BAB III

SISTEM PERSAMAAN LINIER SIMULTAN

Untuk sistem persamaan simultan yang berbentuk linier , persamaan (1.1) dapat ditulis sebagai :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = u_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = u_n$$

Yang merupakan n persamaan linier simultan dengan n peubah yang tidak diketahui . Dengan u_i, a_{ij}=konstanta

Dengan perkalian matrik persamaan-persamaan diatas dapat ditulis sebagai :

$$AX = U$$

Dimana :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Matrik perbesarannya dapat ditulis dengan :

$$[A \mid U]$$

Atau :

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} & u_1 \\ a_{21}a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} & u_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots\ldots a_{nn} & u_n \end{array}\right]$$

Suatu bentuk sistem persamaan $AX = U$,$U \neq 0$ seperti diatas adalah bentuk sistem persamaan linier tidak homogen

, dan ada dua kemungkinan jawab , yaitu :

1. Tak mempunyai jawab

   Jika ranknya , yaitu $r(A) \neq r(A,U)$

2. Mempunyai Jawab

   a. Jawab unik (tunggal)

      jika ranknya , $r = n$

   b. Jawab banyak

      jika ranknya , $r < n$

Pada bentuk 1 dan 2b matriknya A adalah singular , yaitu harga determinannya $\det(A) = 0$ (karena matrik yang mempunyai baris atau kolom nol , maka harga det = 0) .

3.1. ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan dari metode eliminasi Gauss. ada dua cara atau strategi didalam eliminasi Gauss-Jordan yang berhubungan dengan pemilihan pivot , yaitu :

1. Strategi diagonal pivot
2. Strategi maksimal pivot

Cara kedua digunakan bila ada $a_{kk} = 0$ atau mendekati nol., sehingga dapat mengurangi kesalahan pembulatan .

3.1.1 STRATEGI DIAGONAL PIVOT

Dari persamaan (3.1.1) diatas akan dicari harga dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang sesuai . Matrik perbesarannya , yaitu [A ¦U] atau :

$$\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots\cdots a_{1n} & u_1 \\ a_{21} a_{22} \cdots\cdots a_{2n} & u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} & u_n \end{bmatrix}$$

Dan untuk menyederhanakan bentuk matrik diatas , u_i kita ganti namanya menjadi $a_{i,n+1}$ sehingga ukuran matrik adalah nx(n+1) sehingga bentuk dari matrik perbesarannya adalah :

$$\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} a_{1n+1} \\ a_{21} a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} a_{2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} a_{nn+1} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(3.1.2)$$

Setelah terbentuk matrik perbesaran (3.1.2) , elemen-elemen A akan dieliminasi , yaitu :

- Menjadikan elemen-elemen diagonal sehingga menjadi satu, yang disebut langkah normalisasi.
- Menjadikan elemen-elemen diluar diagonal menjadi nol disebut langkah reduksi .

Dan setelah langkah normalisasi dan reduksi selesai dikerjakan,akan diperoleh matrik perbesaran :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{2n+1} \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{nn+1} \end{bmatrix} \qquad (3.1.3)$$

Dimana a_{1n+1}, a_{2n+1}, ... ,a_{nn+1} adalah harga daripada x_1 , x_2 , ... , x_n yang dicari .

Algoritma yang digunakan untuk mendapatkan bentuk matrik perbesaran (3.1.3) adalah :

Harga determinan mula-mula :

$$\det = 1$$

Memperbaiki harga det :

$$\det = \det * a_{kk}$$

Langkah normalisasi :

$$a_{kj} \longleftarrow a_{kj} / a_{kk}$$

Langkah reduksi :

$$a_{ij} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}\, a_{kj}$$

$$i=1,2,\ldots\ldots.k$$

$$j=k+1,k+2,\ldots\ldots.n+1 \quad (i \neq k)$$

Dimana k=1,2,......n adalah counter pivot , maka a_{kk} adalah

elemen pivot k reduksi yang dilalui .
Harga determinan akhir yang didapat adalah harga determinan yang dicari.

Pada strategi diagonal pivot , timbul permasalahan jika elemen dari pivot kecil .
Sebagai contoh , ada persamaan :

$$0{,}0009\ X_1 + 9{,}0000\ X_2 = 8{,}0001$$

$$1{,}0000\ X_1 + 1{,}0000\ X_2 = 1{,}0000$$

Dimana sistem diatas mempunyai jawab yang benar adalah :
$X_1 = 1/9$ dan $X_2 = 8/9$
Jika persamaan tersebut diatas dikerjakan menggunakan strategi diagonal pivot , hasilnya adalah :

$$X_1 + 10.000\ X_2 = 8889$$

$$-9999\ X_2 = -8888$$

Sehingga harga $X_2 = 8888/9999$

Dengan hasil X_2 seperti diatas , maka harga X_1 tergantung dari berapa kita mengambil harga pembulatan X_2, seperti terlihat dalam tabel dibawah :

Angka dibelakang koma	X_2	X_1
3	0,889	-1,000
4	0,8889	0,0000
5	0,88889	0,10000
6	0,888889	0,110000
7	0,8888889	0,1110000

Sedang apabila persoalan diatas barisnya ditukar , sehingga bentuk persamaanya menjadi :

$$1{,}0000\ X_1 + 1{,}0000\ X_2 = 1{,}0000$$

$$0{,}0009\ X_1 + 9{,}0000\ X_2 = 8{,}0001$$

Maka hasil yang diperoleh adalah :

Angka dibelakang koma	X_2	X_1
3	0,889	0,111
4	0,8889	0,1111
5	0,88889	0,11111
6	0,888889	0,111111
7	0,8888889	0,1111111

Dari contoh diatas menunjukkan baiknya pemilihan koefisien elemen pivot dengan harga mutlak yang tertinggi.

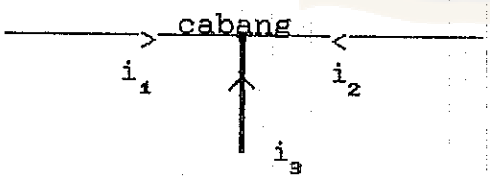
CONTOH PERMASALAHAN :

Masalah umum dalam teknik listrik adalah menetukan arus dan tegangan pada beberapa lokasi dalam rangkaian resistor yang komplek. Masalah ini diselesaikan dengan menggunakan hukum arus Kirchoff dan hukum Ohm.

Hukum arus Kirchoff mengatakan :

Jumlah aljabar dari arus pada cabang harus sama dengan nol.

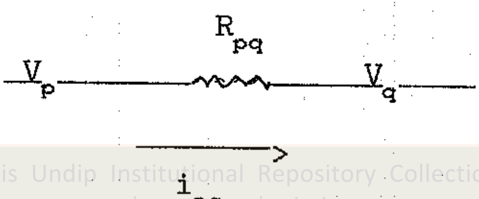
$\Sigma\ i_k = 0$



Semua arus yang masuk cabang diasumsikan bertanda positif.

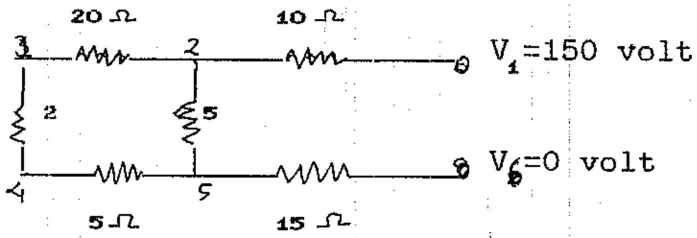
Hukum Ohm menyatakan :

Arus yang lewat sebuah resistor adalah berhubungan dengan tegangan dan nilai resistor.



$$i_{pq} = \frac{V_p - V_q}{R_{pq}}$$

Dari gambar rangkaian dibawah ini akan dicari harga-harga V_2 , V_3 , V_4 dan V_5



Dari gambar diatas dibuat bentuk persamaanya :

$$i_{12} + i_{32} + i_{52} = 0$$

$$i_{23} + i_{43} = 0$$

$$i_{34} + i_{43} = 0$$

$$i_{25} + i_{45} + i_{65} = 0$$

Dan dengan menggunakan hukum ohm didapat :

$$\frac{150 - V_2}{10} + \frac{V_3 - V_2}{20} + \frac{V_5 - V_2}{5} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_3}{20} + \frac{V_4 - V_3}{2} = 0$$

$$\frac{V_3 - V_4}{2} + \frac{V_5 - V_4}{5} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_5}{5} + \frac{V_4 - V_5}{5} + \frac{0 - V_5}{15} = 0$$

Sehingga kita mendapatkan empat persamaan linier dengan 4 anu , yaitu :

$$7V_2 - V_3 - 4V_5 = 300$$

$$V_2 - 11V_3 + 10V_4 = 0$$

$$5V_3 - 7V_4 + 2V_5 = 0$$

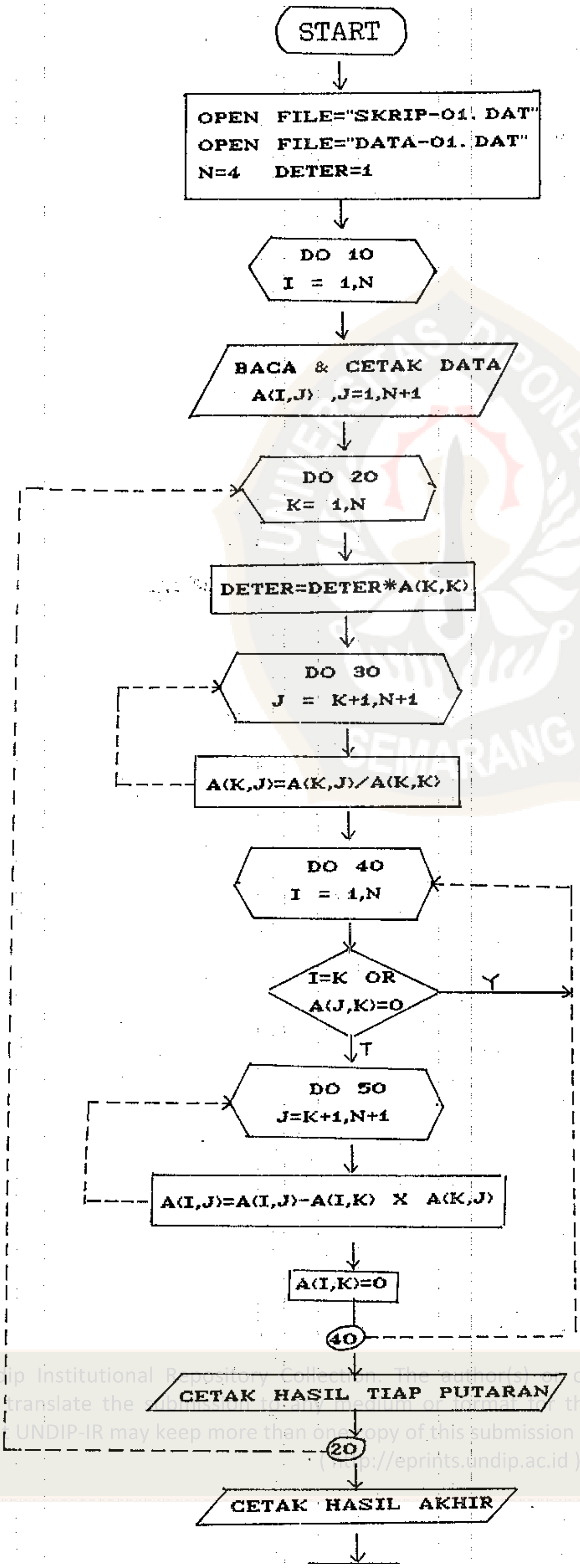
$$3V_2 + 3V_4 - 7V_5 = 0$$

Dari persamaan diatas dapat dibentuk matrik perbesarannya, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & -4 & 300 \\ 1 & -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matrik yang ada diatas dengan menggunakan metode harga-harga V_2 , V_3 , V_4 , dan V_5 .

FLOWCHARTNYA :



```
C*******PROGRAM GAUSS-JORDAN STRATEGI DIAGONAL PIVOT ***********
C
      DIMENSION A(25,25)
      OPEN (5,FILE='DATA-01.DAT')
      OPEN (6,FILE='SKRIP-01.LAP')
      N=4
      DETER=1.
      WRITE (6,5)
    5 FORMAT ('MATRIK PERBESARANNYA :'/,
     *         '======================'/)
C
C****** MULAI PENGERJAAN ********

      DO 10 I=1,N
      READ (5,200)(A(I,J),J=1,N+1)
   10 WRITE (6,200)(A(I,J),J=1,N+1)
      WRITE (6,6)
    6 FORMAT(//'HASIL PENGHITUNGAN'/
     *        '==================')
      DO 20 K = 1,N
      DETER = DETER*A(K,K)
C
C****** LANGKAH NORMALISASI *******
      DO 30 J=K+1,N+1
   30 A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
      A(K,K)=1.
      DO 40 I=1,N
      IF (I.EQ.K.OR.A(I,K).EQ.0) GOTO 40
C
C****** LANGKAH REDUKSI *******
      DO 50 J=K+1,N+1
   50 A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
      A(I,K)=0.
   40 CONTINUE
      WRITE(6,400)K
C
C****** CETAK HASIL TIAP PUTARAN ******
      DO 60 I=1,N
   60 WRITE(6,200)(A(I,J),J=1,N+1)
   20 CONTINUE
C
C****** CETAK HASIL AKHIR ******
C
      WRITE(6,300)DETER
      DO 70 I=1,N
   70 WRITE(6,500)I,A(I,N+1)
C
  100 FORMAT(I3,I3)
  200 FORMAT(5F10.5)
  300 FORMAT(//'HARGA DETERMINANNYA ADALAH  =',F10.5)
  400 FORMAT(//'PUTARAN  KE : ',I3,/)
  500 FORMAT(/'HARGA V(',I2,')=',F10.5)
      END
```


HASIL PENGELUARANNYA :

MATRIK PERBESARANNYA :
=====================

7.00000	-1.00000	0.00000	-4.00000	300.00000
1.00000	-11.00000	10.00000	0.00000	0.00000
0.00000	5.00000	-7.00000	2.00000	0.00000
3.00000	0.00000	3.00000	-7.00000	0.00000

HASIL PENGHITUNGAN
==================

PUTARAN KE : 1

1.00000	-0.14286	0.00000	-0.57143	42.85714
0.00000	-10.85714	10.00000	0.57143	-42.85714
0.00000	5.00000	-7.00000	2.00000	0.00000
0.00000	0.42857	3.00000	-5.28571	-128.57140

PUTARAN KE : 2

1.00000	0.00000	-0.13158	-0.57895	43.42105
0.00000	1.00000	-0.92105	-0.05263	3.94737
0.00000	0.00000	-2.39474	2.26316	-19.73684
0.00000	0.00000	3.39474	-5.26316	-130.26320

PUTARAN KE : 3

1.00000	0.00000	0.00000	-0.70330	44.50550
0.00000	1.00000	0.00000	-0.92308	11.53846
0.00000	0.00000	1.00000	-0.94505	8.24176
0.00000	0.00000	0.00000	-2.05495	-158.24170

PUTARAN KE : 4

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	98.66308
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	82.62027
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	81.01600
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	77.00531

HARGA DETERMINANNYA ADALAH =-374.00020

HARGA V(1)= 98.66308

HARGA V(2)= 82.62027

HARGA V(3)= 81.01600

HARGA V(4)= 77.00531

3.1.2. STRATEGI PIVOT MAKSIMUM

Didalam metode eliminasi Gauss-Jordan dengan strategi diagonal pivot pemilihan pivot untuk putaran ke k dipilih pada posisi diagonal a_{kk} , yaitu sebuah elemen didalam diagonal . Dan untuk beberapa sistem persamaan terdapat kekurangan dalam perhitungan. Hal ini terjadi apabila ada elemen $a_{kk}= 0$ ataupun berharga kecil seperti terlihat pada contoh terdahulu.

Algoritma yang digunakan pada strategi pivot maksimum adalah :

Harga determinan mula-mula :

det=1

pemilihan pivot :

$p_k = a_{rk,ck}$, $|a_{rk,ck}| = \max_{i,j} |a_{ij}|$

$i=1,2,.......n$, $i \neq r_1, r_2, ..., r_{k-1}$

$j=1,2,.......n$, $j \neq c_1, c_2, ..., c_{k-1}$

dimana :

rk = baris pada elemen pivot ke k

ck = kolom pada elemen pivot ke k

p_k= elemen pivot ke k

Memperbaiki harga determinan :

det = det * p_k

Normalisasi :

$a_{rk,j} = a_{rkj} / p_k$ $j=1,...n+1$

Reduksi :

$a_{ij} = a_{ij} - a_{i,ck} a_{rk,j}$ $j=1,....n+1$

$i=k=1,2....n$

$i \neq rk$

Disini dicari elemen pivot dengan harga yang terbesar. Pertama kali dipilih pivot ke -k yaitu p_k . Disini det adalah determinan (kemungkinan dengan tanda yang tidak benar) dari matrik koefisien. Setelah reduksi sempurna , baris n pertama dari matrik A akan berbentuk sebuah matrik identitas (meski dengan urutan yang tidak benar). Kolom ke n+1 akan berisi vektor solusi $x = [x_1,x_2,......x_n]^t$ walaupun elemen-elemen ini biasanya salah tempatnya. Solusi bisa diperoleh dengan menggunakan informasi pada vektor r dan vektor c,dimana :

$$x_{ck} = a_{rk,n+1} \qquad , k = 1,2,.... n$$

Harga determinan kemungkinan tandanya tidak benar.Dan perlu dihitung apakah jumlah baris saling tukar, supaya matrik akhir sebagai matrik identitas berjumlah genap atau ganjil.Dan masalah ini bisa diselesaikan dengan membentuk vektor pembantu j ,seperti ini :

$$j_{rk} = c_k \qquad , k = 1,2,.......,n$$

Dan kemudian dihitung jumlah pasangan saling tukar yang dibutuhkan untuk menempatkan vektor j pada baris yang lebih tinggi . Jika jumlah saling tukar adalah genap maka tanda det adalah benar, jika tidak berarti salah. Ini sesuai dengan sifat determinan.

Ilustrasi terbaik metode ini mungkin akan lebih baik jika menggunakan contoh .

Pandang sistem persamaan :

$$0 + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

Matrik perbesaran koefisien tersebut diatas adalah :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk langkah pertama dengan k=1 dari 9 elemen yang ada a_{ij}, i=1,2,3 , j=1,2,3 kita pilih elemen yang paling besar yaitu 4 pada elemen a_{31} , berarti p_1= 4 dengan r_1=1 dan c_1= 3. Setelah didapat elemen pivotnya , harga det= 4 * 1 = 4 ,dan selanjutnya dilakukan langkah normalisasi dan reduksi . Langkah normalisasi untuk k=1 menghasilkan :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah reduksi untuk k=1 menghasilkan :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & -7/2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Untuk putaran kedua hanya elemen-elemen a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32} yang mungkin menjadi elemen pivot dan karena -7/2 adalah terbesar dari keempatnya maka didapat harga p_2= -7/2 , r_2=2 , c_2=2

Harga det = 4 x -7/2 = -14

Kemudian dilakukan langkah normalisasi dan reduksi sehingga matrik menjadi :

$$\begin{bmatrix} 2/7 & 0 & 1 & 9/7 \\ -4/7 & 1 & 0 & 10/7 \\ -1/7 & 0 & 0 & -1/7 \end{bmatrix}$$

Untuk putaran ketiga pivotnya yang mungkin hanya satu yaitu elemen a_{31} sehingga p_3= -1/7 , r_3= 3 , c_3= 1

Kemudian dilakukan langkah normalisasi dan reduksi sehingga didapat hasil akhir :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Terlihat ketiga kolom pertama berisi matrik identitas, dan yang keempat berisi penyelesaiaannya, walaupun tidak dalam susunan yang tepat.

vektor r dan c berisi harga-harga :

k	r_k	c_k
1	1	3
2	2	2
3	3	1

Sehingga penyelesaian yang didapat adalah :

$x_1 = a_{3,4} = 1$

$x_2 = a_{2,4} = 2$

$x_3 = a_{1,4} = 1$

vektor pembantu j adalah :

$j_1 = 3$

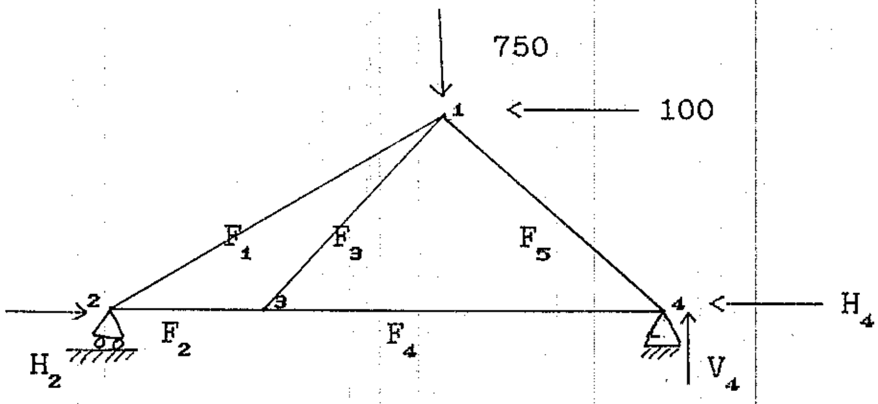
$j_2 = 2$

$j_3 = 1$

Karena diperlukan satu kali untuk menukar sehingga j dapat diurutkan dalam urutan naik , tanda determinan berarti berubah sesuai dengan sifat dari determinan. sehingga harga det = -2.

CONTOH PERMASALAHAN :

Masalah penting dalam rekayasa struktur adalah mencari gaya-gaya dan reaksi-reaksi yang berpadanan dengan rangka statis tertentu.



Gaya F menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota-anggota rangka.

H_i adalah gaya mendatar external yang bekerja pada simpul i (dimana gaya positif adalah dari kiri ke kanan)

V_i adalah gaya tegak external yang bekerja pada simpul i (dimana gaya positif jika arah dari atas ke bawah)

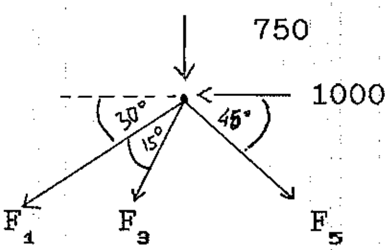
Struktur diatas dapat diuraikan sebagai sistem persamaan aljabar linier.

Jumlah gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol ($\Sigma F_H = 0$ dan $\Sigma F_V = 0$)

Dari persoalan diatas dicari gaya extenal (H_i & V_i) dan gaya F_i nya.

PENYELESAIAN :

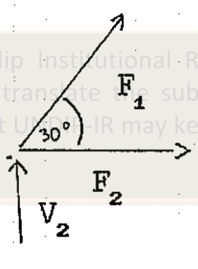
Simpul 1



$$\Sigma F_H=0 = -1000-F_1\cos 30^o-F_3\cos 45^o+ F_5\cos 45^o$$

$$\Sigma F_V=0 = 750 + F_1\sin 30^o+ F_3\sin 45^o+ F_5\sin 45^o$$

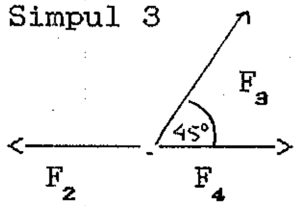
Simpul 2 :



$$\Sigma F_H=0 = F_1\cos 30^o + F_2$$

$$\Sigma F_V=0 = -F_1\sin 30^o - V_2$$

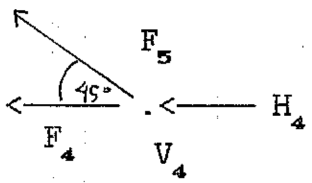
Simpul 3



$$\Sigma F_H = 0 = -F_2 + F_3 \cos 45^\circ + F_4$$

$$\Sigma F_V = 0 = -F_3 \sin 45^\circ$$

Simpul 4



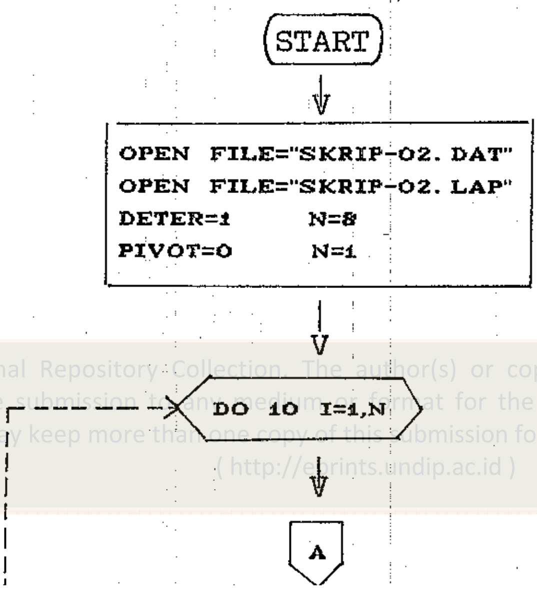
$$\Sigma F_H = 0 = -F_4 - F_5 \cos 45^\circ - H_4$$

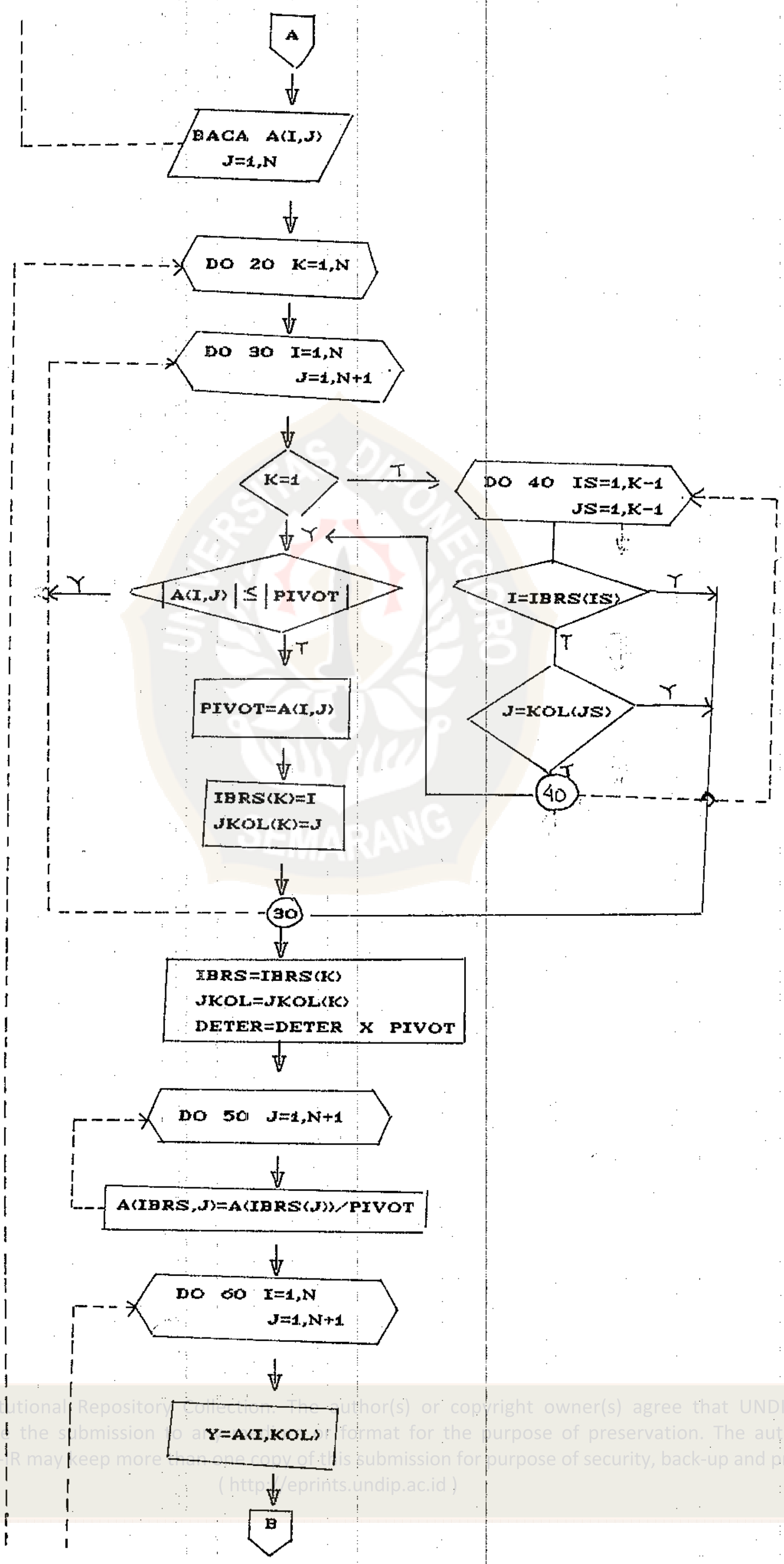
$$\Sigma F_V = 0 = -F_5 \sin 45^\circ - V_4$$

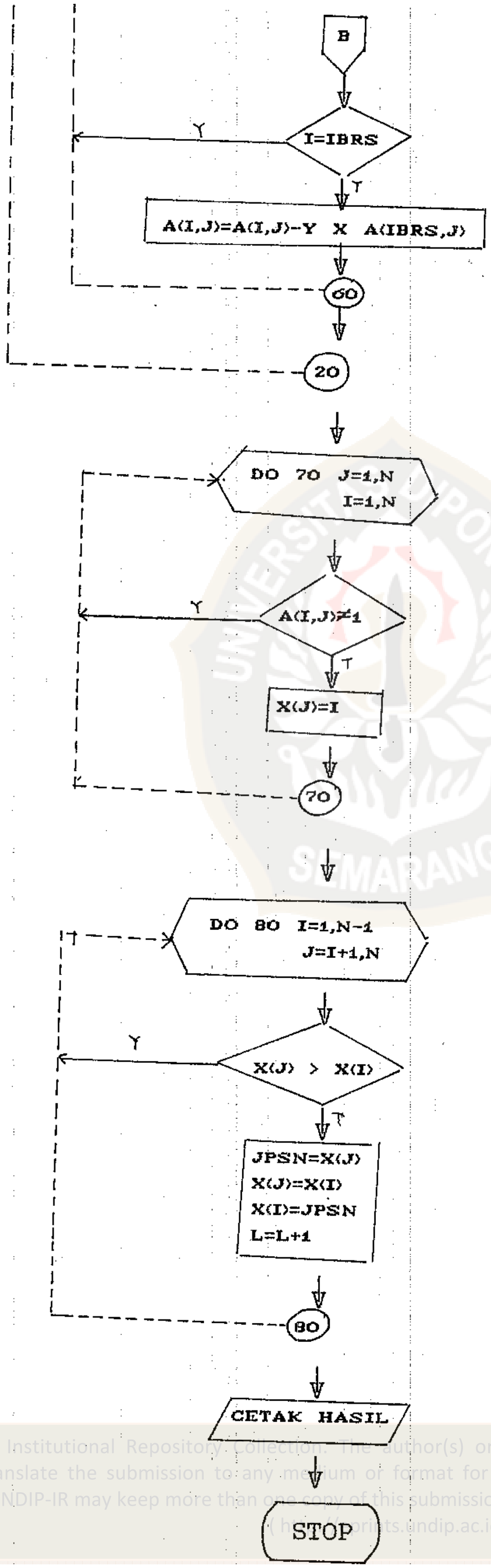
Dari delapan persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matrik , yaitu :

$$\begin{bmatrix} -0{,}86603 & 0 & -0{,}70711 & 0 & 0{,}70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}70711 & 0 & 0{,}70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}86603 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0{,}70711 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}70711 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0{,}70711 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}70711 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ V_2 \\ H_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ -750 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FLOWCHARTNYA :




A
BACA A(I,J)
J=1,N
DO 20 K=1,N
DO 30 I=1,N
J=1,N+1
K=1
T
DO 40 IS=1,K-1
JS=1,K-1
Y
|A(I,J)| ≤ |PIVOT|
Y
T
I=IBRS(IS)
Y
T
PIVOT=A(I,J)
J=KOL(JS)
Y
T
40
IBRS(K)=I
JKOL(K)=J
30
IBRS=IBRS(K)
JKOL=JKOL(K)
DETER=DETER X PIVOT
DO 50 J=1,N+1
A(IBRS,J)=A(IBRS(J))/PIVOT
DO 60 I=1,N
J=1,N+1
Y=A(I,KOL)
B


B
I=IBRS
Y
T
A(I,J)=A(I,J)-Y X A(IBRS,J)
60
20
DO 70 J=1,N
I=1,N
A(I,J)≠1
Y
T
X(J)=I
70
DO 80 I=1,N-1
J=I+1,N
X(J) > X(I)
Y
T
JPSN=X(J)
X(J)=X(I)
X(I)=JPSN
L=L+1
80
CETAK HASIL
STOP

```
C     PROGRAM GAUSS-JORDAN STRATEGI PIVOT MAX
C
      INTEGER X
      DIMENSION A(25,25),IBRS(25),JKOL(25),X(25)
      OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
      OPEN(6,FILE='skrip-03.lap')
      L=0.
      N=8
      WRITE(6,6)
    6 FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA ADALAH'/,
     *       '============================'/)
C
C ***** MULAI PENGERJAAN ******
C
       DO 10 I=1,N
      READ(5,101)(A(I,J),J=1,N+1)
  101 FORMAT(5F10.5)
   10 WRITE (6,101)(A(I,J),J=1,N+1)
      DETER=1.
      WRITE(6,7)
    7 FORMAT(//'HASIL PENGHITUNGAN'/
     *         '==================')
      DO 20 K=1,N
      PIVOT=0.
      DO 30 I=1,N
      DO 30 J=1,N
      IF (K.EQ.1) GOTO 45
C ***** PEMILIHAN PIVOT *****
C
      DO 40 IS=1,K-1
      DO 40 JS=1,K-1
      IF(I.EQ.IBRS(IS)) GOTO 30
      IF(J.EQ.JKOL(JS)) GOTO 30
   40 CONTINUE
   45 IF(ABS(A(I,J)).LE.ABS(PIVOT)) GOTO 30
      PIVOT=A(I,J)
      IBRS(K)=I
      JKOL(K)=J
   30 CONTINUE
      IBR=IBRS(K)
      JKO=JKOL(K)
      DETER=DETER*PIVOT
C ***** LANGKAH NORMALISASI ******
C
      DO 50 J=1,N+1
   50 A(IBR,J)=A(IBR,J)/PIVOT
      DO 60 I=1,N
      Y=A(I,JKO)
      IF(I.EQ.IBR) GOTO 60
C ***** LANGKAH REDUKSI
C
      DO 63 J=1,N+1
   63 A(I,J)=A(I,J)-Y*A(IBR,J)
   60 CONTINUE
C ***** PENULISAN HASIL TIAP PUTARAN *****
C
      WRITE(6,1)K,PIVOT
    1 FORMAT(//,'PUTARAN KE : ',I2,/'PIVOTNYA ADALAH :',F10.5)
      WRITE(6,2)IBR,JKO
    2 FORMAT('BARIS = ',I2,' KOLOM = ',I2)
      DO 65 I=1,N
   65 WRITE(6,100)(A(I,J),J=1,N+1)
   20 CONTINUE
```

```
      WRITE(6,3)DETER
    3 FORMAT(/'DETERMINANNYA =',F10.5,/
     *        '--------------')
C ***** PENUKARAN TEMPAT UNTUK MEMBENTUK MATRIK IDENTITAS *****
C
      DO 70 J=1,N
      DO 70 I=1,N
      IF(A(I,J).NE.1.) GOTO 70
      X(J)=I
      WRITE(6,4)J,I,A(I,9)
    4 FORMAT(/'X(',I2,')','=PADA BARIS KE ',I2,'=',F15.5)
   70 CONTINUE
      DO 80 I=1,N-1
      DO 80 J=I+1,N
      IF (X(J).GT.X(I)) GOTO 80
      JPSN=X(J)
      X(J)=X(I)
      X(I)=JPSN
      L=L+1
   80 CONTINUE
      WRITE(6,5)L
    5 FORMAT (/'JUMLAH PERTUKARANNYA SEHINGGA URUT =',I2)
  100 FORMAT(5F12.5)
      IF((-1**L).NE.1) GOTO 8
      DETERS=DETER*(-1)
      WRITE(6,17)DETERS
      GOTO 200
    8 WRITE (6,16)DETER
   16 FORMAT(/'TANDA DETERMINAN BENAR  DETERMINANNYA =',F10.5)
   17 FORMAT(/'TANDA DETERMINAN SALAH  DETERMINANNYA =',F10.5)
  200 END
```

```
MATRIK PERBESARANNYA ADALAH
===========================

 -0.86603    0.00000   -0.70711    0.00000    0.70711
  0.00000    0.00000    0.000001000.00000
  0.50000    0.00000    0.70711    0.00000    0.70711
  0.00000    0.00000    0.00000-750.00000
  0.86603    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
 -0.50000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
 -1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000   -1.00000    0.70711    1.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000   -0.70711    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000   -1.00000   -0.70711
  0.00000   -1.00000    0.00000    0.00000
  0.00000    0.00000    0.00000    0.00000   -0.70711
  0.00000    0.00000   -1.00000    0.00000
```

PUTARAN KE : 1
PIVOTNYA ADALAH : 1.00000
BARIS = 3 KOLOM = 2

-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.50000	0.00000	0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	-750.00000	
0.86603	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
-0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	-0.70711
0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.70711
0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	

PUTARAN KE : 2
PIVOTNYA ADALAH : -1.00000
BARIS = 4 KOLOM = 6

-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.50000	0.00000	0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	-750.00000	
0.86603	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	-0.70711
0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.70711
0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	

PUTARAN KE : 3
PIVOTNYA ADALAH : 1.00000
BARIS = 5 KOLOM = 4

-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.50000	0.00000	0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	-750.00000	
0.86603	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	0.00000	-0.70711
0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.70711
0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	

PUTARAN KE : 4
PIVOTNYA ADALAH : -1.00000
BARIS = 7 KOLOM = 7

-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.50000	0.00000	0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	-750.00000	
0.86603	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.70711
0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	

PUTARAN KE : 5
PIVOTNYA ADALAH : -1.00000
BARIS = 8 KOLOM = 8

-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.50000	0.00000	0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	-750.00000	
0.86603	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.86603	0.00000	0.70711	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
-0.86603	0.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	

PUTARAN KE : 6
PIVOTNYA ADALAH : -0.86603
BARIS = 1 KOLOM = 1

1.00000	0.00000	0.81650	0.00000	-0.81650
0.00000	0.00000	0.00000	-1154.69400	
0.00000	0.00000	0.29886	0.00000	1.11536
0.00000	0.00000	0.00000	-172.65280	
0.00000	1.00000	-0.70711	0.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.00000	0.00000	-0.40825	0.00000	0.40825
1.00000	0.00000	0.00000	577.34720	
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.70711
0.00000	0.00000	0.00000	1000.00000	
0.00000	0.00000	-0.70711	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	-1000.00000	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.70711

```
PUTARAN KE :  7
PIVOTNYA  ADALAH :   1.11536
BARIS =  2  KOLOM =  5
     1.00000      0.00000      1.03528      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000  -1281.08500
     0.00000      0.00000      0.26795      0.00000      1.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   -154.79580
     0.00000      1.00000     -0.89658      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   1109.45800
     0.00000      0.00000     -0.51764      0.00000      0.00000
     1.00000      0.00000      0.00000    640.54230
     0.00000      0.00000     -0.18947      1.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   1109.45800
     0.00000      0.00000     -0.70711      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      1.00000      0.00000  -1000.00000
     0.00000      0.00000     -0.18947      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      1.00000    109.45770

PUTARAN KE :  8
PIVOTNYA  ADALAH :  -0.70711
BARIS =  6  KOLOM =  3
     1.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000  -1281.08500
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      1.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   -154.79580
     0.00000      1.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   1109.45800
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     1.00000      0.00000      0.00000    640.54230
     0.00000      0.00000      0.00000      1.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000   1109.45800
     0.00000      0.00000      1.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      1.00000      0.00000  -1000.00000
     0.00000      0.00000      0.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      1.00000    109.45770

DETERMINANNYA =  -0.68302
-------------

X( 1)=PADA BARIS KE  1=    -1281.08500

X( 2)=PADA BARIS KE  3=     1109.45800

X( 3)=PADA BARIS KE  6=        0.00000

X( 4)=PADA BARIS KE  5=     1109.45800

X( 5)=PADA BARIS KE  2=     -154.79580

X( 6)=PADA BARIS KE  4=      640.54230

X( 7)=PADA BARIS KE  7=    -1000.00000

X( 8)=PADA BARIS KE  8=      109.45770

JUMLAH PERTUKARANNYA SEHINGGA URUT = 6

TANDA DETERMINAN BENAR  DETERMINANNYA =  -0.68302
```

3 2 METODE ITERASI JACOBI

Metode iterasi secara mendasar berbeda dari metode eliminasi, dimana itersai merupakan metode pendekatan. Metode iterasi menerapkan terkaan awal dan kemudian diiterasikan untuk memperoleh pendekatan-pendekatan yang diperhalus untuk tiap penyelesaian.

Metode iterasi sangat cocok untuk persamaan -persamaan besar dikarenakan metode eliminasi seringkali menimbulkan kesalahan-kesalahan pembulatan . Alasan bahwa metode-metode iterasi berguna untuk sistem yang cenderung akan memiliki kesalahan pembulatan adalah bahwa metode pendekatan dapat dilanjutkan terus sampai ia konvergen didalam rentang toleransi kesalahan yang telah ditetapkan sebelumnya. Jadi kesalahan pembulatan tidak lagi merupakan masalah karena kita dapat mengatur tingkat kesalahan yang dapat diterima.

Untuk membahas metode iterasi Jacobi ,pikirkan lagi n persamaan linier dengan n peubah yang tidak diketahui seperti pada persamaan (3.1) yaitu AX=U . Dengan memisalkan semua elemen-elemen diagonal tidak sama dengan nol ($a_{ii} \neq 0$), dan menggunakan iterasi Jacobi kita dapat mencari harga x_i.

Dari persamaan AX = U Untuk iterasi pertama kali akan mendapatkan harga x_{i1} dengan sebelumnya dibuat harga awal X, yaitu $x_o = (x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots\ldots x_{n0})^t$ yang merupakan iterasi yang ke nol.

Iterasi pertama akan didapatkan hasil :

$$x_{11} = \frac{1}{a_{11}} (U_1 - a_{12}x_{20} - a_{13}x_{30} - \ldots\ldots - a_{1n}x_{n0})$$

$$x_{21} = \frac{1}{a_{22}} (U_2 - a_{21}x_{10} - a_{23}x_{30} - \ldots\ldots - a_{2n}x_{n0})$$

. . . .

$$x_{n1} = \frac{1}{a_{nn}}(U_n - a_{n1}x_{10} - a_{n2}x_{20} - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1,0})$$

Selanjutnya dengan menggunakan hasil yang didapat dari iterasi yang pertama yaitu $x_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots\ldots, x_{n1})^t$ akan diperoleh iterasi kedua.

$$x_{12} = \frac{1}{a_{11}} (u_1 - a_{12}x_{21} - a_{13}x_{31} - \ldots\ldots - a_{1n}x_{n1})$$

$$x_{22} = \frac{1}{a_{22}} (u_2 - a_{21}x_{11} - a_{23}x_{31} - \ldots\ldots - a_{2n}x_{n1})$$

. . . .

$$x_{33} = \frac{1}{a_{nn}} (u_n - a_{n1}x_{11} - a_{n2}x_{21} - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1,1})$$

Demikian juga untuk iterasi ketiga dan seterusnya, yang dapat ditulis sebagai :

$$x_{ik} = \frac{u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_{jk-1}}{a_{ii}} \qquad \ldots\ldots(3.2.1)$$

dimana k = nomor iterasi

i = 1,2,......n

Iterasi akan diteruskan sampai mendapatkan harga x_{ik} cukup dekat dengan harga x_{ik-1}

Sedangkan cara untuk mendapatkan seberapa besar x_{ik} dan x_{ik-1} cukup dekat adalah dengan memisalkan :

$M_k = \max| x_k - x_{k-1}|$

diambil dari semua i

dan jika :

$M_k < \delta$

δ = bilangan positip kecil

maka proses iterasi dihentikan, yang disebut sebagai yang telah ditetapkan tidak terdapat harga $M_k < \gamma$, maka persamaan adalah divergen.

KONVERGENSI METODE ITERASI JACOBI

Sistem n persamaan dengan n peubah dapat ditulis dalam bentuk :

$$x_i = g_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad \ldots\ldots(3.2.2)$$

Syarat cukup agar supaya persamaan (3.2.2) adalah konvergen yaitu bila :

$$|g'(x)| \le \mu < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.3)$$

harus dipenuhi.

sebagai bukti :

Persamaan pendekatan :

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Andiakan penyelesaian yang dicari adalah :

$$x_r = g(x_r)$$

Dengan mengurangkan dua persamaan tersebut diatas, didapat :

$$x_r - x_{k+1} = g(x_r) - g(x_k) \qquad \ldots\ldots(3.2.4)$$

Dan dengan menggunakan theorema harga rata-rata, yaitu: Jikasuatu fungsi g(x) dan turunan pertamanya kontinu pada selang $a \le x \le b$, maka terdapat paling sedikit satu nilai $x = \xi$ didalam selang tersebut sedemikian hingga :

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$$

Jadi theorema dapat diterapkan pada titik x_r dan x_{k+1} sehingga didapat :

$$g(x_r) - g(x_k) = (x_r - x_k)\, g'(\xi) \qquad \ldots(3.2.5)$$

Galat untuk iterasi ke -k, didefinisikan sebagai:

$$\gamma_{t,k} = x_r - x_k$$

$x_r - x_k = \varepsilon_{t,k}$

sehingga dari (3.2.4) dan (3.2.5) didapatkan :

$$\varepsilon_{t,k+1} = g'(\xi)\ \varepsilon_{t,k+1}$$

Dan akhirnya terbukti bahwa $g'(\xi) \leq \mu < 1$ supaya galat akan berkurang untuk tiap iterasi.

Syarat (3.2.3) dapat ditulis sebagai :

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| < 1$$

Dan jika n persamaan linier dari persamaan (3.2.1) diturunkan secara parsiil , maka akan didapat :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad , j \neq i \quad ....(3.2.6)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad , i=j$$

Untuk selanjutnya (3.2.3) dan (3.2.6) disubstitusikan sehingga didapat :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq \mu < 1$$

atau :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < a_{ii} \qquad ....(3.2.7)$$

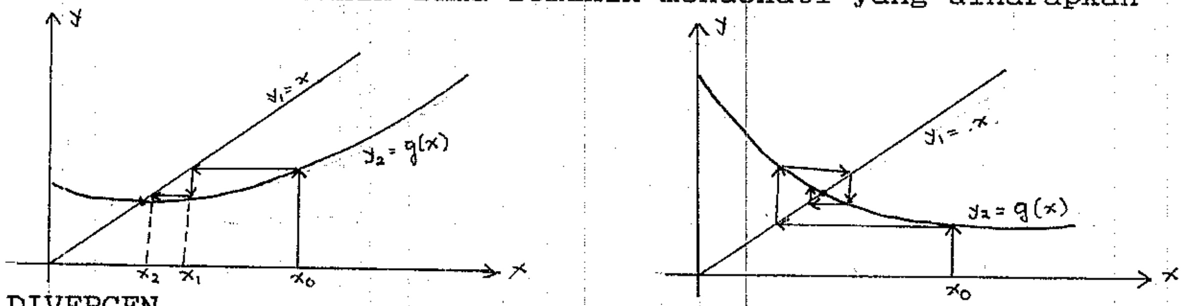
$$i,j = 1,2,.... ,n$$

Kriteria ini untuk kekonvergennya adalah mencukupi tetapi tidak perlu. Yakni metodenya kadang-kadang bisa berjalan walaupun persamaan (3.2.7) tidak dipenuhi, tetapi kekonvergenan dijamin jika persyaratan (3.2.7) dipenuhi.

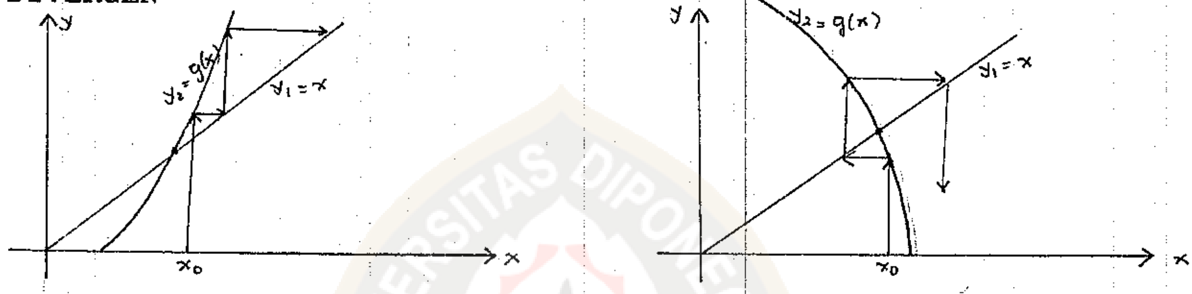
Gambaran tentang kondisi yang konvergen dan divergen

KONVERGEN

Dimana hasil semakin lama semakin mendekati yang diharapkan



DIVERGEN



CONTOH PERMASALAHAN

Cari harga-harga x_i yang memenuhi persamaan dibawah

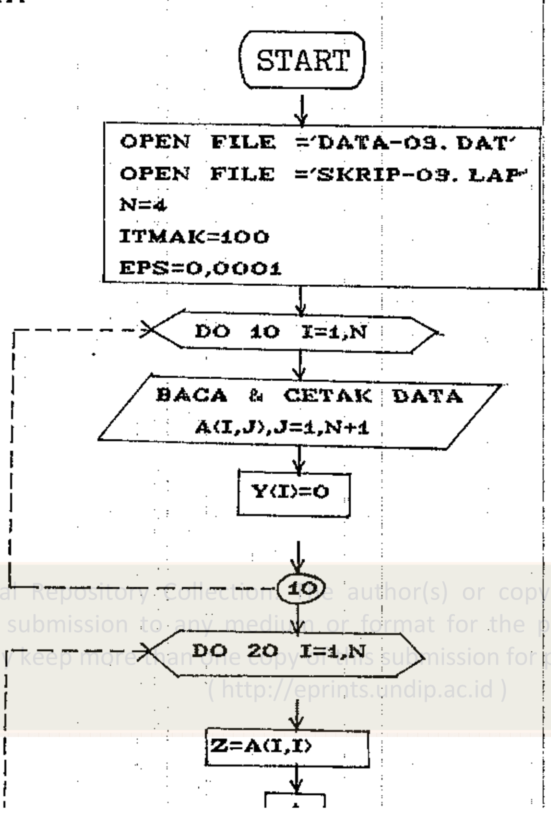
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 16$$

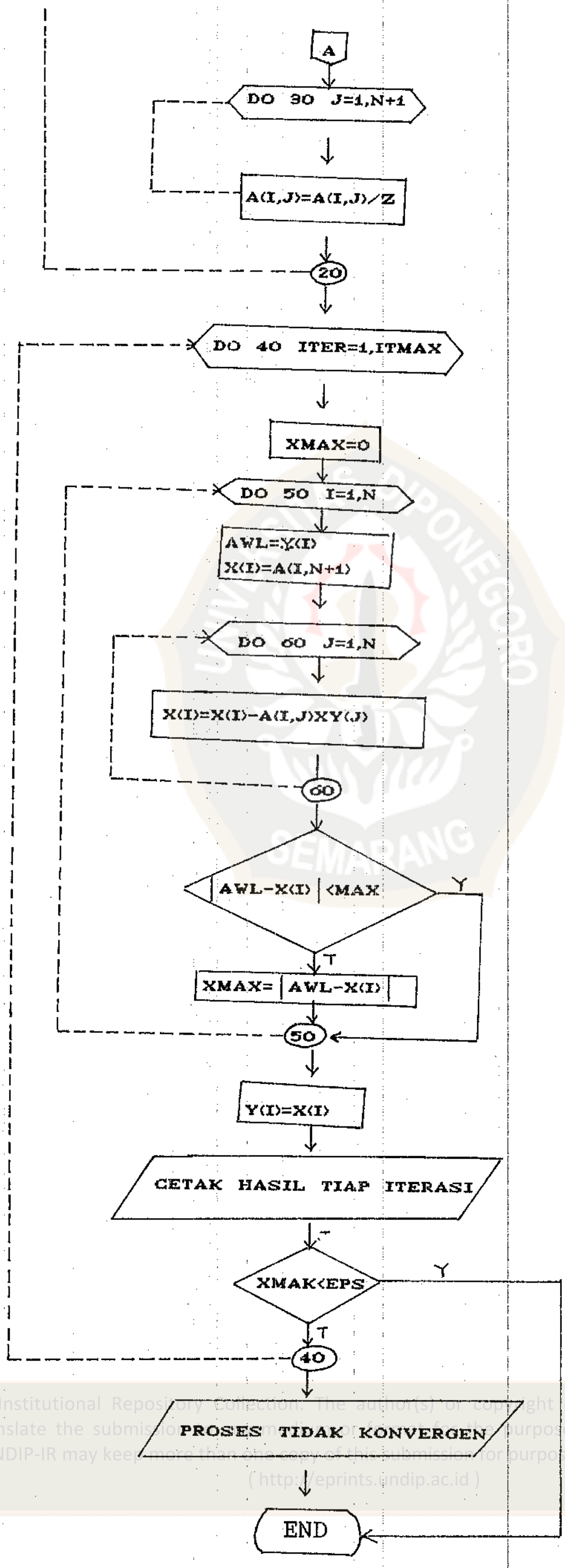
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 23$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -2$$

FLOWCHARTNYA




A
DO 30 J=1,N+1
A(I,J)=A(I,J)/Z
20
DO 40 ITER=1,ITMAX
XMAX=0
DO 50 I=1,N
AWL=Y(I)
X(I)=A(I,N+1)
DO 60 J=1,N
X(I)=X(I)-A(I,J)XY(J)
60
|AWL-X(I)| <MAX
Y
T
XMAX= |AWL-X(I)|
50
Y(I)=X(I)
CETAK HASIL TIAP ITERASI
XMAK<EPS
Y
T
40
PROSES TIDAK KONVERGEN
END

```
C **** PROGRAM [redacted] JACOBI ****
C
      DIMENSION A(10,10),X(10),Z(10)
      OPEN(5,FILE=´DATA-03.DAT´)
      OPEN(6,FILE=´SKRIP-04.LAP´)
      N=4
      ITMAK=100
      EPS=0.0001
      WRITE(6,1)
  1   FORMAT(´MATRIK PERBESARANNYA :´,/,
     A        ´====================´/)
C **** BACA DAN CETAK DATA ****
C
      DO 10 I=1,N
      READ(5,2)(A(I,J),J=1,N+1)
      WRITE(6,2)(A(I,J),J=1,N+1)
      Z(I)=0
 10   CONTINUE
  2   FORMAT(5F10.5)
      WRITE(6,3)
  3   FORMAT(//,´          HASIL PENGHITUNGAN´/,
     B        ´---------------------------------------------------------------´/,
     C        ´ITERASI KE    X(1)         X(2)          X(3)         X(4) ´/,
     D        ´---------------------------------------------------------------´/)
      DO 20 I=1,N
      Y=A(I,I)
      DO 30 J=1,N+1
 30   A(I,J)=A(I,J)/Y
 20   CONTINUE
C **** MULAI PROSES ITERASI ****
C
      DO 40 ITER=1,ITMAK
      XMAK=0.
      DO 35 I=1,N
      AWL=Z(I)
      X(I)=A(I,N+1)
      DO 50 J=1,N
      IF(J.EQ.I) GOTO 50
      X(I)=X(I)-A(I,J)*Z(J)
 50   CONTINUE
      IF (ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK) GOTO 35
      XMAK=ABS(AWL-X(I))
 35   CONTINUE
      DO 55 I=1,N
 55   Z(I)=X(I)
C **** CETAK HASIL TIAP ITERASI ****
C
      WRITE(6,4)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
      IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
 40   CONTINUE
      WRITE (6,5)
  5   FORMAT(´PROSES TIDAK KONVERGEN´)
      GOTO 6
  4   FORMAT(I5,4F13.5)
500   WRITE(6,102)
102   FORMAT(´---------------------------------------------------------------´,//,
```

```
      A //,'HASIL AKHIR YANG DIPEROLEH =',/)
       DO 65 I=1,N
   65    WRITE(6,103)I,X(I)
  103 FORMAT(/,'X(',I2,')=',F13.5)
    6 END
```

HASIL KELUARANNYA :

MATRIK PERBESARANNYA :
===================

5.00000	1.00000	3.00000	0.00000	16.00000
1.00000	4.00000	1.00000	1.00000	11.00000
-1.00000	2.00000	6.00000	-2.00000	23.00000
1.00000	-1.00000	1.00000	4.00000	-2.00000

HASIL PENGHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	3.20000	2.75000	3.83333	-0.50000
2	0.35000	1.11667	3.28333	-1.57083
3	1.00667	2.23438	2.99583	-1.12917
4	0.95563	2.03167	2.87993	-0.94203
5	1.06571	2.02662	3.00137	-0.95097
6	0.99385	1.97097	3.01842	-1.01012
7	0.99475	1.99946	3.00528	-1.01033
8	0.99694	2.00257	2.99586	-1.00014
9	1.00197	2.00184	2.99858	-0.99756
10	1.00048	1.99925	3.00053	-0.99968
11	0.99983	1.99967	3.00044	-1.00044
12	0.99980	2.00004	2.99994	-1.00015
13	1.00003	2.00010	2.99990	-0.99992
14	1.00004	2.00000	3.00000	-0.99996
15	1.00000	1.99998	3.00002	-1.00001

HASIL AKHIR YANG DIPEROLEH =

X(1)= 1.00000

X(2)= 1.99998

X(3)= 3.00002

X(4)= -1.00001

3.3 METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL

Metode iterasi Gauss-Seidel hampir sama dengan metode iterasi Jacobi , akan tetapi pada metode iterasi Gauss-Seidel komponen baru yang didapat langsung digunakan untuk penghitungan berikutnya, sedang pada metode Jacobi komponen baru yang didapat bisa digunakan bila semua komponen n selesai diperoleh.

Untuk penggambarannya dipikirkan lagi n system persamaan linier Ax = U dengan n peubah. Sama dengan metode Jacobi , kita misalkan semua $a_{ii} \neq 0$ .Sebelum membuat iterasi pertama ditetapkan harga awal terlebih dahulu yaitu $x_o = (x_{10},$ $x_{20},$ .... $,x_{no})^t$. Sehingga didapat iterasi pertama, adalah :

$$x_{11} = \frac{1}{a_{11}} (u_1 - a_{12}x_{20} - a_{13}x_{30} - \ldots\ldots - a_{1n}x_{no})$$

$$x_{21} = \frac{1}{a_{22}} (u_2 - a_{21}x_{11} - a_{23}x_{30} - \ldots\ldots - a_{2n}x_{no})$$

$$x_{31} = \frac{1}{a_{33}} (u_3 - a_{31}x_{11} - a_{32}x_{21} - a_{34}x_{40} - \ldots\ldots - a_{3n}x_{no})$$

....

$$x_{n1} = \frac{1}{a_{nn}} (u_n - a_{n1}x_{11} - a_{n2}x_{21} - \ldots\ldots - a_{nn-1}x_{n-1,0})$$

Sehingga didapat harga x_i untuk iterasi pertama $x_1 = (x_{11}$, x_{21} , ... , $x_{n1})^t$. Dan setelah iterasi pertama didapatkan ,dilanjutkan dengan pengerjaan iterasi yang kedua yaitu :

$$x_{12} = \frac{1}{a_{11}} (u_1 - a_{12}x_{21} - a_{13}x_{31} - \ldots\ldots - a_{1n}x_{n1})$$

$$x_{22} = \frac{1}{a_{22}}(u_2 - a_{21}x_{12} - a_{23}x_{31} - \ldots\ldots - a_{2n}x_{n1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n2} = \frac{1}{a_{nn}}(u_n - a_{n1}x_{12} - a_{n2}x_{22} - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1,1})$$

Sehingga didapatkan $x_2=(x_{12},x_{22},\ldots\ldots x_{n2})^t$ dan seterusnya, secara umum dapat dituliskan sebagai :

$$x_{ik} = \frac{1}{a_{ii}}\left[u_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{jk} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_{jk-1}\right]$$

untuk $i=1,2,\ldots. n$

$a_{ii} \neq 0$

k = nomor iterasi

Atau bisa ditulis sebagai :

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_{jk} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{jk-1} + v_i \qquad \ldots\ldots(3.3.2)$$

dimana : $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$

$v_i = u_i/a_{ii}$

Dengan cara ini proses iterasi akan lebih cepat dari-pada dengan metode Jacobi. Dan proses ini dikerjakan sampai semua x_{ik} dekat dengan harga x_{ik-1}. Untuk mengetahui bahwa pendekatan yang diperoleh sudah cukup dekat adalah dengan memisalkan :

$$M_k = \max | x_{ik} - x_{ik-1} |$$

dimana max diberikan untuk semua i , dan jika :

$$M_k < \gamma$$

dimana γ adalah bilangan kecil positip , maka proses iterasi dihentikan dan bila kondisi ini tidak dipenuhi sampai iterasi yang telah ditentukan berarti proses adalah divergen. Kriteria kekonvergenan pada metode Gauss-Seidel adalah sama seperti pada metode Jacobi. Yaitu :

$$|g'(x)| \leq \mu < 1$$

atau :

$$\sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq \mu < 1$$

Bila penyelesaiannya adalah α_i maka :

$$\lim_{k \to \infty} x_{ik} = \alpha_i$$

$$\alpha_i = \sum b_{ij} \alpha_j + v_i \qquad \ldots\ldots\ (3.3.2)$$

Dari (3.3.1) dan (3.3.2) didapat :

$$|x_{ik} - \alpha_i| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| |x_{jk} - \alpha_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}| |x_{jk} - \alpha_j|$$

Dimisalkan $e_k = \max |x_{ik} - \alpha_i|$

maka :

$$|x_{1k} - \alpha_1| \leq \sum_{j=2}^{n} |b_{1j}|\ e_{k-1} \leq \mu\ e_{k-1}$$

selanjutnya :

$$|x_{2k} - \alpha_2| \leq |b_{21}| e_{k-1} + \sum_{j=3}^{n} |b_{2j}| e_{k-1} \leq \mu\ e_{k-1}$$

Sehingga dalam bentuk umumnya , untuk setiap i :

$$|x_{ik} - \alpha_i| \leq \mu_{k-1} \qquad , 1 \leq i \leq n$$

Dan akhirnya didapat :

$$\begin{aligned} |x_{ik} - \alpha_i| &\leq \mu\ e_{k-1} \\ &\leq \mu^2 e_{k-2} \\ &\leq \mu^3 e_{k-3} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$|x_{ik} - \alpha_i| \leq \mu^k e_o$$

Dan dapatkan bukti bahwa :

$$\lim_{k \to \infty} x_{ik} = \alpha_i$$

Perbedaan metode Jacobi dan Gauss-Seidel

Akan digambarkan dengan menggunakan 3 persamaan linier dengan 3 peubah yang tidak diketahui.

ITERASI PERTAMA	ITERASI KEDUA

METODE JACOBI

ITERASI PERTAMA	ITERASI KEDUA
$x_{11} = \dfrac{u_1 - a_{12}x_{20} - a_{13}x_{30}}{a_{11}}$	$x_{12} = \dfrac{u_1 - a_{12}x_{21} - a_{13}x_{31}}{a_{11}}$
$x_{21} = \dfrac{u_2 - a_{21}x_{10} - a_{23}x_{30}}{a_{22}}$	$x_{22} = \dfrac{u_2 - a_{21}x_{11} - a_{23}x_{31}}{a_{22}}$
$x_{31} = \dfrac{u_3 - a_{31}x_{10} - a_{32}x_{20}}{a_{33}}$	$x_{32} = \dfrac{u_3 - a_{31}x_{11} - a_{32}x_{21}}{a_{33}}$

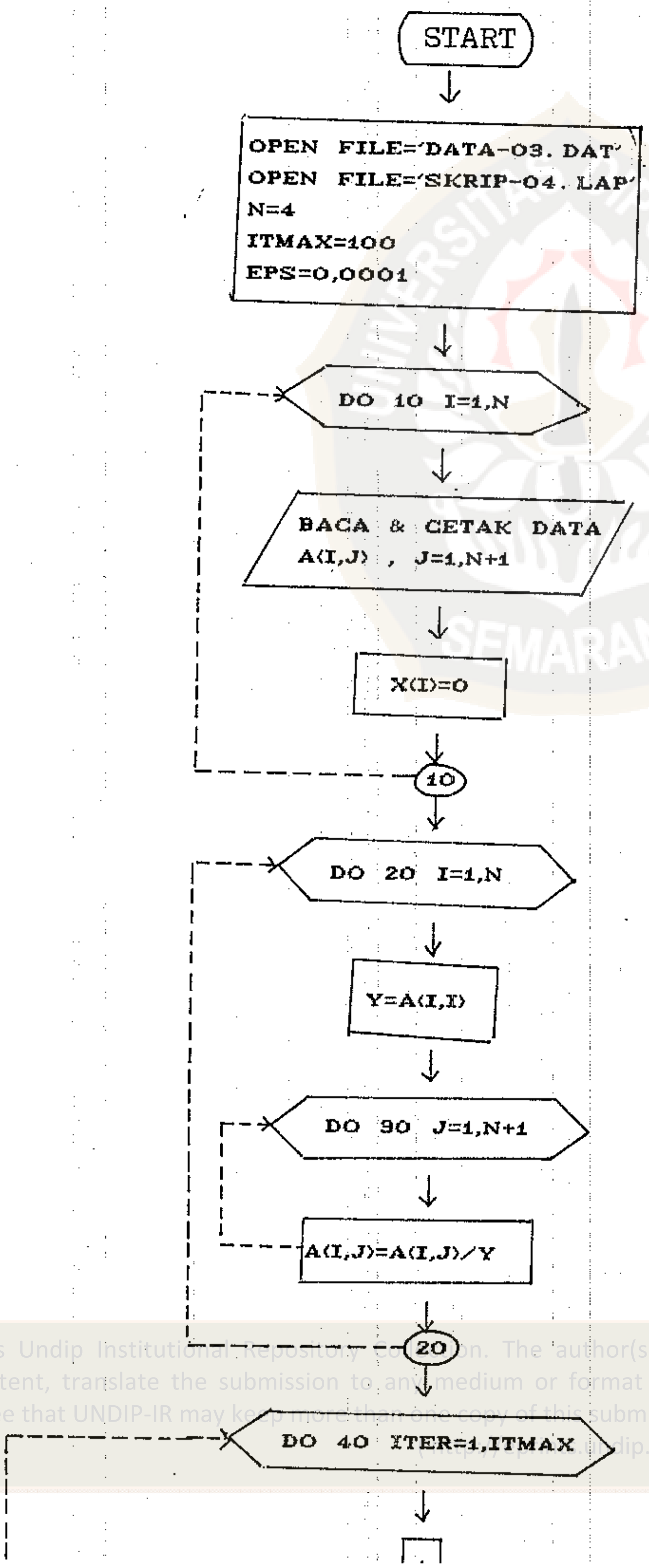
METODE GAUSS-SEIDEL

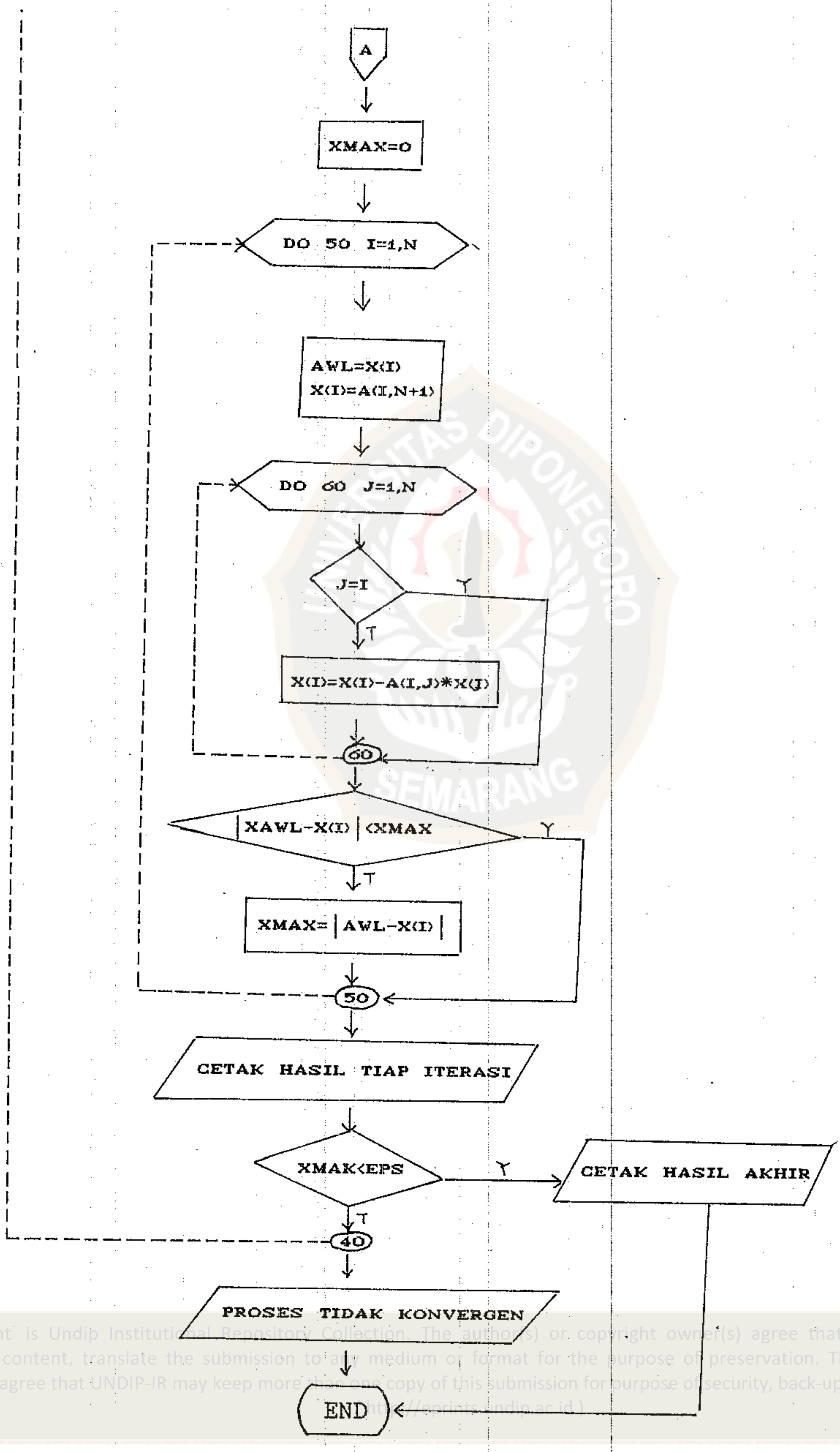
ITERASI PERTAMA	ITERASI KEDUA
$\boxed{x_{11}} = \dfrac{u_1 - a_{12}x_{20} - a_{13}x_{30}}{a_{11}}$	$\boxed{x_{12}} = \dfrac{u_1 - a_{12}x_{21} - a_{13}x_{31}}{a_{11}}$
$\boxed{x_{21}} = \dfrac{u_2 - a_{21}x_{11} - a_{23}x_{30}}{a_{22}}$	$\boxed{x_{21}} = \dfrac{u_2 - a_{21}x_{12} - a_{23}x_{31}}{a_{22}}$
$\boxed{x_{31}} = \dfrac{u_3 - a_{31}x_{11} - a_{32}x_{21}}{a_{33}}$	$x_{32} = \dfrac{u_3 - a_{31}x_{12} - a_{32}x_{22}}{a_{33}}$

CONTOH PERMASALAHAN

Seperti pada contoh permasalahan pada metode Jacobi

FLOWCHARTNYA :




A
XMAX=0
DO 50 I=1,N
AWL=X(I)
X(I)=A(I,N+1)
DO 60 J=1,N
J=I
Y
T
X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
60
|XAWL-X(I)|<XMAX
Y
T
XMAX=|AWL-X(I)|
50
CETAK HASIL TIAP ITERASI
XMAK<EPS
Y
CETAK HASIL AKHIR
T
40
PROSES TIDAK KONVERGEN
END

```
C *** PROGRAM METODE GAUSS-SEIDEL ***
C
      DIMENSION A(10,10),X(10)
      OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
      OPEN(6,FILE='SKRIP-03.LAP')
      N=4
      ITMAK=100
      EPS=0.0001
      WRITE(6,9)
  9   FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
     A       '====================='/)
C *** BACA DAN CETAK DATA ***
C
      DO 10 I=1,N
      READ(5,100)(A(I,J),J=1,N+1)
      WRITE(6,100)(A(I,J),J=1,N+1)
      X(I)=0
 10   CONTINUE
100   FORMAT(5F10.5)
      WRITE(6,101)
101   FORMAT(//,'             HASIL PENGHITUNGAN'/,
     B       '--------------------------------------------------------------------------'/,
     C       'ITERASI KE     X(1)          X(2)           X(3)          X(4) '/,
     D       '--------------------------------------------------------------------------'/)
      DO 20 I=1,N
      Y=A(I,I)
      DO 30 J=1,N+1
 30   A(I,J)=A(I,J)/Y
 20   CONTINUE
C *** MULAI PROSES ITERASI ***
C
      DO 40 ITER=1,ITMAK
      XMAK=0.
      DO 35 I=1,N
      AWL=X(I)
      X(I)=A(I,N+1)
      DO 50 J=1,N
      IF(J.EQ.I) GOTO 50
      X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
 50   CONTINUE
      IF (ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK) GOTO 35
      XMAK=ABS(AWL-X(I))
 35   CONTINUE
      WRITE(6,400)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
      IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
 40   CONTINUE
      WRITE (6,300)
300   FORMAT('TIDAK KONVERGEN')
400   FORMAT(I5,4F13.5)
500   WRITE(6,102)
102   FORMAT('--------------------------------------------------------------------------')
      DO 60 I=1,N
 60   WRITE(6,600)I,X(I)
600   FORMAT(/,'X(',I2,') = ',F13.5)
      END
```

MATRIK PERBESARANNYA :

5.00000	1.00000	3.00000	0.00000	16.00000
1.00000	4.00000	1.00000	1.00000	11.00000
-1.00000	2.00000	6.00000	-2.00000	23.00000
1.00000	-1.00000	1.00000	4.00000	-2.00000

HASIL PENGHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	3.20000	1.95000	3.71667	-1.74167
2	0.58000	2.11125	2.64569	-0.77861
3	1.19033	1.98565	3.11030	-1.07875
4	0.93669	2.00794	2.96055	-0.97233
5	1.02208	1.99742	3.01376	-1.00961
6	0.99226	2.00090	2.99521	-0.99664
7	1.00270	1.99968	3.00167	-1.00117
8	0.99906	2.00011	2.99942	-0.99959
9	1.00033	1.99996	3.00020	-1.00014
10	0.99989	2.00001	2.99993	-0.99995
11	1.00004	2.00000	3.00003	-1.00002
12	0.99999	2.00000	2.99999	-0.99999

X(1) = 0.99999

X(2) = 2.00000

X(3) = 2.99999

X(4) = -0.99999