jika A matriks bujur sangkar (n x m) dan I_n matriks identitas, maka berlaku

$$AI = IA = A \qquad (20)$$

Bukti :

Dengan menggunakan persamaan (2) dan (4) maka, perkalian matriks A terhadap matriks I adalah,

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+0+\ \cdots\ +0 & 0+a_{12}+\ \cdots\ +0 & \cdots\cdot & 0+0+\ \cdots\ +a_{1n} \\ a_{21}+0+\ \cdots\ +0 & 0+a_{22}+\ \cdots\ +0 & \cdots\cdot & 0+0+\ \cdots\ +a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+0+\ \cdots\ +0 & 0+a_{n2}+\ \cdots\ +0 & \cdots\cdot & 0+0+\ \cdots\ +a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A \qquad (21)$$

Sedang, perkalian matriks I terhadap matriks A adalah,

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+0+\ \cdots\ +0 & a_{12}+0+\ \cdots\ +0 & \cdots\cdot & a_{1n}+0+\ \cdots\ +0 \\ 0+a_{21}+\ \cdots\ +0 & 0+a_{22}+\ \cdots\ +0 & \cdots\cdot & 0+a_{2n}+\ \cdots\ +0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0+0+\ldots+a_{n1} & 0+0+\ldots+a_{n2} & \cdots\cdot & 0+0+\ldots+a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Jadi, untuk suatu matriks Identitas, I_n , berlaku

$AI = IA = A$

dengan A matriks bujursangkar yang berukuran = I_n

Definisi 11 :

Jika λ suatu skalar dan A matriks berukuran (m x n), maka perkalian skalar λ terhadap matriks A akan menghasilkan matriks baru, λA, yang entri-entrinya merupakan hasil kali λ dengan entri-entri matriks A

Notasi :

$$\lambda A_{(m \times n)} = (\lambda a_{ij})_{(m \times n)} \tag{23}$$

Pandang matriks $A_{(m \times n)}$ pada persamaan (1).

Maka perkalian skalar λ terhadap matriks A adalah,

$$\lambda \cdot A_{(m \times n)} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots\cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots\cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots\cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \tag{24}$$

2.3. DETERMINAN

Definisi 12 :

Determinan adalah tabel bilangan yang diatur menurut baris dan kolom, yang berbentuk bujur sangkar dan mempunyai nilai.

Notasi :

$$\det. A = \left|A\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (25)$$

a_{ij} , i dan j = 1 , 2 , ... , n disebut entri-entri dari determinan A yang berukuran (n x n).

Yang membedakan determinan dengan matriks adalah, determinan mempunyai nilai, sedangkan matriks tidak punya nilai.

Definisi 13 :

Determinan minor dari entri a_{ij} adalah suatu determinan berukuran (n-1 x n-1), yang didapat dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari determinan A yang berukuran (n x n).

Notasi : M_{ij}.

- indeks i dan indek j , masing-masing menyatakan baris ke-i dan kolom ke-j determinan A yang dihilangkan.

Pandang determinan A pada persamaan (25). Maka determinan

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (26)$$

Definisi 14 :

Kofaktor dari entri a_{ij} adalah K_{ij} , dimana

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (27)$$

dengam M_{ij} determinan minor dari a_{ij}

Definisi 15 :

Nilai determinan adalah jumlah hasil kali entri-entri pada baris ke-i / kolom ke-j dari determinan dengan kofaktor - kofaktornya.

Menurut pengertian diatas, maka dapat ditulis,

$$\left| A \right| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \dots + a_{in}K_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.(-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (28)$$

yaitu milai determinan A yang diuraikan menurut baris ke-i.

Atau,

$$\left| A \right| = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}$$

$$\left| A \right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} K_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (29)$$

yaitu nilai determinan A yang diuraikan menurut kolom ke-j.

Definisi 16 :

Suatu determinan A mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Jika salah satu baris/kolom dari determinan A entri-entrinya bernilai nol, maka nilai determinan A = 0
2. Jika dua baris/kolom dari determinan A sama, maka nilai det. A = 0
3. Jika baris ke-i / kolom ke-j dari determinan A dikalikan dengan skalar λ , maka determinan A berubah menjadi - λ .det. A.
4. Tanda determinan berubah jika dua buah baris/kolom- nya ditukar tempatnya.

Theorema 4 :

Jika determinan A mengandung dua baris/kolom sebanding, maka nilai determinan A sama dengan nol.

Bukti :

Misalkan baris ke-p dari determinan A merupakan kelipatan skalar, λ , baris ke-q

Jadi, $a_{pj} = \lambda . a_{qj}$, $j = 1 , 2 , \ldots , n$

Menurut sifat 3 dari definisi 16, maka diperoleh

det. A = λ . determinan yang mengandung dua baris,(p dan q), sama.

Dengan demikian, sesuai sifat 2 dari definisi 16, maka terbukti nilai determinan A yang mengandung dua baris sebanding adalah sama dengan nol

Dengan cara yang sama, maka dapat dibuktikan juga untuk -

Pandang matriks bujur sangkar, $A_{(n \times n)}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Definisi 17 :

Matriks $A_{(n \times n)}$ disebut matriks singular, jika nilai determinan dari matriks A = 0 , dan

Matriks $A_{(n \times n)}$ disebut matriks non singular , jika nilai determinan dari matriks A $\neq$ 0.

Theorema 4 :

Jika $A_{(n \times n)}$ matriks non singular, maka A tidak mempunyai baris/kolom yang semua entrinya bernilai nol.

Bukti :

Pandang matriks $A_{(n \times n)}$ yang non singular.

Andaikan terdapat kolom ke-p dari matriks A yang semua entrinya bernilai nol.

Menurut sifat ke-1 dari definisi 16, maka diperoleh, nilai determinan dari matriks **A** = 0.

Kontradiksi, pengandaian salah. Jadi matriks A tidak mempunyai kolom yang semua entrinya bernilai nol.

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa matriks A tidak mempunyai baris yang semua entrinya bernilai nol.

2.4. MATRIKS INVERS

Definisi 18 :

Jika perkalian matriks A terhadap matriks B memenuhi,

$$AB = I \tag{31}$$

maka, A disebut invers kiri dari matriks B, dan B disebut invers kanan dari matriks A.

Definisi 19 :

Jika A matriks non singular, maka A mempunyai Invers.

Theorema 5 :

Pandang matriks non singular, $A_{(m \times n)}$.

Jika B invers kanan dari A , dan C invers kiri dari A, maka $B = C$.

Bukti :

B invers kanan dari A, maka $AB = I$

C invers kiri dari A, maka $CA = I$

Akibatnya,

$CA = I$

$$CAB = I\,B$$

$$C(AB) = B$$

$$C\,I = B$$

$$C = B$$

$$B = C \tag{32}$$

Notasi :

Invers dari A ditulis sebagai A^{-1}.

Invers kiri A = invers kanan A maka

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I \tag{33}$$

Definisi 20 :

demgan i dan j = 1 , 2 , ... , n dan K_{ij} kofaktor dari em tri a_{ij} , maka dapat dibentuk suatu matriks Adjoint dari A, dengan notasi :

Adj. A = transpose dari A^* (34)

dimana, A^* adalah matriks (n x n) yang entri-entrinya K_{ij} , i dan j = 1 , 2 , ... , n.

Definisi 21 :

Jika $A_{(n \times n)}$ matriks non singular, maka dapat dicari invers dari A sebagai :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{A} \tag{35}$$

Pandang matriks non singular, $A_{(n \times n)} = (a_{ij})_{(n \times n)}$.

Maka,

$$A^* = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots\cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots\cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots\cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks Adjoint dari A adalah,

$$\text{Adj. } A = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots\cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots\cdots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots\cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka invers dari matriks A adalah,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

2.5. NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Definisi 22 :

Jika A matriks bujur sangkar (n x n), dan , λ, skalar yang memenuhi persamaan

$$A\ X = \lambda\ X \qquad (37)$$

untuk X suatu matriks kolom bukan nol berukuran (n x 1), maka dikatakan, bahwa λ adalah nilai eigen dari matriks A dan X disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian de - ngan λ .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks $A_{(n \times n)}$, maka persamaan (37) dapat ditulis sebagai

$$A\ X = \lambda I\ X \qquad (38)$$

dengan I matriks identitas (n x n)

ekuivalensi,

$$\lambda I\ X - A\ X = 0$$

atau,

$$(\lambda I - A).\ X = 0 \qquad (39)$$

Matriks kolom, $X \neq 0$, yang memenuhi persamaan (37), haruslah memenuhi sistem n persamaan linear homogen dengan n variabel.

Untuk $X \neq 0$ maka $\left|\lambda I - A\right| = 0$, yaitu harga determinan dari matriks ($\lambda I - A$) sama dengan nol.

Pandang matriks $A_{(n \times n)}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk I matriks identitas (n x n), maka

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (40)$$

Karena $X \neq 0$ maka dari persamaan (39) diperoleh,

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (41)$$

Harga determinan dari matriks ($\lambda I - A$), merupakan polinomial (suku banyak) derajat n dalam λ , dan disebut Polinomial karakteristik dari matriks A.

Sedangkan persamaan (41) disebut Persamaan karakteristik dari matriks A.

nyai n akar-akar , $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, yaitu merupakan akar-akar karakteristik atau nilai-nilai eigen dari suatu matriks **A**.

Selanjutnya, untuk suatu nilai eigen, λ_i, sehingga $|\lambda_i I - A| = 0$, terdapat suatu matriks kolom, $X_i \neq 0$, yang memenuhi persamaan (39). Matriks kolom tersebut dinamakan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ_i .

Theorema 6 :

Himpunan n buah vektor eigen, $\{X_1 \; X_2 \ldots X_n\}$, dikatakan bebas linear (linearly independent), jika oleh skalar-skalar, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sedemikian sehingga

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0 \qquad (42)$$

jika,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$$

Bukti :

Pandang matriks bujur sangkar $A_{(n \times n)}$ yang mempunyai :

n nilai eigen, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan

n vektor eigen, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang bersesuaian dengan λ_i

Karena X_i , i = 1,2, ... ,n merupakan nilai-nilai eigen dari **A**, maka sesuai definisi 22, X_i adalah matriks-matriks kolom bukan nol yang memenuhi persamaan (37).

$$X_1 \neq 0 \quad , \quad X_2 \neq 0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n \neq 0$$

sehingga,

$$A X_1 = \lambda_1 X_1 \quad , \quad A X_2 = \lambda_2 X_2 \; , \; \ldots \quad , \quad A X_n = \lambda_n X_n \qquad (43)$$

$\lambda_i X_i$, i = 1,2, ... ,n adalah penyelesaian bukan nol, sehingga diperoleh

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n \neq 0 \qquad (44)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

Jadi terbukti, himpunan vektor-vektor eigen, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, bebas linear.

2.6. DIAGONALISASI MATRIKS

Definisi 23 :

Suatu matriks bujur sangkar $A_{(n \times n)}$ dikatakan dapat di - diagonalisasikan (dibawa ke bentuk diagonal), jika terdapat matriks non singular, sedemikian sehingga

$$P^{-1} A P = D \tag{45}$$

dengan D matriks diagonal (n x n).

Dikatakan, matriks P mendiagonalisasikan matriks A.

Dalam hal ini, P adalah matriks yang kolom-kolomnya dibentuk oleh vektor-vektor eigen dari matriks A.

$$P_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \tag{46}$$

dan D matriks diagonal yang entri-entrinya pada diagonal utama adalah merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{47}$$

Theorema 7 :

Jika A matriks bujur sangkar berukuran (n x n) maka berlaku: A adalah matriks yang dapat didiagonalisasikan, jika dan hanya jika, A mempunyai sebanyak n vektor-vektor eigen yang bebas linear.

Bukti :

Karena A dapat didiagonalisasikan, maka untuk matriks non singular $P_{(n\ x\ n)}$ berlaku,

$$P^{-1} A P = D$$

Jika kedua ruas persamaan dikalikan dengan matriks P, maka

$$P P^{-1} A P = P D$$

$$I A P = P D$$

$$A P = P D$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots\cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots\cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots\cdots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix} \qquad (48)$$

Jika $X_1, X_1, \ldots\ X_n$ menunjukkan kolom-kolom dari matriks $P_{(n\ x\ n)}$, maka kolom-kolom dari matriks perkalian AP pada persamaan (48) adalah,

$$\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots\ldots, \lambda_n X_n$$

Sedangkan, sesuai persamaan (17), kolom-kolom dari matriks perkalian AP adalah,

$$AX_1, AX_2, \ldots\ , AX_n$$

sehingga diperoleh,

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \ , \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \ , \quad \ldots \quad AX_n = \lambda_n X_n \tag{49}$$

Menurut definisi 22, maka dari persamaan (49) diperoleh,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A

dan

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah vektor-vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ_i , i = 1,2, ... ,n

Karena P matriks non singular, maka kolom-kolomnya, $X_i \neq 0$

Sehingga menurut theorema 6, dikatakan bahwa matriks A mempunyai sebanyak n vektor eigen yang bebas linear.

($\Leftarrow$) Matriks A mempunyai n vektor eigen yang bebas linear,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

Ambil matriks non singular $P_{(n \times n)}$ yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen dari A.

Sesuai persamaan (17), maka kolom-kolom dari matriks perkalian AP adalah

$AX_1, AX_2, \ldots, AX_n$

Tetapi, karena X_i , i = 1,2, ... ,n vektor-vektor eigen dari matriks A, maka berlaku

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \ , \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \ , \ \ldots \ , \ AX_n = \lambda_n X_n$$

untuk nilai-nilai eigen λ_i , i = 1,2, ... ,n

Dengan demikian, perkalian matriks AP dapat ditulis sebagai

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

jadi,

$$AP = PD \tag{50}$$

dengan D matriks diagonal yang entri-entrinya di-diagonal utama merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A.

Karena vektor-vektor eigen dari A bebas linear, maka semua kolom-kolom yang menyusun $P_{(n \times n)}$, merupakan kolom - kolom bukan nol. Sesuai theorema 4, P adalah matriks non - singular.

Dari persamaan (50), kedua ruas persamaan dikalikan invers dari matriks P, P^{-1}, diperoleh

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD$$

sehingga,

$$P^{-1}AP = D$$

Berdasarkan definisi 23, dikatakan bahwa matriks A adalah matriks yang dapat didiagonalisasikan.