BAB II

MATERI PENUNJANG

II.1. TEORI HIMPUNAN.

II.1.1. Semesta Pembicaraan

Suatu pembicaraan menguraikan sifat-sifat dari Relasi-relasi antara obyek - obyek tertentu. Keseluruhan dari obyek - obyek yang dibicarakan dalam pembicaraan itu disebut Semesta Pembicaraan.

Pada setiap pembicaraan matematik, orang selalu menetapkan lebih dahulu semesta pembicaraannya, yang kemudian dikumpulkan menjadi suatu himpunan.

Contoh

1. Himpunan bilangan bulat

$$Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

2. Himpunan bilangan Rasional

$$Q = \{ \tfrac{a}{b} \mid a,b \in Z, \ b \neq 0 \}$$

3. Himpunan bilangan Riil

$$R = \{ -\infty < x < \infty \}$$

4. Himpunan bilangan Komplex

$$C = \{ a + ib \mid a,b \in Q, \ i = \sqrt{-1} \}$$

5. Himpunan bilangan prime $= \{ x \mid x = \text{bilangan prime} \}$

Selanjutnya akan digunakan istilah " Relasi " yang dianggap bahwa konsep itu dapat ditangkap, yaitu dianggap langsung - bisa dimengerti apa yang dimaksud, umpama dengan kalimat " 4 habis dibagi 2 " dan " a adalah ayahnya b " dan lain - lain.

Definisi II.1.1.

Relasi R disebut refloktif bhb

$(\forall a \in S)\ a R a$

Contoh

Relasi mencintai, sebab tidak ada orang yang tidak mencintai diri sendiri.

Definisi II.1.2.

Relasi R disebut symetris bhb

$(\forall a, b \in S)\ a R b \Longrightarrow b R a$

Contoh

Relasi kesejajaran antara garis - garis dibidang datar.

Definisi II.1.3.

Relasi R transitif bhb

$(\forall a,b,c \in S)\ aRb \ \& \ bRc \Longrightarrow aRc$

Contoh

Relasi kesejajaran antara garis - garis dibidang datar.

Definisi II.1.4.

Relasi R yang sekaligus memiliki - fat refloktif, symetris, dan transmitif - disebut relasi equivalensi.

Contoh

Relasi kesejajaran antara garis -

garis dibidang datar

II.1.2. Pemetaan

Misal S dan T adalah dua himpunan sembarang.

Suatu pemetaan dari S ke T adalah suatu perkawanan, dimana setiap elemen dalam S dikawankan dengan tunggal suatu elemen dalam T.

Ditulis dengan simbol $f : S \longrightarrow T$

Jika $u \in S$ maka $f(u)$ adalah elemen $\in T$ yang dikawankan dengan u oleh f. $f(u)$ dinamakan harga f di u, disebut juga bayangan u dibawah f.

Himpunan semua elemen $f(u)$ bilamana u menghasilkan atas semua elemen S, disebut bayangan (image) dari S.

Contoh

Misal S dan T adalah himpunan bilangan Riil R dan $f : R \longrightarrow R$ dengan $f(x) = x^2$, $\forall x \in R$.

Maka f merupakan pemetaan dari R ke R, dan bayangan f adalah himpunan bilangan ≥ 0.

Suatu pemetaan dari S ke T itu disebut juga pemetaan dari S into T. Jika elemen - elemen dari T juga dihabiskan, jadi setiap $t \in T$ punya kawan dalam S, maka pemetaan itu disebut pemetaan dari S onto T atau pemetaan surjektif.

Jadi $f : S \longrightarrow T$ disebut Surjektif bhb

$(\forall t \in T)(\exists s \in S).\ f(s) = t$

Pada suatu pemetaan dari S ke T, suatu $t \in T$ mungkin mempunyai lebih dari satu kawan dalam S.

Pada pemetaan dengan sifat bahwa setiap $t \in T$ yang mempunyai kawan, hanya mempunyai satu kawan saja, maka disebut pemetaan injectif. Sehingga pada pemetaan yang injectif untuk setiap pasangan $s_1, s_2 \in S$ berlaku jika $f(s_1) = f(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$

Jika pemetaan itu sekaligus surjectif dan injectif, maka disebut pemetaan bijektif.

<u>Contoh</u>

1. Misal S himpunan bilangan cacah, T himpunan bilangan asli.

   Maka $f : S \longrightarrow T$ dengan $f(s) = s+1$ adalah pemetaan injectif.

2. Misal S dan T adalah himpunan bilangan bulat, maka $f : S \longrightarrow T$ yang ditentukan oleh :

   $n \longrightarrow f(n) = 0$, jika n ganjil.

   $n \longrightarrow f(n) = \frac{n}{2}$, jika n genap.

   maka f adalah Surjectif.

3. Misal S adalah himpunan bilangan asli dan T himpunan bilangan genap positif, maka $f : S \longrightarrow T$ yang ditentukan oleh $f : n \longrightarrow f(n) = 2n$, maka f adalah bijectif.

II.1.3. Bilangan Bulat

Definisi II.1.3.1.

$(b \neq 0) \in Z$ disebut pembagi dari a, jika $a = bm$ untuk suatu $m \in Z$. Selanjutnya akan dinotasikan $b \mid a$, dan jika b bukan pembagi a dinotasika $b \nmid a$.

Contoh

Misal $a = 6$, $b = 3$, maka $3 \mid 6$ dan $6 \nmid 3$

$a = 8$, $b = 2$, maka $2 \mid 8$ dan $8 \nmid 2$

Definisi II.1. 3.2.

Misal $n > 0$ merupakan bilangan bulat, maka didefinisikan $a \equiv b \bmod n$ jika $n \mid (a-b)$ atau $a = b + kn$ untuk suatu bilangan bulat k.

Contoh

$73 \equiv 4 \bmod 23$

$21 \equiv -9 \bmod 10$

Lemma III.1.3.1.

Jika $a \equiv b \bmod n$, $c \equiv d \bmod n$, maka $a + c \equiv (b + d) \bmod n$, dan $a.c \equiv (b.d) \bmod n$

Contoh

$9 \equiv 4 \bmod 5$, dan $11 \equiv 1 \bmod. 5$,

Maka :

$99 \equiv 4 \bmod. 5.$

$20 \equiv 5 \bmod. 5.$

II.2. TEORI GROUP.

II.2.1. Pengertian

Definisi II.2.1.1.

Suatu group ialah suatu himpunan G yang terdiri atas elemen yang tidak didefinisikan beserta suatu hukum komposisi, yang disajikan dengan tanda pergandaan dan yang memenuhi axioma-axioma :

1. $(\forall\ a, b \in G)\ (\exists!\ c \in G).a.b = c$
2. $(\forall\ a, b, c \in G).(a.b).c = a.(b.c)$
3. $(\exists\ e \in G)\ (\forall\ a \in G).\ a.e = e.a = a$
4. $(\forall\ a \in G)\ (\exists\ a^{-1} \in G).a.a^{-1} = a^{-1}.a = e.$

Ke empat sifat tersebut diatas disebut aksioma - aksioma dari group.

Selanjutnya apabila masih dipenuhi aksioma

5. $(\forall\ a, b \in G)\ a.b = b.a$

Maka groupnya disebut group komutatif atau group Abelian.

Definisi diatas komposisinya disajikan sebagai pergandaan. Dan groupnya disebut group multiplikatif. Apabila komposisinya disajikan sebagai jumlahan, maka groupnya disebut group Additif atau group jumlahan.

Contoh

1. Himpunan bilangan bulat $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ merupakan group terhadap jumlahan, tetapi

bukan merupakan group terhadap per - gandaan.

2. Himpunan bilangan Rasional Q merupakan group terhadapjumlahan.
3. Himpunan bilangan Riil, setelah o dikeluarkan merupakan group multiplikatif.
4. Himpunan bilangan bulat modulo 5 = I_5 = $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ merupakan group terhadap jumlahan dan setelah $\bar{0}$ dikeluarkan, merupakan group multiplikatif.

Dari contoh - contoh diatas, maka contoh 1, 2, 3 banyaknya anggota dari G adalah tak terhingga, dan groupnya disebut group tak terhingga. Sedangkan contoh 4, banyaknya anggota adalah berhingga, dan groupnya disebut group berhingga.

Definisi II.2.1.2.

Order dari suatu group berhingga G ialah banyaknya anggota G, dan dinotasikan o (G)

Contoh

G himpunan bilangan bulat modulo 5, dengan $\bar{0}$ dikeluarkan merupakan group multiplikatif.

G = $\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$, maka order dari group G adalah 4

Definisi II.2.1.3.

Jika G group berhingga dan $a \in G$, maka order dari a adalah bilangan bulat positif terkecil m, sedemikian sehingga $a^m = e$

Contoh

$G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, maka ordernya $\bar{2}$ adalah 4

II.2.2. Systim pembentuk group Siklik

Definisi II.2.2.1.

Misal G group dan $\exists\, a \in G$ sedemikian sedemikian sehingga $G = \{a^i \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ maka G disebut group siklik. Selanjutnya jika G berorder n, maka : $G = \{a^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Dimana : $a^0 = a^n = e$, $a^i . a^j = a^{i+j}$, jika $i + j < n$ dan $a^i . a^j = a^{i+j-n}$, jika $i+j \geq n$

Contoh

$G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah group siklik.

Ada dua macam group siklik, yaitu group siklik berhingga dan group siklik tak berhingga.

Perhatikan bahwa apabila suatu group siklik dibangun oleh a (dinotasikan(a)) berorder n, maka $a^k = e$ bhb k merupakan kelipatan n. Hal ini memang demikian, sebab apabila k kelipatan n, umpama $k = m.n$, maka : $a^k = a^{m.n} = (a^n)^m = e$.

Theorema II.2.2.1.

Jika untuk suatu group abelian G terdapat suatu elemen a yang mempunyai order sama dengan ordernya G, maka G siklik.

II.2.3. Sub Group

Definisi II.2.3.1.

H himpunan bagian dari G disebut sub group dari G bhb terhadap hukum komposisi yang sama dengan hukum komposisinya G, H merupakan group.

Lemma II.2.3.1.

Jika $H \subset G$, maka syarat perlu dan cukup agar supaya H merupakan sub group G adalah :

1. $a, b \in H \Longrightarrow a.b \in H$
2. $a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$

Contoh

1. Himpunan bilangan bulat adalah sub - group dari himpunan bilangan Rasional.
2. Himpunan bilangan Riil merupakan sub - group dari himpunan bilangan komplex.

Theorema II.3.1.

Jika G adalah group berhingga dan H adalah sub group dari G, maka $o(H) \mid o(G)$.

Akibat II.3.1.

Jika G group berhingga dan $a \in G$, maka :

1. $o(a) \mid o(G)$
2. $a^{o(G)} = e$

Contoh

Misal G adalah himpunan bilangan bulat modulo 5, dan H adalah sub group dari G.

Jadi $G = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ dan $H = \{\bar{1}\}$ atau

$H = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

Jelas bahwa $1 \mid 4$ dan $4 \mid 4$

II.2.4. Konjugasi

Definisi II.2.4.1.

Jika $a,b \in G$, maka b dikatakan merupakan konjugat dari $a \in G$, jika terdapat elemen $c \in G$ sedemikian sehingga $b = c^{-1}.a.c$

Contoh

Misal $G = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

$$\begin{aligned} \text{Maka} \quad \bar{4} &= (\bar{2})^{-1}.\bar{4}.\bar{2} \\ &= \bar{3}.\bar{4}.\bar{2} \\ &= \overline{24} \\ &= \bar{4} \end{aligned}$$

Jadi $\bar{4}$ konjugat dengan $\bar{4}$

Perhatikan bahwa Relasi Konjugasi merupakan relasi equivalen.

Jika $C(a) = \{x \in G \mid a \sim x\}$ merupakan klas equivalen a dari G (Biasanya dikatakan klas konjugat dari a dalam G), dan dimisalkan bahwa C(a) mempunyai Ca elemen , Maka $o(G) = \sum_{a \in G} Ca$

Definisi II.4.2.

Jika $a \in G$, maka $N(a)$ disebut Normalizer dari a dalam G.

$N(a) = \{ x \in G \mid xa = ax \}$

Definisi II.4.3.

Jika G adalah group, maka Z Sentralizer dari G didefinisikan $Z = \{ x \in G \mid xa = ax, \forall a \in G \}$

Lemma II.4.1.

Jika G group, maka :

1. $N(a)$ adalah sub group dari G.
2. Z adalah sub group dari G.
3. Z adalah sub group dari $N(a)$.

Theorema II.4.1.

Jika G adalah group berhingga, maka

$Ca = \frac{o(G)}{o(N(a))}$

dengan perkataan lain : Banyaknya elemen yang konjugat dengan a dalam G sama dengan index normatizer dari a didalam G.

Lemma II.4.2.

$a \in Z$ bhb $N(a) = G$ dan jika G berhingga, maka $a \in Z$ bhb $o(N(a)) = o(G)$.

Perhatikan sekarang suatu group berhingga G

Banyaknya elemen - elemen dalam kelas konjugat yang memuat a, (jadi himpunan semua elemen -elemen yang konjugat dengan a)disajikan dengan Ca. Dan perhatikan juga - bahwa elemen - elemen dalam Z, menentukan kelas - kelas yang terdiri atas satu elemen saja, sebab elemen - elemen itu komutatif dengan setiap elemen dari G.

Apabila order dari G disajikan dengan o(G), maka didapatkan :

$$o(G) = o(Z) + Ca_1 + Ca_2 + \dots + Ca_n.$$

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a \notin Z} Ca$$

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a \notin Z} \frac{o(G).}{o(N(a)).}$$

II.3. TEORI RING, IDIAL DAN FIELD.

II.3.1. Pengertian

Definisi II.3.1.1.

Suatu Ring ialah suatu himpunan R yang tidak kosong, beserta dua hukum komposisi yang disajikan dengan tanda jumlahan dan pergandaan, dan yang memenuhi aksioma-aksioma :

1. $(\forall a,b \in R)(\exists! c \in R)\quad a + b = c$
2. $(\forall a,b,c \in R)\ (a + b) + c = a+(b+c).$
3. $(\exists o \in R)(\forall a \in R).o+a = a + o$
4. $(\forall a \in R)(\exists(-a) \in R).a+(-a)=(-a)+a=0$
5. $(\forall a,b \in R).a+b = b+a$
6. $(\forall a,b \in R)(\exists! c \in R)\ a.b = c$
7. $(\forall a,b,c \in R)\ (a.b).c = a.(b.c).$

8. $(\forall a,b,c \in R).a.(b+c) = a.b + a.c$ dan $(b+c).a = b.a + c.a$

Selanjutnya jika masih dipenuhi aksioma :

9. $(\exists e \in R)(\forall a \in R).a.e = e.a = a$, maka R disebut suatu Ring dengan elemen satuan.

Demikian pula jika aksioma R masih dipenuhi aksioma :

10. $(\forall a,b \in R).a.b = b.a.$, maka R disebut suatu Ring komutatif.

Contoh

1. Himpunan bilangan Riil terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
2. Himpunan bilangan komplex terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
3. Himpunan bilangan bulat, terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik merupakan Ring komutatif dengan elemen satuan.
4. Himpunan bilangan bulat modulo n, terhadap jumlahan dan pergandaan modulo n, merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

II.3.2. Klasifikasi Ring

Definisi II.3.2.1.

Jika R adalah Ring komutatif, maka $a \in R$

dikatakan merupakan pembagi nol, jika $\exists\, b \in R$, $b \neq 0$, sedemikian sehingga $a.b = 0$.

Definisi II.3.2.2.

Suatu pembagi nol $a \in R$ disebut pembagi nol sejati bhb $(a \neq 0) \in R$ dapat ditemukan $(b \neq 0) \in R$, sedemikian sehingga $a.b = 0$.

Contoh

$R = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6.

$\bar{3} \neq 0$ dan $\bar{4} \neq 0$, tetapi $\bar{3}.\bar{4} = \overline{12} = \bar{0}$.

maka $\bar{3}$ dan $\bar{4}$ disebut pembagi nol sejati.

Definisi II.3.2.3.

Suatu Ring komutatif R disebut daerah integral jika Ring tersebut tidak memuat pembagi nol sejati.

Contoh

Himpunan bilangan bulat $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ merupakan daerah integral.

Definisi II.3.2.4.

Suatu Ring R disebut ring pembagi, jika $R - \{0\}$ merupakan group pergandaan.

Contoh

1. R himpunan semua bilangan rasional terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik biasa merupakan ring pembagi.

2. Himpunan semua bilangan riil R terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik biasa merupakan ring pembagi.
3. Himpunan semua bilangan Komplek terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik biasa merupakan ring pembagi.
4. Himpunan semua bilangan bulat modulo 7, $I_7 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6} \}$. terhadap jumlahan dan pergandaan modulo 7 merupakan ring-pembagi.
5. Himpunan semua bilangan bulat modulo 5, $I_5 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$ .terhadap jumlahan dan pergandaan modulo 5 merupakan ring pembagi.

<u>Definisi II.3.2.5.</u>

Suatu ring pembagi yang komutatif di - sebut field.

<u>Contoh.</u>

1. Himpunan semua bilangan riil R terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik biasa-merupakan field.
2. Himpunan semua bilangan bulat modulo 7 terhadap jumlahan dan pergandaan modulo7 merupakan field.

Perhatikan bahwa berdasarkan definisi diatas suatu ring pembagi adalah sistem yang lebih umum daripada field.

Setiap field pasti merupakan ring pembagi. Jelas juga bahwa suatu field menyatukan dirinya dalam dua group,yaitu group terhadap jumlahan dan pergandaan yang keduanya abelian.Sedangkan ring pembagi menyatukan dirinya dalam dua group ,yaitu group abelian terhadap jumlahan dan group terhadap pergandaan yang tidak disyaratkan abelian.

Lemma II.3.2.1.

I_p yaitu himpunan bilangan bulat modulo p, merupakan field bhb p priem.

Contoh.

$I_7 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$, merupakan field.

$I_5 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\}$,merupakan field

Lemma II.3.2.2.

Jika D ring pembagi, N(a) Normalizer dari $a \in D$ dan Z adalah zentralizer dari D, maka :

1. Z adalah sub ring pembagi D yang komutatif dan Z merupakan field.
2. N(a) adalah subring pembagi dari D.
3. Z adalah sub ring pembagi dari D.
4. $a \in Z$ bhb $N(a) = D$.

Contoh.

$D = I_7 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

Dalam hal ini $Z = N(a) = D$

Jadi $Z \subseteq N(a) \subseteq D$.

II.3.3. Karakteristik

Definisi II.3.3.1.

Misalkan R suatu Ring, apabila dapat ditemukan bilangan bulat positif n, sedemikian sehingga n a = 0 untuk setiap $a \in R$, maka n terkecil dengan sifat demikian merupakan karakteristik dari R.

Juga dikatakan bahwa R mempunyai karakteristik positif. Apabila bilangan bulat positif demikian tidak ada, maka terminologi tidaklah seragam. Ada yang mengatakan bahwa R mempunyai karakteristik 0, ada yang mengatakan bahwa R mempunyai karakteristik ∞ dan ada pula yang mengatakan bahwa R tidak mempunyai karakteristik.

Contoh

1. Misal $R = I_5 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ maka bilangan 5 mempunyai sifat $5.\bar{a} = 0$ untuk setiap $\bar{a} \in R$.

   Bilangan 10, 15 dan seterusnya punya sifat ini, tetapi 5 adalah yang terkecil. Maka 5 adalah karakteristik dari R.

Lemma II.3.3.1.

Apabila Ring R mempunyai elemen satuan e, ada bilangan bulat positif terkecil dengan sifat bahwa n.e = 0, maka n pastilah merupakan karakteristik dari R.

Demikian pula jika R mempunyai elemen satu adalah : $\{0, e, 2e, 3e, \ldots\ldots, (n-1)e\}$ yang - semuanya berbeda.

Contoh

$R = I_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

elemen satuannya adalah $\bar{1}$, sedangkan $\bar{5}.\bar{1} = \bar{5} = \bar{0}$.

maka karakteristik R adalah 5.

II.3.4. Sub Ring dan Idial

Definisi II.3.4.1.

R' adalah sub ring dari R, jika R' terhadap hukum komposisinya R, merupakan - Ring

Lemma II.3.4.1.

Syarat perlu dan cukup agar R' me - rupakan sub ring R ialah, untuk setiap $a, b \in R'$, maka :

1. $a, b \in R' \Longrightarrow a - b \in R'$.
2. $a, b \in R' \Longrightarrow a.b \in R'$.

Contoh

1. Misal $R = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, maka $R' = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ adalah merupakan sub ring dari R terhadap penjumlahan dan pergandaan aritma - tik biasa.

Definisi II.3.4.2.

Suatu himpunan bagian M yang tidak kosong dari R, disebut idial bhb dipenuhi:

1. ($\forall a,b \in M$). $a,b \in M \Rightarrow a - b \in M$.
2. ($\forall a \in M$) ($\forall r \in R$). $a.r$ & $r.a \in M$.

<u>Contoh</u>

1. Himpunan bagian dari R yang terdiri - atas elemen O saja, yaitu $\{0\}$ merupakan idial.

   Idial ini disebut idial nol.
2. R sendiri juga merupakan idial dari R.

   Idial ini disebut idial satuan.

<u>Definisi II.3.4.3.</u>

Suatu idial yang dapat dihasilkan - oleh satu elemen saja disebut idial pokok.

<u>Contoh</u>

Himpunan Ra yang terdiri atas semua elemen - elemen kelipatan r dengan a ter - tentu, sedangkan r menjelajahi R, maka Ra merupakan idial pokok.

<u>Definisi II.3.4.4.</u>

Suatu idial M didalam Ring R disebut Maximal bhb M tidak termuat dalam suatu idial lainnya selain M sendiri dan R.

<u>Lemma II.3.4.2.</u>

Idial yang dibangun oleh bilangan prime adalah idial Maximal.

<u>Contoh</u>

Jika R adalah Ring bilangan bulat.

maka $R.2 = (2) = \{ r.2 \mid r \in R \}$ adalah idial

Maximal.

Definisi II.3.4.5.

Jika R suatu Ring dan N idial dari R, maka:

$R/N = \{ a + N \mid a \in R \}$ disebut residu klas - ring.

Lemma II.3.4.3.

Jika R suatu Ring komutatif dengan elemen satuan, maka N adalah idial Maximal bhb R/N field.

Contoh

Misal R himpunan bilangan bulat dan N =(2) $= \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \}$

Maka $R/N = \{ \bar{0}, \bar{1} \}$ merupakan field

II.3.5. Homomorfisma.

Definisi II.3.5.1

Pemetaan f dari Ring R ke R' dikatakan homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in R$,

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
2. $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.

Contoh

Misal $f : x \longrightarrow f(x) = 0 \in R'$, $\forall x \in R$.

Maka f merupakan homomorfisma, sebab :

$f(x) = 0$.

$f(y) = 0$.

$f(x + y) = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y)$.

$f(x.y) = 0 = 0.0 = f(x).f(y)$.

Jadi f merupakan homomorfisma.

Definisi II.3.5.2.

Jika f suatu homomorfisma dari R ke R' , maka :

Ker f = $\{ x \in R \mid f(x) = 0 \}$.

Definisi II.3.5.3.

Suatu homomorfisma f dari R ke R' dikatakan isomorfisma, jika f merupakan pemetaan yang bijektif. Sedangkan Ring R dan R' dikatakan isomorphik.

Lemma II.3.5.1.

Homomorfisma f dari R ke R' adalah isomorfisma bhb ker f = $\{0.\}$

Lemma II.3.5.2.

Jika f homomorfisma, f : R $\longrightarrow$ R' , maka ker f merupakan idial dari R.

Contoh

Misal R = $\{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \}$ dan R' = $\{ 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \}$

Jika f : x $\longrightarrow$ f (x) = 2x $\in$ R', $\forall$ x $\in$ R.

Maka ker f = $\{0\}$ dan $\{0\}$ adalah idial dari R.

Theorema II.3.5.1.

Jika R dan R' merupakan Ring dan f homomorfisma dari R onto R' dan ker f = U, maka R' isomorfik dengan R/U.

Contoh

Misal $R = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dan N ada - lah idial dari R yang dihasilkan oleh bilangan 5. $N = \{5.a \mid a \in R.\}$

Misalkan $R' = I_5$ yaitu himpunan bilangan - bulat modulo 5. Jadi $R' = I_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

Dan didefinisikan f,

$$f : a \longrightarrow f(a) = a + N \in R' \quad \text{untuk}$$

setiap $a \in R$

Maka $\ker f = N$.

Dan $Z/\ker(f) = Z/N \cong R' = I_5$

II.3.6. Polynomial

Definisi II.3.6.

Misal F suatu field.

Suatu polynomial atas field F adalah suatu fungsi f dari F ke dirinya sendiri, sedemikian sehingga terdapat $a_1, a_2, \ldots a_n \in F$ sehingga :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n.$$

Selanjutnya $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in F$ disebut koefisien dari polynomial. Bila n adalah bilangan bulat tertinggi sede - mikian sehingga $a_n \neq 0$, maka n disebut derajat (degree) dari f (t) dan a_n disebut koefisien suku tertinggi (koefisien pemimpin), sedangkan a_0 adalah suku konstant - dari f (t).

polynomial $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

dapat juga ditulis

$f(t) = a_o + a_1 t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + ot^{n+1} + \dots$

Jika koefisien pemimpin dari f (t) adalah 1, maka f (t) disebut monic polynomial. Sedangkan yang disebut polynomial nol adalah suatu polynomial yang semua koefisiennya nol.

Menurut definisi derajat, polynomial nol tidak mempunyai derajat. Polynomial dengan derajat 1 disebut polynomial linier.

Contoh

$f(t) = 1 - 2t + 5t^2 + 11t^4$ merupakan polynomial atas F dalam t berderajat 4 dengan koefisien pemimpin 11 dan suku konstant 1.

Definisi II.3.6.2.

Misal $f(t) = a_o + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n$ dan $g(t) = b_o + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m$ adalah polynomial atas F, misal $n > m$, f (t) + g (t) yaitu jumlah dari f (t) dan g (t) dan didefinisikan : $f(t) + g(t) = (a_o + b_o) + (a_1+b_1)t + \dots + (a_m + b_m)t^m + \dots + (a_n + 0)t^n$.

Contoh

Misal F suatu field

$f(t) = 2 + 4t - 7t^2 + t^3$ dan

$g(t) = 5 - 3t + 8t^5$

maka $f(t) + g(t) = (2 + 5) + (4 - 3)t$
$+ (-7+0)t^2 + (1+0)t^3$
$+ (0+8)t^5$

Definisi II.3.6.3.

Bila $c \in F$, maka $c.f(t)$ didifinisikan :

$c.f(t) = ca_0 + ca_1 t + ca_2 t^2 + \ldots + ca_n t^n$

Contoh.

Misal F suatu field

Bila $c = 5 \in F$ dan $f(t) = 2 + 4t - 7t^2 + 2t^3$, maka $c.f(t) = 10 + 20t - 35t^2 + 10t^3$

Definisi II.3.6.4.

Misal F suatu field

$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ dan

$g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$

adalah polynomial atas F.

$f(t).g(t)$ didifinisikan :

$$f(t).g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \ldots + (a_n b_m)t^{n+m}.$$

Theorema II.3.6.1.

Jika $f(t)$ dan $g(t)$ adalah polynomial dengan koefisien dalam field F, maka $\deg (f(t).g(t)) = \deg f(t) + \deg g(t)$.

Contoh

Misal $f(t) = 1 + t - 2t^2$

dan $g(t) = 2 + 4t - t^2 + t^3$ adalah polynomial atas F.

Maka : $f(t).g(t) = 2 + 6t - t^2 - 8t^3 - 3t^4 - 2t^5$.

Terlihat bahwa, $\deg (f(t).g(t)) = \deg f(t) + \deg g(t)$.

Lemma II.3.6.1.

Jika $f(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$

dan $g(t) = b_o + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$

maka $f(t) = g(t)$ bhb $m = n$ dan $ai = bi$, $\forall i$.

Theorema II.3.6.2.

Misal R suatu Ring komutatif dengam elemen satuan maka himpunan semua polyno - mial - polynomial atas R merupakan Ring komutatif dengan elemen satuan.

Atau jika R suatu ring komutatif dengan - elemen satuan, maka R [t] adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Definisi II.3.6.5.

Misal f(t) suatu polunomial atas field F, dan λ skalar.

Jika $f(\lambda) = 0$, maka λ disebut akar dari

f(t).

Contoh

$f(t) = 5 - 2t + 3t^2 - 6t^3 - t^4 + t^5$, suatu polynomial atas field bilangan riil, maka 1 adalah akar dari f(t).

Sebab $f(1) = 0$

Theorema II.3.6.3.

Jika f(t) suatu polynomial dengan - koefisien bilangan komplex C berderajat lebih besar dari 1 , maka f(t) punya suatu -

<u>Contoh</u>

$f(t) = t^2 - 2t + 2$, maka :

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$= 1 \pm i.$$

Jadi akar dari $f(t)$ adalah $1 + i$ dan $1 - i$, semuanya dalam C.

II.3.7. <u>Algeritma Euclid</u>

Berdasarkan definisi - definisi dan operasi - operasi polynomial yang telah dibahas sebelumnya, maka pada bagian ini akan diberikan sifat - sifat baku lain dari polynomial, yaitu Ageritma Euclid.

<u>Theorema II.3.7.1.</u>

Jika $f(t)$, $g(t)$ polynomial - polynomial - atas field F , yaitu polynomial - polynomial dalam $F(t)$ dan deg $g(t) \geq 0$. Maka terdapatlah dengan tunggal polynomial $q(t)$, $r(t)$ dalam $F(t)$, sedemikian sehingga :

$f(t) = q(t).g(t) + r(t)$, dimana $r(t) = 0$ atau deg.$r(t) <$ deg.$g(t)$.

<u>Akibat II.3.7.1.</u>

Jika $f(t)$ bukan polynomial nol dalam $F(t)$. Dan $\lambda \in F$, sedemikian sehingga $f(\lambda) = 0$. Maka terdapatlah polynomial $q(t)$ dalam $F(t)$ sedemikian sehingga $f(t) = (t-\lambda).q(t)$, dimana deg $q(t)$ = deg $f(t) - 1$.

Akibat II.3.7.2.

Jika $f(t) \in F(t)$ dan deg $f(t) = n$, maka $f(t)$ paling banyak mempunyai n buah akar.

Contoh

Jika $f(t) = t^3 - 1$ dan $q(t) = t-1$

Tulislah $f(t) = q(t).g(t) + r(t)$ dengan deg $r(t) < \deg g(t)$.

Penyelesaian :

$$f(t) = a_n\ b_m^{-1}\ t^{n-m}\ g(t) + f_1(t)$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t) - a_n\ b_m^{-1}\ t^{n-m}\ g(t) \\ &= t^{3-1} - 1.1.t^{3-1}(t-1) \\ &= t^3 - t^3 + t^2 - 1 \\ &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

deg $f_1(t) > \deg g(t)$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= t^2 - 1 - 1.1.t^{2-1}\ (t-1) \\ &= t^2 - t^2 + t - 1 \\ &= t - 1 \end{aligned}$$

deg $f_2(t) = \deg g(t)$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= t - 1 - 1(t-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

deg.$f_3(t) < \deg g(t)$

sehingga didapat $q(t) = t$, $q_2(t) = 1$,

maka :

$$\begin{aligned} f\ (t) &= (\ a_n\ b_m^{-1}\ t^{n-m} + q_1(t) + q_2(t))g(t) \\ &= (\ t^2 + t + 1\ )\ (\ t - 1\ ) \end{aligned}$$

Jadi $t^3 - 1 = (\ t^2 + t + 1\ )\ (\ t - 1\ )$

II.3.8. Faktorisasi Tunggal

Definisi II.3.8.1.

Suatu polynomial $p(t) \in F(t)$ disebut irreducible atas field F, jika $p(t) = f(t).g(t)$, dengan $f(t), g(t) \in F(t)$, maka $\deg f(t) = 0$ atau $\deg g(t) = 0$.

Contoh

$p(t) = t^2 + 1$, adalah suatu polynomial irreducible atas field bilangan riil, tetapi reducible atas field bilangan komplex.

Theorema II.3.8.1.

Jika $f(t) \in F(t)$, dengan $\deg f(t) \geqslant 1$, maka $f(t)$ mempunyai faktorisasi tunggal, yaitu :

$f(t) = c.p_1(t).p_2(t) \ldots p_s(t)$, dengan $p_1(t), p_2(t), \ldots p_s(t)$ polynomial irreducible dan c adalah konstanta $\neq 0$.

Akibat II.3.8.1.

Jika $f(t) = t^n - 1 \in C(t)$, maka $f(t)$ mempunyai faktorisasi :

$f(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2) \ldots (t-\alpha_n)$, dengan

$\alpha_i \in C$

$= \prod(t-\alpha_i)$

$\alpha_i \in C$

Contoh

1. $f(t) = t^2 - 1 \in C(t)$

maka $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$

2. $f(t) = t^3 - 1 \in C(t)$

maka $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$

$= (t-1)(t-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i))$

$(t-(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i))$.

Definisi II.3.8.2.

Misal $f(t), g(t) \in F(t)$ polynomial $\neq 0$, $g(t)$ disebut pembagi dari $f(t)$, ditulis $g(t) \mid f(t)$, jika $\exists\, q(t) \in F(t)$, sedemikian sehingga $f(t) = q(t).g(t)$.

Contoh

$f(t) = t^3 - 1$ dan $g(t) = t - 1$,

maka terdapat $q(t) = t^2 + t + 1$

sehingga $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$

jadi $(t-1) \mid (t^3-1)$

Definisi II.3.8.3.

Jika $p(t)$ irreducible dan $f(t) = p^m(t)\,g(t)$. Dimana suatu polynomial $p(t)$ bukan pembagi $g(t)$ dan m bilangan bulat $\geqslant 0$, maka m disebut multiplisitas dari $p(t)$, dan didefinisikan $p^0(t) = 1$.

Jika α akar dari $f(t)$, dan $f(t) = (t-\alpha)^m g(t)$. dengan $t-\alpha$ bukan pembagi dari $g(t)$, maka m disebut multiplisitas dari $t-\alpha$ dalam $f(t)$. Dapat juga dikatakan bahwa m adalah multiplisitas dari α didalam $f(t)$.

Theorema II.3.8.2.

Misal λ akar dari $f(t)$ dan deg $f(t) \geqslant 1$.

Multiplisitas λ dalam $f(t) > 1$ bhb $f^1(\lambda)=0$.

Contoh

Misal $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$ adalah polynomial dalam $C(t)$.

1 adalah akar dari $f(t)$, sebab :

$f(1) = 1^3-1^2-1+1 = 0.$

$f^1(t) = 3t^2 - 2t - 1$

$f^1(1) = 3.1^2 - 2.1 - 1$

$f^1(1) = 0$

Maka 1 yaitu salah satu akar dari $f(t)$ - mempunyai multiplisitas > 1.

(-1) adalah akar dari $f(t)$, sebab $f(-1) = 0$

$f^1(t) = 3t^2 - 2t - 1$

$f^1(t) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1$

$f^1(t) = 4 \neq 0.$

Jadi (-1) mempunyai multiplisitas tidak - lebih dari satu.

Definisi II.3.8.4.

Misal $J(t) \in F(t)$

$J(t)$ disebut idial dari $F(t)$ jika memenuhi sifat - sifat sebagai berikut :

1. $0 \in J(t)$
2. Jika $f(t), g(t) \in J(t)$, maka $f(t) + g(t) \in J(t)$.
3. Jika $f(t) \in J(t)$ dan $r(t) \in F(t)$, maka $r(t) . f(t) = f(t) . r(t) \in J(t)$.

Contoh

Himpunan yang terdiri dari 0 saja yaitu $\{0\}$ merupakan idial. Demikian juga F(t) sendiri juga merupakan idial, yaitu idial yang dibentuk oleh 1 , yang disebut idial Unit.

Theorema II.3.8.2.

Jika p(t) suatu polynomial irrecducible, maka idial yang dibentuk oleh p(t) merupakan idial maximal.

Contoh

Misal $p(t) = t^2 + 1 \in Q(t)$, dimana Q adalah field dari bilangan Rasional.

Maka $[(t^2+1)] = \{q(t).(t^2+1) \mid q(t) \in Q(t)\}$ merupakan suatu idial maximal.

II.4. RUANG VEKTOR.

II.4.1. Pengertian Ruang Vektor

Suatu ruang vektor V atas field K adalah himpunan obyek - obyek dimana berlaku operasi " jumlahan " terhadap elemen - elemen V dengan elemen - elemen K (disebut perkalian skalar), dan V memenuhi aksioma aksioma :

1. V merupaka group abelian terhadap jumlahan.
2. ($\forall x,y \in V$) dan ($\forall \alpha, \beta \in K$), berlaku:
   a. $\alpha(x+y) = \alpha.x + \alpha y$.
   b. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

c. $(\alpha.\beta)x = \alpha(\beta x)$.

d. $1.x = x$, dimana 1 adalah elemen satuan dari K.

Untuk selanjutnya elemen - elemen dari V disebut vektor dan elemen - elemen dari K disebut skalar.

Contoh

1. V = Himpunan semua pasangan berurutan dari bilangan riil terhadap aturan komposisi :

   $(a_1,a_2) + (b_1,b_2) \stackrel{def}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2)$.

   $r(a_1,a_2) \stackrel{def}{=} (ra_1, ra_2)$, dengan $r \in R$.

   Maka V merupakan ruang vektor atas field R

2. V = Himpunan semua fungsi riil f : $R \longrightarrow R$ dengan aturan komposisi sebagai berikut :

   $(f+g)\ (x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x)$.

   $(k.f)\ (x) \stackrel{def}{=} k.(f(x))$.

   Maka V merupakan ruang vektor atas field R.

Perhatikan bahwa, jika F suatu field yang memuat field K, maka F dapat dipandang sebagai Ruang Vektor atas field K, sebab :

1. F field, maka jelas merupakan group abelian terhadap jumlahan.

2. $(\forall x,y \in F)$ dan $(\forall \alpha,\beta \in K)$, karena $K \subset F$, maka jika $\alpha,\beta \in K$ pasti $\alpha,\beta \in F$.

Sekarang dapat dipandang $x, y, \alpha, \beta \in F$, maka :

a. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ } sifat distributif field.

b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

c. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, sifat assosiatif terhadap pergandaan field.

d. $1.x = x$, karena field punya elemen satuan.

Contoh

R adalah field bilangan Riil dan C adalah field bilangan komplex.
Karena $R \subset C$, maka C dapat dipandang seba - gai ruang vektor atas field R.

Suatu ruang bagian dari ruang vektor V ada lah himpunan bagian W yang tidak kosong da ri V, sedemikian sehingga untuk setiap x_1, $x_2 \in W$ dan skalar α, β didapatkan $\alpha x_1 + \beta x_2 \in W$.
Dengan demikian W sendiri merupakan ruang-vektor dengan hukum komposisi yang sama de ngan hukum komposisi ruang vektor V.
Ruang bagian khusus dari V yaitu $W = V$ di- sebut ruang bagian tak sejati. Ruang ba - gian yang lain dari V yang $\neq 0$ disebut ru- ang bagian sejati.

Suatu kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots v_n$ dari ruang vektor V adalah persamaan berbentuk :

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ldots + \alpha_n v_n$ diman $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$

skalar.

Selanjutnya jika ($\forall w \in W$) ($\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) sedemikian sehingga $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_n + \ldots + \alpha_n v_n$, maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ disebut pembentuk dari w.

II.4.2. Basis dan Dimensi Ruang Vektor

Definisi II.4.2.1.

Misal V ruang vektor atas field K dan $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$. himpunan vektor - vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ disebut tak bebas linier, jika terdapat skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ yang tidak semuanya = 0, sehingga dipenuhi :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Jika tidak demikian maka himpunan vektor - vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan bebas linier, yaitu jika $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, mengakibatkan :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0.$$

Contoh

1. Tiga vektor (1,-3,-4), (2,-1,-3) dan (-8,9,17) dan R^3 adalah tak bebas linier.
2. Dua vektor di R^2, yaitu (0,1) dan (1,0) adalah bebas linier.
3. Suatu vektor $v \neq 0$, adalah bebas linier, karena $\alpha v = 0$ didapat bila $\alpha = 0$.
4. Vektor $v = 0$ adalah tak bebas linier,

karena $\alpha.v = 0$ untuk setiap α.

Definisi II.4.2.2.

Misal V ruang vektor atas field K.

Bila $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dimana

$\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ bebas linier, maka

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ disebut basis dari ruang vektor V.

Atau dengan kata lain : Basis dari ruang vektor V adalah sitem pembentuk dari V yang bebas linier.

Contoh

Misal $V = R^n$

Maka himpunan vektor - vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dimana :

$v_1 = (1, 0, 0, \ldots 0)$.

$v_2 = (0, 1, 0, \ldots 0)$.

$\vdots$

$v_n = (0, 0, 0, \ldots 1)$.

adalah basis dari V

Theorema II.4.2.1.

Jika $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ basis dari V maka setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai kombinasi linier dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Definisi II.4.2.3.

Misal V ruang vektor atas field K.

Jika basis dari V terdiri dari n elemen, maka dimensi ruang vektor V atas field K adalah n.

Dinotasikan $[V : K] = n$.

<u>Contoh</u>

Ruang Vektor R^n mempunyai dimensi n, sebab vektor - vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis dari R^n yang terdiri dari n elemen.