BAB III

PERLUASAN FIELD

III.1. PENGERTIAN PERLUASAN FIELD.

Definisi III.1.1.

Jika K merupakan suatu field, dan F adalah sub field dari K, maka K disebut perluasan field dari F.

Contoh

1. Jika C adalah field bilangan komplex, R field bilangan riil dan Q field bilangan Rasional.

   Jadi $Q \subset R \subset C$, maka :

   C adalah perluasan field dari R

   R adalah perluasan field dari Q

   C adalah perluasan field dari Q

2. Jika F suatu field, karena F adalah sub field dari dirinya sendiri, maka F adalah perluasan field dari F.

   Jadi setiap field merupakan perluasan field dari dirinya sendiri.

3. Jika Q adalah field dari bilangan rasional dam $Q(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}.b \mid a,b \in Q\}$.

   Maka $Q(\sqrt{2})$ adalah perluasan field dari Q.

Selanjutnya jika S merupakan himpunan bagian dari field K, maka interseksi semua sub field dari K yang memuat S adalah sub field dari K, yang merupakan sub field terkecil dari K yang memuat S. Sekarang jika K merupakan perluasan field dari -

field F dan S himpunan bagian dari K, maka sub field dari K yang dibentuk oleh F U S disebut sub field dari K yang dibentuk oleh S atas F dan dinotasikan dengan F (S).

Jika S adalah himpunan berhingga dan misalkan elemennya adalah $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, maka F (S) = F ($a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$).

Untuk suatu elemen tertentu $\alpha \in K$, sub field dari K yang dibentuk oleh F U $\{\alpha\}$ disebut sub field dari K yang dibentuk oleh α atas F dinotasikan dengan F (α).

F (α) disebut sub field terkecil yang memuat F dan $\{\alpha\}$.

Definisi III.1.3.

Jika F (α) = K, jadi sub field K yang ditentukan oleh elemen $\alpha \in K$ atas F adalah K sendiri, maka K disebut perluasan sederhana dari F.

Contoh

$Q(\sqrt{2}) = \{ a + \sqrt{2}.b \mid a,b \in Q \}$, maka $Q(\sqrt{2})$ adalah perluasan sederhana dari field Q.

Theorema III.1.1.

Jika f (x) $\in$ F [x] adalah polynomial irreducible dengan deg f (x) $\geq$ 1, maka terdapat suatu perluasan field K dari F, sedemikian sehingga [K:F] = deg f (x) dan f (x) punya akar dalam K.

Bukti :

Misal f (x) $\in$ F [x] adalah polynomial irre ducible dengan deg $f(x) = n$ dan andaikata $W = (f(x))$ merupakan idial dari $F[x]$ yang dibentuk oleh $f(x)$.

Karena $f(x)$ polynomial irreducible, maka $(f(x))$ adalah idial maximal dari $F(x)$.

Dengan demikian $F[x]/W$ merupakan field.

Andaikan $K = F[x]/W$ dan $K' = \{W + a \mid a \in F\}$ merupakan sub field dari K.

Dibuktikan bahwa K' adalah isomorphik ke F.

Pandang :

$$\emptyset : F \longrightarrow K', \ \emptyset(a) = W + a, \ \forall a \in F.$$

$\emptyset$ adalah homomorfisma, sebab :

$$\begin{aligned} \emptyset(a + b) &= W + (a+b). \\ &= (W + a) + (W + b). \\ &= \emptyset(a) + \emptyset(b). \\ \emptyset(a.b) &= W + (a.b). \\ &= (W + a)(W + b). \\ &= \emptyset(a).\emptyset(b). \end{aligned}$$

$\emptyset$ adalah injectif, sebab untuk sembarang elemen $\emptyset(a), \emptyset(b) \in K'$,

Jika $\emptyset(a) = \emptyset(b)$

$\Longrightarrow \emptyset(a) - \emptyset(b) = \bar{0}$

$\Longrightarrow \emptyset(a-b) = W + 0$

$\Longrightarrow (a - b) = 0$

$\Longrightarrow a = b$

$\emptyset$ adalah surjectif, sebab untuk setiap $\emptyset(a) \in K'$, maka pasti punya kawan $a \in F$, sedemikian sehingga - $\emptyset(a) = W + a$, dengan $a \in F$.

Jadi K' adalah isomorphik ke F.

Perhitungan selanjutnya, F dipandang sebagai sub field dari K, karena F $\cong$ K', sedang K' sub field dari K.

Misal $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, dimana $a_n \neq 0$ dan $a_o, a_1, a_2, \dots, a_n \in F$.

Karena $f(x) \in W$.

$\Longrightarrow W + f(x) = W$

$\Longrightarrow W + (a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n) = W$

$\Longrightarrow (W + a_o) + (W + a_1x) + (W + a_2x^2) + \dots + (W + a_nx^n) = W$

$\Longrightarrow a_o(W + 1) + a_1(W + x) + a_2(W + x)^2 + \dots + a_n(W + x)^n = W$

Karena W merupakan elemen 0 dari $F[x]/W = K$, maka elemen $W + x \in K$ adalah akar dari f(x).

Tinggal menunjukkan bahwa $[K : F] = \deg f(x) = n$, yaitu bahwa dimensi ruang vektor K atas F adalah n.

Ditunjukkan bahwa $S = \{(w+1), (w+x), (w+x^2), \dots, (w+x^{n-1})\}$.

adalah basis ruang vektor K atas F.

Himpunan S adalah bebas linier untuk suatu elemen $a_o, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in F$

$\Longrightarrow a_o(w+1) + a_1(w+x) + a_2(w+x^2) + \dots + a_{n-1}(w+x^{n-1}) = W$

$\Longrightarrow (w+a_o) + (w+a_1x) + (w+a_2x^2) + \dots + (w+a_{n-1}x^{n-1}) = W$

$\Longrightarrow W + (a_o+a_1x+a_2x^2+ \dots +a_{n-1}x^{n-1}) = W$

$\Longrightarrow (a_o+a_1x+a_2x^2+ \dots +a_{n-1}x^{n-1}) \in W$

$\Longrightarrow (a_o+a_1x+a_2x^2+ \dots +a_{n-1}x^{n-1}) = f(x).g(x)$

untuk suatu $g(x) \in F[x]$

$\Longrightarrow$ $g(x) = 0$ (karena jika $g(x) \neq 0$, maka derajat ruas kiri lebih kecil dari derajat ruas kanan).

$\Longrightarrow$ $a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = 0$

$\Longrightarrow$ $a_o = 0$, $a_1 = 0$, ... $a_{n-1} = 0$

Sekarang ditunjukkan bahwa S membentuk ruang vektor K atas F.

Misal : $W + g(x) \in K$, jadi $g(x)$ adalah polynomial dalam $F[x]$.

Dengan Algoritma Euclid, untuk $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, maka terdapat polynomial $q(x)$ dan $r(x) \in F[x]$, sedemikian sehingga :

$g(x) = f(x).q(x) + r(x)$, dimana $r(x) = 0$ atau $\deg r(x) < \deg f(x)$.

$$\begin{aligned}
W + g(x) &= W + [f(x).q(x) + r(x)] \\
&= [W + [f(x).q(x)]] + [W + r(x)] \\
&= [W + 0] + [W + r(x)] \\
&\quad (\text{ karena } f(x).g(x) \in W) \\
&= W + r(x) \\
&= W + (a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}) \\
&\quad \text{Untuk suatu } a_o, a_1, a_2, \ldots a_{n-1} \in F \\
&\quad (\text{ karena } \deg r(x) < \deg f(x) = n) \\
&= (W + a_o) + (W + a_1x) + (W + a_2x^2) + \\
&\quad \ldots + (W + a_{n-1}x^{n-1}) \\
&= a_o (W + 1) + a_1(W + x) + a_2(W + x^2) \\
&\quad + \ldots + a_{n-1}(W+x^{n-1})
\end{aligned}$$

Jadi $W + g(x)$ adalah kombinasi linier dari elemen S, dan karena $W + g(x)$ adalah elemen sembarang dari K, maka berarti setiap elemen yang berada dalam K dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari elemen S.

Dengan demikian ruang vektor K atas F dibangun oleh S, dan S adalah basis ruang vektor K atas F.

Karena basis ruang vektor K atas F ada n elemen, berarti dimensi K atas F adalah n.

Jadi $[K : F] = n = \deg f(x)$.

Theorema terbukti.

<u>Contoh</u>

Misal $F = I_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Ambil $f(x) = x^2 + 1 \in F(x)$.

Dan $K = \frac{F(x)}{W}$, dimana W adalah idial yang dibangun oleh polynomial irreducible $x^2 + 1 \in F(x)$

Maka : $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{x}, \overline{1+x}, \overline{2+x}, \overline{2x}, \overline{1+2x}, \overline{2+2x}\}$

Jadi K adalah perluasan field dari F.

W adalah elemen netral dari K, atau semua elemen yang berbentuk $q(x)(x^2+1)$, dimana $q(x) \in F(x)$ adalah elemen netral dari K.

Jadi $W = \bar{0}$

Untuk $q(x) = 1$, maka $x^2 + 1 = \bar{0}$

berarti x adalah akar dari $f(x)$.

Sedangkan $x \in K$.

Jadi $f(x)$ punya akar dalam K.

Setiap elemen K merupakan kombinasi linier dari $\{1, x\}$.

Jadi basis ruang vektor K atas F adalah $\{1, x\}$.
Sehingga dimensi ruang vektor K atas F adalah 2 = deg f(x).
Dengan demikian K merupakan perluasan field dari F $[K : F] = \deg f(x)$ dan f(x) punya akar dalam K.

III.2. SPLITTING FIELD.

Definisi III.2.1.

Suatu perluasan field K dari F disebut splitting field dari $f(x) \in F(x)$, jika f(x) dapat dinyatakan :

$f(x) = a\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\ldots\ldots\,(x-\alpha_n)$.

dimana $a \in F$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \in K$.

dan $K = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Contoh

1. Jika Q adalah field bilangan Rasional dan $Q(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ maka $Q(\sqrt{2})$ adalah splitting field dari $x^2 - 2 \in Q(x)$.

   Sebab, $Q(\sqrt{2})$ adalah perluasan field dari Q, $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2})$, dimana $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$.

   Karena $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$, maka field terkecil yang memuat $Q(\sqrt{2})$, $-\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2}$ tidak lain adalah $Q(\sqrt{2})$ sendiri.

Theorema III.2.1.

Terdapat suatu splitting field untuk setiap polynominal dengan derajat positif atas suatu field.

Bukti :

Misal $f(x) \in F[x]$, dengan deg $f(x) = n$.
Dibuktikan bahwa terdapat splitting field dari $f(x)$.
Akan dibuktikan dengan induksi matematik.

* Untuk $n = 1$.

Jadi $f(x)$ suatu polynomial dengan deg $f(x) = 1$.
Maka $f(x) = ax + b$, untuk suatu $a,b \in F$.

$$= a\,[x-(-ba^{-1})]$$

Karena $a,b \in F$, maka $(-ba^{-1}) \in F$, sehingga $F = F(-ba^{-1})$.
atau field terkecil yang memuat F dan $(-ba^{-1})$ tidak lain adalah F sendiri.
Jadi F adalah perluasan field dari F sendiri, $f(x) = a(x-(-ba^{-1}))$, $a \in F$ dan $(-ba^{-1}) \in F$ dan $F = F(-ba^{-1})$.
Sehingga F adalah splitting field dari $f(x)$, dengan deg $f(x) = 1$.
Jadi theorema benar untuk setiap $f(x)$ dengan deg $f(x) = 1$.

* Diasumsikan bahwa theorema benar untuk setiap polynomial dengan derajat kurang dari n.
* Sekarang untuk deg $f(x) = n > 1$

Misal $f(x) = f_1(x) \ldots\ldots f_m(x)$, dimana $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots\ldots f_m(x)$ adalah polynomial irreducible atas F.
Jika $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_m(x)$ adalah polynomial polynomial berderajat 1.
Jadi $f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_n)$ dimana $a \in F$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \in F$.
Maka $F = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$.

Jadi F adalah splitting field dari $f(x)$.

Sekarang andaikan ada $f_i(x)$ yang berderajat lebih besar dari 1, untuk suatu $1 \leq i \leq m$.

misal deg $f_1(x) > 1$.

Menurut theorema (III.1.1) maka terdapat perluasan field $F(\alpha_1)$ yang memuat akar α_1 dari $f_1(x)$.

Menurut akibat (II.3.7.1.), maka $(x - \alpha_1)$ adalah pembagi dari $f_1(x)$ dalam $F(\alpha_1)$.

Jadi dalam field $F(\alpha_1)$, kita punya relasi $f(x) = (x-\alpha_1)\, g(x)$.

Dimana deg $g(x) = n - 1$.

Sekarang $g(x)$ merupakan polynomial dengan deg $g(x) = n - 1 < n$.

Menurut hypotesa induksi diatas maka terdapat Splitting field dari $g(x)$.

$F(\alpha_1)(\alpha_2, \ldots, \alpha_m) = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ adalah splitting field dari $f(x)$.

Theorema terbukti.

Lemma III.2.1.

Jika F_1, F_2 field.

ϕ adalah isomorfisma, ϕ , $F_1 \longrightarrow F_2$

maka terdapat isomorfisma $\phi^* : F_1[x] \longrightarrow F_2[x]$.

dengan sifat $\phi^*(a) = \phi(a)$, $\forall a \in F_1$

Bukti :

Misal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in F_1[x]$

Pandang :

$$\phi^* : F_1[x] \longrightarrow F_2[t]$$

didefinisikan, $\phi^*[f(x)] = \phi^*[a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n]$

$= \phi(a_o) + \phi(a_1)t + \phi(a_2)t^2 + \ldots + \phi(a_n)t^n$

ϕ^* adalah homomorfisma, sebab :

Jika $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$g(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

Adalah suatu polynomial dari $F_1[x]$, n boleh $\neq$ m.

Misalkan $n \geq m$

$$\begin{aligned}
\phi^*[f(x) + g(x)] &= \phi^*[(a_o + b_o) + (a_1 + b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots + (a_m+b_m)x^m + (a_{m+1})x^{m+1} + \ldots + (a_n)x^n] \\
&= \phi(a_o + b_o) + \phi(a_1 + b_1)t + \phi(a_2 + b_2)t^2 + \ldots + \phi(a_m+b_m)t^m + \phi(a_{m+1})t^{m+1} + \ldots + \phi(a_n)t^n \\
&= \phi(a_o) + \phi(b_o) + \phi(a_1)t + \phi(b_1)t + \phi(a_2)t^2 + \phi(b_2)t^2 + \ldots + \phi(a_m)t^m + \phi(b_m)t^m + \phi(a_{m+1})t^{m+1} + \ldots + \phi(a_n)t^n \\
&= [\phi(a_o) + \phi(a_1)t + \phi(a_2)t^2 + \ldots + \phi(a_m)t^m + \ldots + \phi(a_n)t^n] + [\phi(b_o) + \phi(b_1)t + \phi(b_2)t^2 + \ldots + \phi(b_m)t^m] \\
&= \phi^*[a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n] + \phi^*[b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_mx^m] \\
&= \phi^*[f(x)] + \phi^*[g(x)]
\end{aligned}$$

$$\emptyset^* \left[f(x).g(x) \right] = \emptyset^* \left[(a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)(b_o+ b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m) \right]$$
$$= \emptyset^* \left[(a_ob_o)+(a_ob_1+a_1b_o)x+\ldots\ldots+ a_nb_mx^{m+n} \right]$$
$$= \emptyset\left[(a_ob_o)+\emptyset(a_ob_1+a_1b_o)t+\ldots\ldots+ \emptyset(a_nb_m)t^{m+n} \right]$$
$$= \emptyset(a_o)\emptyset(b_o)+\emptyset(a_o)\emptyset(b_1)t+\emptyset(a_1)\emptyset (b_o)t+\ldots+\emptyset(a_n)\emptyset(b_m)t^{m+n}$$
$$= \left[\emptyset(a_o)+\emptyset(a_1)t+\emptyset(a_2)t^2+\ldots+\emptyset(a_n)t^n \right] \left[\emptyset(b_o)+\emptyset(b_1)t+\emptyset(b_2)t^2+\ldots+ \emptyset(b_m)t^m \right]$$
$$= \emptyset^* \left[a_o+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n \right] . \emptyset^* \left[b_o+ b_1t+b_2t^2+\ldots+b_mt^m \right]$$
$$= \emptyset^* \left[f(x) \right] . \emptyset^* \left[g(x) \right]$$

$\emptyset^*$ adalah injectif :

Misal $f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$g(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

adalah polynomial dalam $F_1[x]$

Andaikan $\emptyset^* [f(x)] = \emptyset^* [g(x)]$

$\Longrightarrow \emptyset^* [a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n] = \emptyset^* [b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m]$

$\Longrightarrow \emptyset(a_o) + \emptyset(a_1)t + \emptyset(a_2)t^2 + \ldots + \emptyset(a_n)t^n$
$= \emptyset(b_o) + \emptyset(b_1)t + \ldots + \emptyset(t_m)t^m$

$\Longrightarrow n = m$ dan $\emptyset(a_o) = \emptyset(b_o)$, $\emptyset(a_1) = \emptyset(b_1), \ldots,$
$\emptyset(a_n) = \emptyset(b_m)$

$\Longrightarrow n = m$ dan $a_o = b_o$, $a_1 = b_1$, ... $a_n = b_m$

$\Longrightarrow a_o + a_1x + a_2x + \ldots + a_nx^n = b_o+b_1x+\ldots b_mx^m$

$\Longrightarrow f(x) = g(x)$

$\emptyset^*$ adalah surjectif, sebab :

Jika $g(t) = b_o + b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_mt^m$ adalah suatu polynomial sembarang dalam $F_2[t]$, maka b_o, b_1, ... $b_m \in F_2$ dan $\emptyset$ merupakan isomorfisma dari F_1 onto F_2. Sehingga untuk setiap elemen dalam F_2 dapat ditemukan $a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ dalam F_1 sedemikian sehingga :

$$\emptyset(a_o) = b_o\ ,\ \emptyset(a_1) = b_1,\ \emptyset(a_2) = b_2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, \emptyset(a_n) = b_n.$$

$$\text{Jadi } g(t) = b_o + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots. + b_m t^m$$
$$= \emptyset(a_o) + \emptyset(a_1)t + \emptyset(a_2)t^2 + \ldots\ldots + \emptyset(b_m)t^m$$
$$= \emptyset^* \left[a_o + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots. + a_m x^m \right]$$
$$= \emptyset^* \left[f(x) \right]$$

Dimana $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. + a_m x^m \in F_1 x$

Jadi untuk setiap $g(t) \in F_2(t)$, terdapat suatu $f(x) \in F_1(x)$ sedemikian sehingga $\emptyset^* \left[f(x) \right] = g(t)$

Sehingga $\emptyset^*$ adalah suatu homomorfisma yang bijektif dari $F_1[x]$ onto $F_2(t)$ dengan $\emptyset^*(a) = \emptyset(a)$, $\forall a \in F_1$.

Lemma terbukti.

Lemma III.2.2.

Jika $\emptyset$ merupakan isomorfisma,

$\emptyset : F_1 \dashrightarrow F_2$.

Misal $f_1(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in F_1[x]$

$$f_2(t) = \emptyset(a_o) + \emptyset(a_1)t + \emptyset(a_2)t^2 + \ldots. + \emptyset(a_n)t^n$$

Jika $f_1(x)$ adalah polynomial irreducible $\in F_1(x)$, maka terdapatlah isomorfisma $\emptyset : \dfrac{F_1[x]}{[f_1(x)]} \dashrightarrow$

dimana $[f_1(x)]$ dan $[f_2(t)]$ adalah idial dari $F_1[x]$ dan $F_2[t]$ yang masing - masing dibangun oleh $f_1(x)$ dan $f_2(t)$.

<u>Bukti :</u>

Pandang $\emptyset^* : F_1[x] \longrightarrow F_2[t]$

dimana : $\emptyset^* \; [f_1(x)] = f_2(t)$

Menurut lemma (III.2.1.), $\emptyset^*$ adalah isomorfisma.

Diketahui bahwa $f_1(x)$ adalah irreducible, maka $f_2(t)$ juga irreducible.

Sehingga $[f_1(x)]$ dan $[f_2(t)]$ merupakan idial maximal.

Maka $\dfrac{F_1[x]}{[f_1(x)]}$ dan $\dfrac{F_2[t]}{[f_2(t)]}$ adalah field.

Andaikan $[f_1(x)] = W_1$ dan $[f_2(t)] = W_2$

Pandang : $\emptyset : \dfrac{F_1[x]}{W_1} \longrightarrow \dfrac{F_2[t]}{W_2}$

$$\emptyset\,[W_1 + g_1(x)] = [W_2 + g_2(t)]$$

dengan $g_2(t) = \emptyset^* \; [g_1(x)]$, $\forall\; g_1(x) \in F_1[x]$

$\emptyset$ adalah well difine, sebab :

Misal $g_1(x)$ dan $h_1(x)$ adalah polynomial sembarang dalam $F_1[x]$

Andaikan $g_1(x) = h_1(x)$

$\Longrightarrow \; W_1 + g_1(x) = W_1 + h_1(x)$

$\Longrightarrow \; g_1(x) - h_1(x) \in W_1$

$\Longrightarrow \; g_1(x) - h_1(x) = k_1(x).f_1(x)$, untuk suatu - $k_1(x) \in F_1[x]$

$\Longrightarrow \; \emptyset^* \; [g_1(x) - h_1(x)] = \emptyset^* \; [k_1(x).f_1(x)]$

$\Longrightarrow \; \emptyset^* \; [g_1(x)] - \emptyset^* \; [h_1(x)] = \emptyset^* [k_1(x)].$
$\emptyset^* \; [f_1(x)]$

$\Longrightarrow \; g_2(t) - h_2(t) = k_2(t).f_2(t)$

$\Longrightarrow$ $g_2(t) - h_2(t) \in W_2$

$\Longrightarrow$ $W_2 + g_2(t) = W_2 + h_2(t)$

$\Longrightarrow$ $\emptyset\left[W_1 + g_1(x)\right] = \emptyset\left[W_1 + h_1(x)\right]$

$\emptyset$ adalah homomorfisma, sebab :

Misal $g_1(x),\ h_1(x) \in F_1(x)$,

Maka : $\emptyset\left[\{W_1 + g_1(x)\} + \{W_1 + h_1(x)\}\right]$

$= \emptyset\left[W_1 + \{g_1(x) + h_1(x)\}\right]$

$= W_2 + \emptyset^*\{g_1(x) + h_1(x)\}$

$= W_2 + \left\{\emptyset^*\left[g_1(x)\right] + \emptyset^*\left[h_1(x)\right]\right\}$

$= W_2 + \{g_2(t) + h_2(t)\}$

$= \{W_2 + g_2(t)\} + \{W_2 + h_2(t)\}$

$= \emptyset\{W_1 + g_1(x)\} + \emptyset\{W_1 + h_1(x)\}$

Dan $\emptyset\left[\{W_1 + g_1(x)\}\cdot\{W_1 + h_1(x)\}\right]$

$= \emptyset\left[W_1 + \{g_1(x).h_1(x)\}\right]$

$= W_2 + \emptyset^*\{g_1(x).h_1(x)\}$

$= W_2 + \{g_2(t).h_2(t)\}$

$= \{W_2 + g_2(t)\}\cdot\{W_2 + h_2(t)\}$

$= \emptyset\{W_1 + g_1(x)\}.\emptyset\{W_1 + h_1(x)\}$

$\emptyset$ adalah injectif , sebab,

Misal $g_1(x),\ h_1(x) \in F_1(x)$

Andaikan $\emptyset\left[W_1 + g_1(x)\right] = \emptyset\left[W_1 + h_1(x)\right]$

$\Longrightarrow$ $W_2 + g_2(t) = W_2 + h_2(t)$

$\Longrightarrow$ $g_2(t) - h_2(t) \in W_2$

$\Longrightarrow$ $g_2(t) - h_2(t) = k_2(t).f_2(t)$, untuk suatu $h_2(t) \in F_2(t)$

$\Longrightarrow$ $\emptyset^*\left[g_1(x)\right] - \emptyset^*\left[h_1(x)\right] = \emptyset^*\left[k_1(x)\right]\emptyset^*\left[f_1(x)\right]$

$\Longrightarrow$ $\emptyset^*\left[g_1(x) - h_1(x)\right] = \emptyset^*\left[k_1(x).f_1(x)\right]$

$\Longrightarrow$ $g_1(x) - h_1(x) = k_1(x).f_1(x)$

$\Longrightarrow g_1(x) - h_1(x) \in W_1$

$\Longrightarrow W_1 + g_1(x) = W_1 + h_1(x)$

$\not{\emptyset}$ adalah surjectif, sebab untuk sembarang polynomial $g_2(t) \in F_2(t)$, maka terdapat $g_1(x) \in F_1(x)$, sedemikian sehingga : $\emptyset^*(g_1(x)) = g_2(t)$

Jadi : $W_2 + g_2(t) = W_2 + \emptyset^* [g_1(x)]$

$= \not{\emptyset}[W_1 + g_1(x)]$

Sehingga untuk setiap $W_2 + g_2(t) \in \frac{F_2[t]}{W_2}$, terdapatlah $W_1 + g_1(x) \in \frac{F_1[x]}{W_1}$, sedemikian sehingga

$W_2 + g_2(t) = \not{\emptyset}[W_1 + g_1(x)]$

Jadi $\not{\emptyset}$ adalah homomorfisma yang bijectif atau isomorfisma .

Lemma terbukti

Definisi III.2.

Jika $\emptyset$ isomorfisma dari field $F_1 \longrightarrow F_2$

K_1 dan K_2 masing - masing perluasan field F_1 dan F_2

Isomorfisma $\not{\emptyset} : K_1 \longrightarrow K_2$ dikatakan terusan dari isomorfisma $\emptyset$, jika $\not{\emptyset}(a) = \emptyset(a)$, $\forall a \in F_1$

Contoh

Jika Q adalah field bilangan Rasional.

C adalah field bilangan Komplex.

$\emptyset : Q \longrightarrow Q$

$\emptyset(a) = a$, $\forall a \in Q$

$\not{\emptyset} : C \longrightarrow C$

$\not{\emptyset}(c) = c$, $\forall c \in C$

Maka $\not{\emptyset}$ adalah terusan dari isomorfisma $\emptyset$, sebab :

C adalah perluasan field dari Q dan untuk setiap $a \in Q$ berlaku $\not{\emptyset}(a) = \emptyset(a)$.

Lemma III.2.3.

Jika isomorfisma $\phi : F_1 \longrightarrow F_2$, untuk setiap $f_1(x) \in F_1[x]$ dengan $f_1(x)$ irreducible punya kawan $f_2(t) \in F_2[t]$

dimana $f_1(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$$f_2(t) = \phi(a_o) + \phi(a_1)t + \phi(a_2)t^2 + \ldots + \phi(a_n)t^n$$

Maka isomorfisma ϕ dapat diteruskan ke isomorfisma θ dari perluasan sederhana $F_1(\alpha)$ ke $F_2(\beta)$ dengan α, β masing - masing akar dari $f_1(x)$ dan $f_2(t)$ sedemikian sehingga $\theta(\alpha) = \beta$

Dalam hal khusus, untuk $F_1 = F_2 = F$, maka

Jika K merupakan perluasan field dari F, f(x) adalah polynomial irreducible dalam $F[x]$ dan α, β adalah akar dari f(x) dalam K, maka $F(\alpha)$ adalah isomorfisma dengan $F(\beta)$ dengan isomorfisma θ yang membawa α onto β dan yang membawa setiap elemen F ke dirinya sendiri.

Bukti :

Menurut Lemma III.2.1. , jika ϕ isomorfisma dari F_1 onto F_2, maka terdapat isomorfisma ϕ^* dari $F_1[x]$ onto $F_2[t]$, dengan x,t indeterminate, sedemikian sehinggga $\phi^*(x) = t$.

Andaikan $f_1(x)$ polynomial irreducible dalam $F_1[x]$ dan $\phi^*[f_1(x)] = f_2(t)$ polynomial reducible.

Maka $f_2(t) = g_2(t).h_2(t)$, untuk suatu $g_2(t), h_2(t) \in F_2[t]$.

Karena ϕ^* isomorfisma, maka $g_2(t)$, $h_2(t) \in F_2(t)$ pasti punya kawan $g_1(x)$, $h_1(x) \in F_1[x]$, sedemikian sehingga :

$\emptyset * [g_1(x)] = g_2(t)$ dan $\emptyset * [h_1(x)] = h_2(t)$

$$\begin{aligned}\emptyset * [f_1(x)] &= f_2(t)\\ &= g_2(t).h_2(t)\\ &= \emptyset * [g_1(x)].\emptyset * [h_1(x)]\\ &= \emptyset * [g_1(x).h_1(x)]\end{aligned}$$

Karena $\emptyset *$ isomorfisma, maka $f_1(x) = g_1(x).h_1(x)$

Berarti $f_1(x)$ reducible, Kontradiksi.

Sehingga $f_2(t)$ adalah irreducible.

Misal $W_1 = [f_1(x)]$ dan $W_2 = [f_2(t)]$ merupakan idial yang dibangun oleh $f_1(x)$ dan $f_2(t)$.

Karena $f_1(x)$ dan $f_2(t)$ adalah irreducible, maka W_1 dan W_2 merupakan idial maximal.

Sehingga $\frac{F_1[x]}{W_1}$ dan $\frac{F_2[t]}{W_2}$ adalah field.

Pandang $\emptyset_1 : F_1[x] \longrightarrow F_1[\alpha]$, $\emptyset$ isomorfisma,

α akar $f_1(x)$

$$\emptyset_1 [g_1(x)] = g_1(\alpha),\ \forall g_1(x) \in F_1[x]$$

Ker $\emptyset_1 = \{ g_1(x) \in F_1[x] \mid g_1(\alpha) = 0 \}$

Jadi Ker $\emptyset_1 = [f_1(x)] = W_1$

Menurut theorema homomorfisma utama, maka :

$$\frac{F_1[x]}{W_1} \cong F_1[\alpha]$$

Analog seperti diatas, didapatkan :

$$\frac{F_2[t]}{W_2} \cong F_2[\beta]$$

Andaikan $\emptyset_1$, $\emptyset_2$ adalah isomorfisma.

$$\emptyset_1 : \frac{F_1[x]}{W_1} \longrightarrow F_1[\alpha]$$

$\phi_2 : \frac{F_2[t]}{W_2} \longrightarrow F_2[\beta]$

Untuk $g_1(x) \in F_1[x]$ dan $g_2(t) \in F_2[t]$, maka :

$\phi_1 \; [W_1 + g_1(x)] = g_1(\alpha)$, $\phi_1[W_1 + x] = \alpha$

$\phi_2 \; [W_2 + g_2(t)] = g_2(\beta)$, $\phi_2[W_2 + t] = \beta$

Menurut Lemma III.2.2. , $\frac{F_1[x]}{W_1} \cong \frac{F_2[t]}{W_2}$

Andaikan ϕ isomorfisma, $\phi : \frac{F_1[x]}{W_1} \longrightarrow \frac{F_2[t]}{W_2}$

Karena, $\frac{F_1[x]}{W_1} \cong \frac{F_2[t]}{W_2}$; $F_1[\alpha] \cong \frac{F_1[x]}{W_1}$ dan $\frac{F_2[t]}{W_2} \cong$ $F_2[\beta]$

Maka : $F_1[\alpha] \cong \frac{F_1[x]}{W_1} \cong \frac{F_2[t]}{W_2} \cong F_2[\beta]$

Maka : $F_1[\alpha] \cong F_2[\beta]$

Andaikan θ isomorfisma, $\theta : F_1[\alpha] \longrightarrow F_2[\beta]$

Jadi $\theta = \phi_2 . \phi . \phi_1^{-1} [\alpha]$

$$\begin{aligned}
\text{Sehingga } \theta(\alpha) &= \phi_2 . \phi . \phi_1^{-1}(\alpha) \\
&= \phi_2 . \phi \, [\phi_1^{-1}(\alpha)] \\
&= \phi_2 . \phi \, [W_1 + x] \\
&= \phi_2 \, [\phi(W_1 + x)] \\
&= \phi_2 \, [W_2 + t] \\
&= \beta
\end{aligned}$$

Jadi terdapat isomorfisma $\theta : F_1[\alpha] \longrightarrow F_2[\beta]$

sedemikian sehingga $\theta(\alpha) = \beta$

Lemma terbukti.

<u>Contoh</u>

Jika Q adalah field bilangan Rasional

$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$

Isomorfisma $\phi : Q \longrightarrow Q$

$\phi(a) = a$, $\forall a \in Q$.

Maka Θ merupakan terusan dari isomorfisma $\emptyset$, dimana

$\Theta : Q(\sqrt{2}) \longrightarrow Q(\sqrt{2})$

dengan $\Theta(a) = a$, $\forall a \in Q(\sqrt{2})$

<u>Theorema III.2.2.</u>

Jika f(x) polynomial sembarang dalam F[x]

Maka dua splitting field dari f(x) adalah isomor - phik.

Juga pemetaan isomorphik dapat memetakan setiap elemen F ke dirinya sendiri, dan memetakan semua akar-akar dari f(x) dalam Splitting field yang satu ke akar - akar dari f(x) dalam splitting field yang lain.

<u>Bukti :</u>

Andaikan K_1 dan K_2 adalah dua splitting dari f(x) - dalam F[x] .

Sehingga $K_1 = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$

$K_2 = F(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$

Andaikan $f_1(x)$ adalah faktor irreducible dari f(x) dengan deg $f_1(x) \geqslant 1$.

Maka salah satu dari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah akar dari $f_1(x)$ didalam K_1. Demikian pula salah satu dari $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ adalah akar dari $f_1(x)$ didalam K_2.

Andaikan α_1, β_1 adalah akar dari $f_1(x)$ masing - masing didalam K_1 dan K_2.

Menurut Lemma III.2.3. , maka terdapat suatu isomorfisma Θ_1 dari $F(\alpha_1)$ onto $F(\beta_1)$ yang membawa α_1 ke β_1 dan yang membawa setiap elemen F ke dirinya sendiri.Sehingga Θ_1 merupakan terusan dari isomorfisma identitas I.

Andaikan $f(x) = (x - \alpha_1) g_1(x)$ dimana $g_1(x) \in F(\alpha_1)[x]$.

Maka $\theta_1[f(x)] = \theta_1[(x - \alpha_1) \cdot g_1(x)]$

$f(x) = [x - \theta(\alpha_1)] \cdot \theta_1[g_1(x)]$

(Karena θ_1 memetakan setiap elemen F ke dirinya sendiri, $\theta_1[f(x)] = f(x)$).

Atau $f(x) = (x - \beta_1) \cdot \theta_1[g_1(x)]$, dimana : $\theta_1[g_1(x)] \in F(\beta)[x]$

Andaikan $h_1(x)$ adalah faktor irreducible dari $g_1(x)$, $h_2(x)$ adalah faktor irreducible dari $\theta_1[g_1(x)]$.

Maka salah satu dari $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ adalah akar dari $h_1(x)$ dan juga akar dari $g_1(x)$.

Demikian pula salah satu dari $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ adalah akar dari $h_2(x)$ dan juga akar dari $\theta_1[g_1(x)]$

Andaikan α_2, β_2 masing - masing akar dari $g_1(x)$ dan $\theta_1[g_1(x)]$.

Menurut Lemma III.2.3., maka terdapat isomorfisma θ_2 dari $F(\alpha_1)(\alpha_2) = F(\alpha_1, \alpha_2)$ ke $F(\beta_1)(\beta_2) = F(\beta_1, \beta_2)$. yang memetakan α_1 ke β_1, α_2 ke β_2 dan memetakan setiap elemen F ke dirinya sendiri.

Andaikan $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot g_2(x)$, dimana $g_2(x) \in F(\alpha_1, \alpha_2)[x]$.

Maka $\theta_2[f(x)] = \theta_2[(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot g_2(x)]$.

$f(x) = [(x - \theta_2(\alpha_1))(x - \theta_2(\alpha_2))] \cdot \theta_2[g_2(x)]$

(Karena θ_2 memetakan setiap elemen F ke dirinya sendiri, $\theta_2[f(x)] = f(x)$).

Atau $f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\, \theta_2[g_2(x)]$,

dimana $\theta_2[g_2(x)] \in F(\beta_1, \beta_2)[x]$

Jika proses dilanjutkan terus sampai ke n, maka terdapat isomorfisma Θ_n dari $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n) = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$ ke $F(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots, \beta_{n-1})(\beta_n) = F(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$ yang memetakan setiap elemen F kediringa sendiri danmemetakan himpunan $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ didalam K_1 ke $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n\}$ didalam K_2.

Sehingga $K_1 = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dan $K_2 = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ adalah isomorphik.

Theorema terbukti.